素数连乘积不等式

李联忠

（营山中学　四川营山　637700）

摘要：正整数 n 处于相邻两个素数平方间，则有素数连乘积分布公式（S）和公式（L），再根据素数定理，Mertens 定理 3 推出素数连乘积不等式以及推论 1、2、3.

关键词：数论；素数；不等式

中图分类号：015　　文献标识码：　　　文章编号：

定理：素数连乘积不等式： $\pi(x) > \dfrac{e^{\gamma}}{2} x \prod_{p \le \sqrt{x}} (1 - \dfrac{1}{p})$

先证明引理

引理 1：若 $p_1 = 2$，$p_2 = 3$，$\cdots p_j \cdots$，p_i，为连续素数，且 p_j | n ，则 n≠o (mod p_j) 的数的个数

$$y_i(n) = n \cdot \prod_{j=1}^{i} (1 - \frac{1}{p_j}).$$

证明：I. 当 i=1 时,

$\because$ p_1=2 ， p_1|n

$$\therefore \quad y_i(n) = n - \frac{n}{2} = n \cdot (1 - \frac{1}{2}) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1})$$

结论成立。

Ⅱ. 假设 i=k 时，结论成立，即：

$$y_k(n) = n \cdot \prod_{j=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_j}) \quad 成立。$$

当 i=k+1 时，

$\because$ p_1|n，p_2|n，⋯， p_k|n，据归纳假设

$$\therefore \quad y_k(n) = n \cdot \prod_{j=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_j})$$

又 $\because$ p_{k+1}|n

$\therefore$ n≠o (mod p_{k+1}) 的数有 $\dfrac{n}{p_{k+1}}$ 个，即是 p_{k+1} 的

$$1、2、3、\cdots、\frac{n}{p_{k+1}}$$

这$\dfrac{n}{p_{k+1}}$个倍数。而这$\dfrac{n}{p_{k+1}}$个数在去了$p_1, p_2, \cdots, p_k$的倍数后，据归纳假设还余

$$\frac{n}{p_{k+1}} \cdot \prod_{j=1}^{k}(1-\frac{1}{p_j})$$

$$\therefore \quad y_{k+1}(n) = n \cdot \prod_{j=1}^{k}(1-\frac{1}{p_j}) - \frac{n}{p_{k+1}} \cdot \prod_{j=1}^{k}(1-\frac{1}{p_j})$$

$$= n \cdot \prod_{j=1}^{k}(1-\frac{1}{p_j}) \cdot (1-\frac{1}{p_{k+1}}) = n \cdot \prod_{j=1}^{k+1}(1-\frac{1}{p_j})$$

∴ i=k+1 时，结论

$$y_{k+1}(n) = n \cdot \prod_{j=1}^{k+1}(1-\frac{1}{p_j}) \qquad \text{成立。}$$

由Ⅰ、Ⅱ可得，当 i 为任何正整数，结论都成立。

所以，若$p_1 = 2$，$p_2 = 3$，$\cdots p_j \cdots$，p_i，为连续素数，且p_j | n ，则 n≠o (mod p_j)

的数的个数$y_i(n) = n \cdot \prod_{j=1}^{i}(1-\frac{1}{p_j})$.

引理 1 证毕。

引理 2：若$\varphi(x) = \prod_{p \le x}(1-\frac{1}{p})\sum_{k=1}^{[x]}\frac{1}{k}$**，则** $e^{-\gamma} \leqslant \varphi(x) \leqslant 0.75$

证明：设 $\psi(x) = \sum_{k=1}^{[x]}\frac{1}{k} - \ln x - \gamma$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{[x]}\frac{1}{k} = \ln x + \gamma + \psi(x)$$

$$\therefore \quad \varphi(x) = \prod_{p \le x}(1-\frac{1}{p})\sum_{k=1}^{[x]}\frac{1}{k} = \prod_{p \le x}(1-\frac{1}{p}) \cdot (\ln x + \gamma + \psi(x))$$

根据 Mertens 定理 3

$$\prod_{p \le x}(1-\frac{1}{p}) = \frac{e^{-\gamma}}{\ln x} + O(\frac{1}{\ln^2 x})$$

$$\therefore \quad \varphi(x) = \prod_{p \le x}(1-\frac{1}{p})\sum_{k=1}^{[x]}\frac{1}{k} = \prod_{p \le x}(1-\frac{1}{p}) \cdot (\ln x + \gamma + \psi(x))$$

$$= (\frac{e^{-\gamma}}{\ln x} + O(\frac{1}{\ln^2 x})) \cdot (\ln x + \gamma + \psi(x))$$

$$=e^{-\gamma}+\frac{e^{-\gamma}(\gamma+\psi(x))}{\ln x}+O(\frac{\ln x+\gamma+\psi(x)}{\ln^2 x})$$

∴ $\varphi(x)$ 是波动减小的，波幅也减小。

∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\prod\limits_{p\le x}(1-\frac{1}{p})\sum\limits_{k=1}^{[x]}\frac{1}{k}$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\frac{e^{-\gamma}}{\ln x}+O(\frac{1}{\ln^2 x}))\cdot(\ln x+\gamma+\psi(x))=e^{-\gamma}$$

∴ $e^{-\gamma}\leqslant\varphi(x)=\prod\limits_{p\le x}(1-\frac{1}{p})\sum\limits_{k=1}^{[x]}\frac{1}{k}\leqslant\varphi(2)=0.75$

即

$$e^{-\gamma}\leqslant\varphi(x)\leqslant 0.75$$

引理 2 证毕。

引理 3（素数连乘积分布定理）：若 $p_1=2$，$p_2=3$，$\cdots p_k\cdots$，p_i，p_{i+1} **为连续素数，** $p_i^2\le n<p_{i+1}^2$ **则不大于 n 的素数个数公式为**

（S） π **(n)=** $\sum\limits_{k=1}^{i}\left[(p_{k+1}^2-p_k^2)\prod\limits_{j=1}^{s_k}(1-\frac{1}{p_j})\right]+O(\pi(\sqrt{n}))$ （$\lambda=\log_{p_k}p_{s_k}$）

或

（L） π **(n)=** $n\cdot\prod\limits_{j=1}^{l}(1-\frac{1}{p_j})+O(\pi(\sqrt{n}))$ （$\varepsilon=\log_{p_i}p_l$）

证明： ∵ n＝3+(8－3)+(24－8)+(48－24)+⋯+$(p_{k+1}^2-p_k^2)$+⋯+$(p_{i+1}^2-p_i^2)$

∴ 根据引理 1，区间［p_k^2,p_{k+1}^2）的素数个数可近似表示为

$$(p_{k+1}^2-p_k^2)\cdot\prod_{j=1}^{k}(1-\frac{1}{p_j})$$

因为 p_k 到 $\frac{p_{k+1}^2}{p_k}$ 之间的数，去 $p_1=2$，$p_2=3$，$\cdots p_u\cdots p_t\cdots p_j\cdots$，$p_{k-1}$ 的倍数后，余下的数的个数大于 $\frac{1}{p_k}$，这不是因为 p∤n 导致的，而是因为当 $p_j=p_t>\sqrt[3]{p_{k+1}^2}$ 时，p_k 到 $\frac{p_{k+1}^2}{p_k}$ 之间的数没有 p_j 的倍数，所以在去掉 $p_1=2$，$p_2=3$，$\cdots p_u\cdots p_t\cdots p_j\cdots p_{k-1}$，的倍数后，

余下数中，p_k 的倍数个数不是

$$\frac{p_{i+1}^2 - p_i^2}{p_i} \cdot \prod_{u=1}^{t-1}(1-\frac{1}{p_u}) \cdot \prod_{j=t}^{k-1}(1-\frac{1}{p_j})$$

而是

$$\frac{p_{i+1}^2 - p_i^2}{p_i} \cdot \prod_{u=1}^{t-1}(1-\frac{1}{p_u})$$

这不是 p 是否整除 n 的问题，而是 n 受 $p_k^2 \le n < p_{k+1}^2$ 限制，而使 p_k 到 $\frac{p_{k+1}^2}{p_k}$ 之间的数没有达到有 $p_j \cdots$, p_{k-1} 的倍数的范围，前面证明引理 1 时，去 $p_1 = 2$，$p_2 = 3$，$\cdots p_j \cdots$, p_{k-1} 的倍数后，再去 p_k 的倍数，减去的是

$$\frac{p_{i+1}^2 - p_i^2}{p_i} \cdot \prod_{u=1}^{t-1}(1-\frac{1}{p_u}) \cdot \prod_{j=t}^{k-1}(1-\frac{1}{p_j})$$

而 n 受 $p_i^2 \le n < p_{i+1}^2$ 限制，实际是

$$\frac{p_{i+1}^2 - p_i^2}{p_i} \cdot \prod_{u=1}^{t-1}(1-\frac{1}{p_u})$$

$$\because \quad \frac{p_{i+1}^2 - p_i^2}{p_i} \cdot \prod_{u=1}^{t-1}(1-\frac{1}{p_u}) > \frac{p_{i+1}^2 - p_i^2}{p_i} \cdot \prod_{u=1}^{t-1}(1-\frac{1}{p_u}) \cdot \prod_{j=t}^{k-1}(1-\frac{1}{p_j})$$

所以，少减了，为了与引理 1 有相吻合的表达式，也避免向后演绎导致麻烦，采取让 p_k 后的去素数倍数因子 $(1-\frac{1}{p_{k+1}})$、$(1-\frac{1}{p_{k+2}})$、$\cdots$、$(1-\frac{1}{p_{s_k}})$ 提前进入，来平衡少减的量。所以，区间［p_k^2, p_{k+1}^2）有较精确的素数个数表达式

$$(p_{k+1}^2 - p_k^2) \cdot \prod_{j=1}^{s_k}(1-\frac{1}{p_j}) \qquad (1)$$

又 $\because \quad p_3 = 5 > \sqrt[3]{p_4^2 - 1} = \sqrt[3]{7^2 - 1}$

$\therefore \quad$ 1≤k<4 时，$s_k = k$ 即

$$p_{s_k} = p_k$$

k≥4 时，$s_k > k$ 即

$$p_{s_k} > p_k$$

随着 k 的增大，（$s_k - k$）波动地增大，当 n→+∞时，（$s_k - k$）达到最大值。

调整每个区间的 s_k 值，理论上就可以得到不大于 n 的素数个数公式

(S) $$\pi(n)=\sum_{k=1}^{i}\left[(p_{k+1}^2 - p_k^2)\prod_{j=1}^{s_k}(1-\frac{1}{p_j})\right]+O(\pi\sqrt{n}) \quad (\lambda=\log_{p_k} p_{s_k})$$

知道了 n 受 $p_i^2 \le n < p_{i+1}^2$ 限制，所导致偏差的原因，同理可得另一形式的不大于 n 的素数个数公式

（L） $$\pi(n)=n\cdot\prod_{j=1}^{l}(1-\frac{1}{p_j})+O(\pi(\sqrt{n})) \qquad (\varepsilon=\log_{p_i} p_l)$$

由分析不难得到公式（S）和公式（L）中相应量的关系：

$$\lambda_i > \varepsilon$$

$$s_i > l$$

下面说明(1)式、（S）式、（L）式，与实际素数个数的误差。

设(1)式、（S）式、（L）式，与实际素数个数的误差为 w(k), w(S)、w(L)，则

$$w(k)=\left|(p_{k+1}^2 - p_k^2)\cdot\prod_{j=1}^{s_k}(1-\frac{1}{p_j}) - \pi[p_k^2, p_{k+1}^2)\right|$$

$$w(S)=\left|\sum_{k=1}^{i}\left[(p_{k+1}^2 - p_k^2)\prod_{j=1}^{s_k}(1-\frac{1}{p_j})\right]-\pi(n)\right|$$

$$w(L)=\left|n\cdot\prod_{j=1}^{l}(1-\frac{1}{p_j})-\pi(n)\right|$$

（上式中的 $\pi[p_k^2, p_{k+1}^2)$ 表示区间 $[p_k^2, p_{k+1}^2)$ 的素数个数）

（1）式误差 w(k)应小于 $\frac{\pi[p_k^2, p_{k+1}^2)}{p_{s_k}}$ 的一半。下面计算 $\frac{\pi[p_k^2, p_{k+1}^2)}{p_{s_k}}$。

根据素数定理

$$\pi(x)\approx\frac{x}{\ln x}$$

$$\therefore \quad \pi[p_k^2, p_{k+1}^2) \approx \frac{p_{k+1}^2 - p_k^2}{\ln p_k^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\pi[p_k^2, p_{k+1}^2)}{p_k} \approx \frac{p_{k+1}^2 - p_k^2}{p_k \ln p_k^2}$$

设 $p_{k+1} = p_k + m$，根据素数定理可得

$$p_{k+1} = p_k + m \approx p_k + \ln p_k$$

$$\therefore \quad p_{k+1}^2 - p_k^2 \approx (p_k + \ln p_k)^2 - p_k^2 = 2p_k \ln p_k + \ln^2 p_k$$

$$\therefore \quad \frac{\pi[p_k^2, p_{k+1}^2)}{p_k} \approx \frac{p_{k+1}^2 - p_k^2}{p_k \ln p_k^2} \approx \frac{2p_k \ln p_k + \ln^2 p_k}{p_k \ln p_k^2} = 1 + \frac{\ln p_k}{p_k}$$

又 $\because \quad p_{s_k} \geq p_k$

$$\therefore \quad \frac{\pi[p_k^2, p_{k+1}^2)}{p_{s_k}} < \frac{\pi[p_k^2, p_{k+1}^2)}{p_k} \approx 1 + \frac{\ln p_k}{p_k} < 2$$

$\therefore$ w(k)<1

公式(S)是 i 个区间素数个数之和，所以公式(S)的误差

w(S)<i=$\pi(\sqrt{n})$

考虑到这 i 个区间 s_k 取值的整体一致性，这 i 个区间中可能存在区间误差 w(k)大于 1，而导致 w(S)>$\pi(\sqrt{n})$的情况,这时，只需将每个区间的 s_k 加 1 或减 1，就可使 w(S)<$\pi(\sqrt{n})$，这样，既能使公式(S)中每个区间 s_k 具有整体一致性，又保证了 w(S)<$\pi(\sqrt{n})$。

公式（L）的误差 w(L)与 w(k)的推导一样，小于 $\frac{\pi(n)}{p_l}$ 的一半，下面计算 $\frac{\pi(n)}{p_l}$.

根据素数定理

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$$

$$\therefore \quad \frac{\pi(n)}{p_l} \approx \frac{n}{p_l \ln n} = \frac{\sqrt{n}}{2p_l} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\ln \sqrt{n}} \approx \frac{\sqrt{n}}{2p_l} \cdot \pi(\sqrt{n})$$

$$\because \quad p_i^2 \leq n < p_{i+1}^2$$

$$\therefore \quad 2p_l > p_{i+1} > \sqrt{n}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{n}}{2p_l} < 1$$

$\therefore \quad \dfrac{\pi(n)}{p_l} < \pi(\sqrt{n})$

$\therefore \quad w(L) < \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi(n)}{p_l} < \dfrac{1}{2}\pi(\sqrt{n}) < \pi(\sqrt{n})$

所以，公式（S）、公式(L)中误差 O（$\pi(\sqrt{n})$）是正确。

素数连乘积分布定理证毕。

公式（S）和公式（L）的意义。公式（S）是小区间素数个数之和，公式（L）是把计算范围看着整体计算素数个数。设公式（S）,公式（L）的素数密度分布函数分别为 s(x) ,l (x).

$\because$ (S) $\quad \pi(n)=\sum_{k=1}^{i}\left[(p_{k+1}^2-p_k^2)\prod_{j=1}^{s_k}(1-\frac{1}{p_j})\right]+O(\pi\sqrt{n})$ （$\lambda=\log_{p_k} p_{s_k}$）

$\therefore \quad p_{s_k}=p_k^{\lambda}$

$\therefore \quad s(x)=\prod_{p\le p_k^{\lambda}}(1-\frac{1}{p})$

设 $\quad p_k^2 \le x < p_{k+1}^2$

$\therefore \quad p_k^{\lambda} \le (\sqrt{x})^{\lambda}$

根据引理 2，得

$$S(x)=\prod_{p\le p_k^{\lambda}}(1-\frac{1}{p}) = \prod_{p\le(\sqrt{x})^{\lambda}}(1-\frac{1}{p})$$

$$=\frac{\varphi(p_k^{\lambda})}{\ln p_k^{\lambda}+\gamma+\psi(p_k^{\lambda})}=\frac{2\varphi((\sqrt{x})^{\lambda})/\lambda}{\ln x+2\gamma+2\psi((\sqrt{x})^{\lambda})}$$

$\because \quad e^{-\gamma} \leqslant \varphi(x) \leqslant 0.75$

$\gamma=0.577216649\cdots$

$\lambda=\log_{p_k} p_{s_k} \qquad p_{s_k} \ge p_k$

所以，S (x) 除随 x 的增大而减小外，还随 λ 波动增大而波动减小。

分析 l (x)。

$\because$（L） $\quad \pi(n)=n\cdot\prod_{j=1}^{l}(1-\frac{1}{p_j})+O(\pi(\sqrt{n}))$ （$\varepsilon=\log_{p_i} p_l$）

$\therefore \quad p_l=p_i^{\varepsilon}$

$\therefore \quad s(x)=\prod_{p\le p_i^{\varepsilon}}(1-\frac{1}{p})$

设 $p_i^2 \le x < p_{i+1}^2$

∴ $p_i^{\varepsilon} \le (\sqrt{x})^{\varepsilon}$

根据引理 2，得

$$l\,(\mathrm{x}) = \prod_{p \le p_i^{\varepsilon}} (1-\frac{1}{p}) = \prod_{p \le (\sqrt{x})^{\varepsilon}} (1-\frac{1}{p})$$

$$= \frac{\varphi((p_i^{\varepsilon})}{\ln p_i^{\varepsilon} + \gamma + \psi((p_i^{\varepsilon})} = \frac{2\varphi((\sqrt{x})^{\varepsilon})/\varepsilon}{\ln x + 2\gamma + 2\psi((\sqrt{x})^{\varepsilon})}$$

∵ $e^{-\gamma} \leqslant \varphi(x) \leqslant 0.75$

ɣ=0.577216649…

$\varepsilon = \log_{p_i} p_l$ ε 增函数

（因为第 i 个区间素数的平均密度总小于前面（i-1）个区间素数的平均密度）

所以，$l\,(\mathrm{x})$ 除随 x 的增大而减小外，还随 ε 的增大而减小。

引入相应素数密度函数后，公式（S）和公式（L）可表示为

(S) $\pi\,(\mathrm{n}) = \sum_{k=1}^{i}\left[(p_{k+1}^2 - p_k^2)s(x)\right] + O(\pi\sqrt{n})$

（ $\mathrm{S}\,(\mathrm{x}) = \prod_{p \le p_k^{\lambda}} (1-\frac{1}{p}) = \frac{2\phi((\sqrt{x})^{\lambda})/\lambda}{\ln x + 2\gamma + 2\psi((\sqrt{x})^{\lambda})}$ ）

（L） $\pi\,(\mathrm{n}) = n \cdot l(x) + O(\pi(\sqrt{n}))$

（ $l\,(\mathrm{x}) = \prod_{p \le p_i^{\varepsilon}} (1-\frac{1}{p}) = \frac{2\phi((\sqrt{x})^{\varepsilon})/\varepsilon}{\ln x + 2\gamma + 2\psi((\sqrt{x})^{\varepsilon})}$ ）

引理 3 证毕。

定理：素数连乘积不等式： $\pi(x) > \frac{e^{\gamma}}{2} x \prod_{p \le \sqrt{x}} (1-\frac{1}{p})$

证明：根据引理 3（素数连乘积分布定理），可得

$$\pi\,(\mathrm{n}) = \pi_{il}(n) = n \cdot \prod_{j=1}^{l} (1-\frac{1}{p_j}) + O(\pi(\sqrt{n})) \qquad (\varepsilon = \log_{p_i} p_l)$$

根据素数定理可得

$$\lim_{x\to+\infty} \pi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to+\infty} \pi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \prod_{j=1}^{l} (1-\frac{1}{p_j})$$

根据引理 2，引理 3，可得

$$l\,(\mathrm{x})=\prod_{p\le p_i^{\varepsilon}}(1-\frac{1}{p})=\frac{2\phi((\sqrt{x})^{\varepsilon})/\varepsilon}{\ln x+2\gamma+2\psi((\sqrt{x})^{\varepsilon})}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\prod_{j=1}^{l}(1-\frac{1}{p_j})=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{-\gamma}/\varepsilon}{\ln x}$$

$\therefore$ x→+∞

$$\frac{2e^{-\gamma}}{\varepsilon_{\max}}=1$$

$$\because\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\prod_{p^{\varepsilon}\le(\sqrt{x})^{\varepsilon}}(1-\frac{1}{p^{\varepsilon}})}{\prod_{p\le\sqrt{x}}(1-\frac{1}{p})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2e^{-\gamma}/\varepsilon}{\ln x}}{\frac{2e^{-\gamma}}{\ln x}}=\frac{1}{\varepsilon_{\max}}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+\infty}\pi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\prod_{j=1}^{l}(1-\frac{1}{p_j})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\varepsilon_{\max}}\cdot\prod_{p\le\sqrt{x}}(1-\frac{1}{p})$$

又 $\because$ ε 随 p 增大而增大

$\therefore$ $\frac{1}{\varepsilon}$ 随 p 增大而减小，$\to\frac{1}{\varepsilon_{\max}}$

$$\therefore\quad \pi(x)>\frac{e^{\gamma}}{2}x\prod_{p\le\sqrt{x}}(1-\frac{1}{p})$$

定理证毕。

在 $p_i^2\le n<p_{i+1}^2$ 的限制下，去模 p($p\le\sqrt{n}$)的 m 个同余类（含余 0 的同余类）与去模 p_k 余 0 一个同余类造成的偏差是一样的，所以有如下推论：

推论 1：若 $p_1=2$，$p_2=3$，$\cdots p_k\cdots$，p_i，p_{i+1} 为连续素数，$p_i^2\le n<p_{i+1}^2$ 则去掉模 p_k 的 m 个同余类（含余 0 的同余类）后，余下素数个数

$$\pi_k(x)>\frac{e^{\gamma}}{2}x\prod_{p\le m}\frac{1}{p}\prod_{m<p\le\sqrt{x}}(1-\frac{m}{p})$$

因为孪生素数猜想是在 $p_i^2\le n<p_{i+1}^2$ 的限制下，去模 p($p\le\sqrt{n}$)的两个同余类（含余 0 的同余类）；双生素数猜想是去模 p($p\le\sqrt{n}$)的一个或两个同余类（含余 0 的同余类）；哥

德巴赫猜想是去模 p($p \le \sqrt{n}$)的一个或两个同余类（含余 0 的同余类）；四生素数猜想是去模 p($p \le \sqrt{n}$)的不大于四个同余类（含余 0 的同余类）；k 生素数猜想是去模 p($p \le \sqrt{n}$)的不大于 k 个同余类（含余 0 的同余类）；所以有推论 2

推论 2： 不大于 n 的孪生素数(p,p+2)个数 L(n)

$$L(n) > \frac{e^{\gamma}}{2} \cdot \frac{n}{2} \prod_{3 \le p \le \sqrt{n}} (1 - \frac{2}{p})$$

不大于 n 的双生素数(p,p+a)个数 Sh(n)

$$Sh(n) > \frac{e^{\gamma}}{2} \cdot \frac{n}{2} \prod_{3 \le p \le \sqrt{n}} (1 - \frac{2}{p}) \cdot \prod_{p|a} \frac{p-1}{p-2}$$

2n= $p_u + p_v$ 的哥德巴赫猜想解个数 G(2n)

$$G(n) > \frac{e^{\gamma}}{2} \cdot \frac{n}{2} \prod_{3 \le p \le \sqrt{n}} (1 - \frac{2}{p}) \cdot \prod_{p|n} \frac{p-1}{p-2}$$

不大于 n 的四生素数(p,p+2,p+6,p+8)个数 S(n)

$$S(n) > \frac{e^{\gamma}}{2} \cdot \frac{n}{2 \times 3} \prod_{5 \le p \le \sqrt{n}} (1 - \frac{4}{p})$$

不大于 n 的 k 生素数个数 K(n)

$$K(n) > \frac{e^{\gamma}}{2} \cdot \prod_{p \le k} \frac{1}{p} \prod_{k < p \le \sqrt{n}} (1 - \frac{k}{p})$$

还可以得下面的推论 3

推论 3：若一个一元整式的值中有两个素数，那么这个整式的值中有无数个素数。