中国科学院大学
2013 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等数学（丙）

考生须知：

1．本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。

2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、选择题 (本题满分 40 分，每小题 5 分。请从每个题目所列的四个选项中选择一个适合放在空格中的项，并将你的选择标清题号写在考场发的答题纸上，直接填写在试题上无效。每题的四个备选项中只有一个是正确的，不选、错选或多选均不得分。)

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n})=$（　　　　）。

（A） 0　　　（B）1　　　（C）$\frac{1}{2}$　　　（D）$\frac{1}{3}$

2. 函数 $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{x(x-1)}$ 的可去间断点为（　　　　）。

(A) $x=0$ 和 1　　（B） $x=0$　　（C） $x=1$　　（D）无可去间断点

3．设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，欲使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有（　　　　）。

（A） $f'(0)=0$　　（B） $f(0)=0$　　(C) $f(0)+f'(0)=0$　　(D) $f(0)-f'(0)=0$

4. 设 a 是正实数，则 $\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]\sin xdx=$（　　　　）。

（A）0　　（B）π　　(C) $2f(a)$　　(D) $[f(a)+f(-a)]\sin a$

5. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}n+6^n a}{6^n n}$ 收敛，则 a 的取值为（　　　　）。

（A） 小于 0　　（B）大于 0　　（C）等于 0　　（D）任意实数

6. 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处的偏导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 和 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ 都存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点（　　　　　）。

（A）连续且可微　　　　　　（B）连续但不一定可微

（C）可微但不一定连续　　　（D）不一定可微也不一定连续

7．设 A、B 均为 3 阶矩阵，且行列式 $|A|=2$，$|B|=-3$，则行列式 $|(\frac{1}{2}A)^{-1}B^T|=$（　　　　　）。

（A）-12　　（B）-6　　（C）6　　（D）12

8. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&1&3\end{pmatrix}$，$C=AB^{-1}$，则矩阵 C^{-1} 中，第 3 行第 2 列的元素是（　　　　　）。

（A）$\dfrac{1}{3}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）1　　（D）$\dfrac{3}{2}$

二、**(本题满分 10 分)** 设 $u=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$，求二阶导数 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 及其在 $x=2, y=\dfrac{1}{\pi}$ 处的值。

三、**(本题满分 10 分)** 当 $x\to 0$ 时，$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f'(t)dt$ 的导数与 x^2 为等价无穷小。求 $f'(0)$。

四、**(本题满分 10 分)** 计算二重积分 $\iint\limits_D |y-x^2|\,dxdy$，其中积分区域 D 为正方形区域 $|x|\le 1, 0\le y\le 2$。

五、**(本题满分 10 分)** 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n+1}$ 的收敛域及和函数。

六、**(本题满分 10 分)** 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且满足

$$f(t)=2\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}(x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy+t^4,$$

求 $f(x)$ 的解析表达式。

七、**(本题满分 10 分)** 求微分方程 $y''+y'=2x^2+1$ 的通解。

八、(本题满分 10 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}(1,-1,0)$，$B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&x&1\\-1&3&0\end{pmatrix}$，且矩阵 $AB+B$ 的秩为 2，求 x 的值。

九、(本题满分 10 分) 设 n 维向量 α_1，α_2 α_3 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系。证明：（1）向量组 α_1，$\alpha_1+\alpha_2$ $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 线性无关；（2）这组向量也是该方程组的基础解系。

十、(本题满分 10 分) 设列向量 $\alpha=(1,3,2)^{\mathrm{T}}, \beta=(1,-1,2)^{T}$，矩阵 $A=\alpha\beta^{T}$，且矩阵 B 与 A 相似。求 $2B+E$ 的伴随矩阵 $(2B+E)^{*}$ 的全部特征值（此处 E 表示三阶单位矩阵）。

十一、(本题满分 10 分) 过抛物线 $y=x^2$ 上一点 (a,a^2) 作切线($a>0$)，问 a 为何值时所作切线与抛物线 $y=-x^2+4x-1$ 所围成的图形面积最小？

十二、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且对于 (a,b) 内的一切 x 均有 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0$ 。证明：若 $f(x)$ 在 (a,b) 内有两个零点，则介于这两个零点之间， $g(x)$ 至少有一个零点。