

# 黎曼猜想的一个推论

费晋华

长岭电子科技公司 宝鸡 721006

E-mail: feijinhuayoujian@msn.com

**摘要** 本文使用值分布理论的Nevanlinna第二基本定理,给出了黎曼猜想的一个推论。

**关键词** 值分布理论,黎曼zeta函数

**MR(2000)主题分类** 30D35 11M06

**中图分类** O174

An corollary of Riemann hypothesis

Jin Hua Fei

ChangLing Company of Electronic Technology Baoji 721006 P.R.China

E-mail: feijinhuayoujian@msn.com

**abstract** This paper use Nevanlinna second fundamental theorem of the value distribution theory , give an corollary of Riemann hypothesis

**Keyword** value distribution theory ; Riemann zeta function

**MR(2000) Subject Classification** 30D35

**Chinese Library Classification** O174

首先,给出值分布理论中我们要用到的一些记号、定义和定理,其内容参见文献[1]和[2]

定义:

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x & 1 \leq x \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

易见,  $\log x \leq \log^+ x$ 。

设  $f(z)$  是区域  $|z| < R, 0 < R \leq \infty$  的一个亚纯函数, 不恒等于零。

$n(r, f)$  表示  $f(z)$  在圆  $|z| \leq r (0 < r < R)$  上的极点个数, 重级按其重数计,  $n(0, f)$  表示  $f(z)$  在原点处极点的重级。任意复数  $a \neq \infty$ ,  $n(r, \frac{1}{f-a})$  表示  $f(z) - a$  在圆  $|z| \leq r (0 < r < R)$  上的零点个数, 重级按其重数计,  $n(0, \frac{1}{f-a})$  表示  $f(z) - a$  在原点处零点重级。记:

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi$$

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log r$$

定义:  $T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$ ,  $T(r, f)$  称为  $f(z)$  的特征函数。

引理1: 若  $f(z)$  在区域  $|z| < R (0 < R \leq \infty)$  内解析 (即全纯), 则有

$$T(r, f) \leq \log^+ M(r, f) \leq \frac{\rho+r}{\rho-r} T(\rho, f) \quad (0 < r < \rho < R)$$

此处  $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$

证明见文献[1] 57页。

引理2: 设  $f(z)$  为在区域  $|z| < R (0 < R \leq \infty)$  的一个亚纯函数, 不恒等于0, 考虑一圆  $|z| < \rho (0 < \rho < R)$  和在此圆内  $f(z)$  的零点  $a_\lambda (\lambda = 1, 2, \dots, h)$  及极点  $b_\mu (\mu = 1, 2, \dots, k)$ , 其中每一零点或极点出现的次数与其级相同, 且  $z = 0$  不是函数  $f(z)$  的一个零点或极点, 则在圆  $|z| < \rho$  内有下列公式

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi - \sum_{\lambda=1}^h \log \frac{\rho}{|a_\lambda|} + \sum_{\mu=1}^k \log \frac{\rho}{|b_\mu|}$$

此公式称为Jensen公式。

证明见文献[1]48页.

**引理3:** 设函数 $f(z)$ 于 $|z| \leq R$ 为亚纯. 并有

$$f(0) \neq 0, \infty, 1, \quad f'(0) \neq 0$$

则于 $0 < r < R$ 有

$$T(r, f) < 2 \left\{ N(R, \frac{1}{f}) + N(R, f) + N(R, \frac{1}{f-1}) \right\}$$

$$+ 4 \log^+ |f(0)| + 2 \log^+ \frac{1}{R|f'(0)|} + 24 \log \frac{R}{R-r} + 2328$$

这就是Nevanlinna 第二基本定理的一种形式。

证明见文献[1] 75页定理3.1

为了后面的需要, 我们再做一些准备。

**引理4:** 设 $x \geq a$ 时,  $f(x)$ 是一非负的递减函数, 则极限

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=a}^N f(n) - \int_a^N f(x) dx \right) = \alpha$$

存在, 且 $0 \leq \alpha \leq f(a)$ , 更进一步言之, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 若 $f(x) \rightarrow 0$ , 则

$$\left| \sum_{a \leq n \leq \xi} f(n) - \int_a^\xi f(\nu) d\nu - \alpha \right| \leq f(\xi - 1), \quad (\xi \geq a + 1)$$

证明见文献[3] 91页定理2.

记  $s = \sigma + it$  是复变数,  $\zeta(s)$  是Riemann Zeta 函数, 当  $\sigma > 1$  时, 定义为

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

根据文献[4] 90页, 当  $\sigma > 1$  时

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s \log n}$$

其中  $\Lambda(n)$  是Mangoldt 函数。

**引理5:** 对任意实数  $t$ , 有

(一)

$$0.0426 \leq |\log \zeta(4 + it)| \leq 0.0824$$

(二)

$$|\zeta(4 + it) - 1| \geq 0.0426$$

(三)

$$0.917 \leq |\zeta(4 + it)| \leq 1.0824$$

(四)

$$|\zeta'(4 + it)| \geq 0.012$$

**证明:**

(一)

$$|\log \zeta(4 + it)| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^4 \log n} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} - 1 \leq 0.0824$$

$$|\log \zeta(4 + it)| \geq \frac{1}{2^4} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{2}{2^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{9}{8} - \frac{\pi^4}{90} \geq 0.0426$$

(二)

$$\begin{aligned} |\zeta(4+it) - 1| &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{4+it}} \right| \geq \frac{1}{2^4} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^4} \\ &= 1 + \frac{2}{2^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{9}{8} - \frac{\pi^4}{90} \geq 0.0426 \end{aligned}$$

(三)

$$|\zeta(4+it)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4+it}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \leq 1.0824$$

$$|\zeta(4+it)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4+it}} \right| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 2 - \frac{\pi^4}{90} \geq 0.917$$

(四)

$$|\zeta'(4+it)| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^{4+it}} \right| \geq \frac{\log 2}{2^4} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n^4}$$

由引理4

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n^4} = \int_3^{\infty} \frac{\log x}{x^4} dx + \alpha$$

其中  $0 \leq \alpha \leq \frac{\log 3}{3^4}$

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} \frac{\log x}{x^4} dx &= -\frac{1}{3} \int_3^{\infty} \log x dx^{-3} = \frac{\log 3}{3^4} + \frac{1}{3} \int_3^{\infty} x^{-4} dx \\ &= \frac{\log 3}{3^4} - \frac{1}{3^2} \int_3^{\infty} dx^{-3} = \frac{\log 3}{3^4} + \frac{1}{3^5} \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n^4} \leq \frac{\log 3}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{\log 3}{3^4}$$

因此,

$$|\zeta'(4+it)| \geq \frac{\log 2}{2^4} - \frac{2\log 3}{3^4} - \frac{1}{3^5} \geq 0.012$$

证毕。

设  $0 < \delta \leq \frac{1}{100}$ , 本文以下,  $c_1, c_2, \dots$ , 均表示仅与  $\delta$  有关的正常数。

引理6: 当  $\sigma \geq \frac{1}{2}$ ,  $|t| \geq 2$  时, 有

$$|\zeta(\sigma+it)| \leq c_1 |t|^{\frac{1}{2}}$$

证明见文献[4] 140 页定理2 及142页定理4。

引理7: 设  $f(z)$  在圆  $|z-z_0| \leq R$  上解析, 则对任意的  $0 < r < R$ , 在圆  $|z-z_0| \leq r$  上有

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{2r}{R-r} (A(R) - \operatorname{Re}f(z_0))$$

其中

$$A(R) = \max_{|z-z_0| \leq R} \operatorname{Re}f(z)$$

证明见文献[4] 61 页定理2。

现假定黎曼假设成立, 简称RH 成立, 即当  $\sigma > \frac{1}{2}$  时,  $\zeta(\sigma+it)$  没有零点。记区域  $\sigma \geq \frac{1}{2} + \delta, |t| > 1$  和区域  $\sigma > 2, |t| \leq 1$  的并集为区域D。因而在区域D内,  $\zeta(\sigma+it)$  既无零点, 也无极点, 此时, 在区域D内,  $\log \zeta(\sigma+it)$  是一个有定义的多值解析函数, 其每个单值分支相差  $2\pi i$  的整数倍。假定在区域D内, 存在点  $s_0$ , 使  $\zeta(s_0) = 1$  (如果不存在这样的点, 那么引理9的结果变为  $N(\rho, \frac{1}{\zeta-1}) = 0$ , 从而就可以直接得到本文定理的结果), 对于不同的单值解析分支,  $\log \zeta(s_0) = \log 1$  的取值也不同, 可取  $0, 2\pi ki, (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$

，我们选取  $\log \zeta(s_0) = \log 1 = 0$  的单值解析分支。因为区域D是单连通区域，所以由解析开拓的单值性定理（参见文献[5] 276页定理2和文献[6]155页定理1），在区域D内， $\log \zeta(\sigma + it)$  是一个单值解析函数，以下均指该单值解析分支。易见，函数  $\zeta(\sigma + it) = 1$  则必有  $\log \zeta(\sigma + it) = 0$ ，即函数  $\zeta(\sigma + it)$  的1 - 值点必是函数  $\log \zeta(\sigma + it)$  的零点。

**引理8:** 若RH 成立,  $0 < \delta \leq \frac{1}{100}$ ，则当  $\sigma \geq \frac{1}{2} + 2\delta$ ,  $|t| \geq 16$  时, 有

$$|\log \zeta(\sigma + it)| \leq c_2 \log |t| + c_3$$

**证明:** 在引理7中, 取  $z_0 = 0$ ,  $f(z) = \log \zeta(z + 4 + it)$ ,  $|t| \geq 16$ ,  $R = \frac{7}{2} - \delta$ ,  $r = \frac{7}{2} - 2\delta$ ,  $\log \zeta(z + 4 + it)$  在圆  $|z - z_0| \leq R$  上解析, 因此在圆  $|z - z_0| \leq r$  上有

$$|\log \zeta(z + 4 + it) - \log \zeta(4 + it)| \leq \frac{7}{\delta} (A(R) - \operatorname{Re} \log \zeta(4 + it))$$

即:

$$|\log \zeta(z + 4 + it)| \leq \frac{7}{\delta} (A(R) + |\log \zeta(4 + it)|) + |\log \zeta(4 + it)|$$

由引理6

$$A(R) = \max_{|z - z_0| \leq R} \log |\zeta(z + 4 + it)| \leq \frac{1}{2} \log |t| + \log c_1$$

再由引理5,

$$|\log \zeta(z + 4 + it)| \leq c_2 \log |t| + c_3$$

由于  $|t| \geq 16$  的任意性, 可得到当  $\sigma \geq \frac{1}{2} + 2\delta$  时

$$|\log \zeta(\sigma + it)| \leq c_2 \log |t| + c_3$$

证毕。

引理9: 若RH 成立,  $0 < \delta \leq \frac{1}{100}$ , 则当  $|t| \geq 16$ ,  $\rho = \frac{7}{2} - 2\delta$  时, 在圆  $|z| \leq \rho$  上, 有

$$N\left(\rho, \frac{1}{\zeta(z+4+it)-1}\right) \leq \log \log |t| + c_4$$

证明: 在引理2中, 取  $f(z) = \log \zeta(z+4+it)$ ,  $R = \frac{7}{2} - \delta$ ,  $\rho = \frac{7}{2} - 2\delta$ ,  $a_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, h$ ) 是  $\log \zeta(z+4+it)$  在圆  $|z| < \rho$  内的零点, 重级按其重数计算,  $\log \zeta(z+4+it)$  在此圆内无极点, 且  $\log \zeta(4+it)$  不为零, 因而有

$$\log |\log \zeta(4+it)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\log \zeta(4+it + \rho e^{i\varphi})| d\varphi - \sum_{\lambda=1}^h \log \frac{\rho}{|a_\lambda|}$$

由引理5 及引理8,

$$\sum_{\lambda=1}^h \log \frac{\rho}{|a_\lambda|} \leq \log \log |t| + c_4$$

因为  $z=0$  既不是  $\log \zeta(z+4+it)$  的零点, 也不是极点, 所以, 若  $r_0$  为一适当小的正数, 则

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^h \log \frac{\rho}{|a_\lambda|} &= \int_{r_0}^{\rho} \left(\log \frac{\rho}{t}\right) dn\left(t, \frac{1}{f}\right) = \left[\left(\log \frac{\rho}{t}\right) n\left(t, \frac{1}{f}\right)\right]_{r_0}^{\rho} \\ &+ \int_{r_0}^{\rho} \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right)}{t} dt = \int_0^{\rho} \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right)}{t} dt = N\left(\rho, \frac{1}{f}\right) \\ &= N\left(\rho, \frac{1}{\log \zeta(z+4+it)}\right) \geq N\left(\rho, \frac{1}{\zeta(z+4+it)-1}\right) \end{aligned}$$



证毕。

**定理：** 若RH 成立，则当 $\sigma \geq \frac{1}{2} + 4\delta$ ， $0 < \delta \leq \frac{1}{100}$ ， $|t| \geq 16$  时，有

$$|\zeta(\sigma + it)| \leq c_8 (\log |t|)^{c_9}$$

证明：在引理3中，取 $f(z) = \zeta(z + 4 + it)$ ， $|t| \geq 16$ ，由引理5， $f(0) = \zeta(4 + it) \neq 0, \infty, 1$ ， $f'(0) = \zeta'(4 + it) \neq 0$ ，且 $f'(0) = \zeta'(4 + it) \geq 0.012$ ， $|f(0)| = |\zeta(4 + it)| \leq 1.0824$ ，取 $R = \frac{7}{2} - 2\delta$ ， $r = \frac{7}{2} - 3\delta$ ，因 $\zeta(z + 4 + it)$  在圆 $|z| \leq R$  内全纯，既无零点，也无极点，所以

$$N\left(R, \frac{1}{f}\right) = 0, \quad N(R, f) = 0$$

再由引理9，则有

$$T(r, \zeta(z + 4 + it)) \leq 2 \log \log |t| + c_5$$

在引理1 中，取 $R = \frac{7}{2} - 2\delta$ ， $\rho = \frac{7}{2} - 3\delta$ ， $r = \frac{7}{2} - 4\delta$  及最大值原理，在圆 $|z| \leq r$  上，有

$$\log^+ |\zeta(z + 4 + it)| \leq c_6 \log \log |t| + c_7$$

由于 $|t| \geq 16$  是任意的，所以当 $\sigma \geq \frac{1}{2} + 4\delta$  时有

$$\log^+ |\zeta(\sigma + it)| \leq c_6 \log \log |t| + c_7$$

则

$$\log |\zeta(\sigma + it)| \leq c_6 \log \log |t| + c_7$$

即

$$|\zeta(\sigma + it)| \leq c_8 (\log |t|)^{c_9}$$

证毕。

### 参考文献

- [1] Zhuang Q.T, Singular direction of meromorphic function , BeiJing: Science Press,1982.
- [2] Yang L , Value distribution theory and new research , BeiJing: Science Press,1982.
- [3] Hua L.G , Introduction of number theory , BeiJing: Science Press,1979.
- [4] Pan C.D, Pan C.B, Fundamentals of analytic number theory, BeiJing: Science Press, 1999
- [5] Zhuang Q.T , Zhang N.Y , Complex variables functions , BeiJing: Peking University press , 1984
- [6] Hua L.G , Introduction of advanced mathematics ( Book One of second volume ) BeiJing: Science Press, 1981