第五章

狭义相对论

5.6 相对论力学

$v << c$的情况

牛顿力学具有伽利略协变性

v 趋近光速时

牛顿力学的方程一般不满足洛伦兹变换

可以在相对论时空理论下加以修正。

本节任务主要讨论相对论条件下的力学方程的协变性

一、能量—动量四维矢量（简称为4维动量）

1. 经典力学中的牛顿第二定律:

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}\xrightarrow[\vec{p}=m\vec{v}]{\text{伽利略变换}}\vec{F}'=\frac{d\vec{p}'}{dt'}$$

$\vec{p}$，$\vec{F}$ 不是洛伦兹协变量

2、用四维速度定义四维动量

已知四维速度矢量

$$U_\mu=\frac{dx_\mu}{d\tau}=\gamma\frac{dx_\mu}{dt}$$

$$\begin{cases} dt=\dfrac{d\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma d\tau \\ v_i=\dfrac{dx_i}{dt}\quad(i=1,2,3) \end{cases}$$

假定物体相对参考系静止时的质量为m_0，它是一个洛伦兹标量（不变量）。

定义四维动量: $\boxed{p_\mu = m_0 U_\mu}$

$$p_i = \gamma m_0 v_i \left(i = 1-3\right)$$

$$p_4 = ic\gamma m_0 = \frac{i}{c}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

3、引入运动质量 $\boxed{m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$ ⟵ 相对论的质速关系

$$p_i = mv_i \Rightarrow \vec{p} = m\vec{v}$$

四维动量前三分量与经典动量形式上一致

$$p_4 = \frac{i}{c}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{i}{c}[m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \ldots\ldots]$$

设 $W = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 物体的能量 $W = mc^2$ $\Rightarrow$ $p_4 = \dfrac{i}{c}W$

$$\boxed{p_\mu = (\vec{p},\ \frac{i}{c}W)}$$

四维动量又称为能量—动量四维矢量（相对论协变量）

4、静止能量与动能

当 $v=0$ 时，物体相对静止，定义此时动能 $T=0$

$W=W_0=m_0c^2$ 称为静止能量 （经典力学中不存在）

$v\neq 0$ 时，物体具有的能量为 $W=mc^2$

$$T=W-W_0=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-m_0c^2=(m-m_0)c^2$$

物体的动能

$$T=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-m_0c^2=\frac{1}{2}m_0v^2+\frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2}+.....$$

$v\ll c,\ T\approx\frac{1}{2}m_0v^2$

$W=mc^2$ 称为质能关系

5、能量、动量和质量间的关系式

$$p_\mu p_\mu = \vec{p}^2 + (\frac{i}{c}W)^2 = \vec{p}^2 - \frac{W^2}{c^2}$$

四维动量的点乘是洛伦兹标量

设$\Sigma': p' = 0,\ W' = m_0 c^2 \Rightarrow p'_\mu p'_\mu = \vec{p}'^2 - \frac{W'^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 = p_\mu p_\mu$

$$\vec{p}^2 - \frac{W^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \Longrightarrow \boxed{W = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}}$$

对于光子：由于光速相对任何系均为C，假定无静止质量，即

$$m_0 = 0 \Rightarrow W = pc \Rightarrow p = \frac{W}{c}$$

从量子论知光子能量、动量为 $W = \hbar\omega,\ \vec{p} = \hbar\vec{k}\ \ (p = \frac{\hbar\omega}{c})$

二、关于质能关系的讨论 $W = mc^2 (W_0 = m_0 c^2)$

1、质能关系的意义

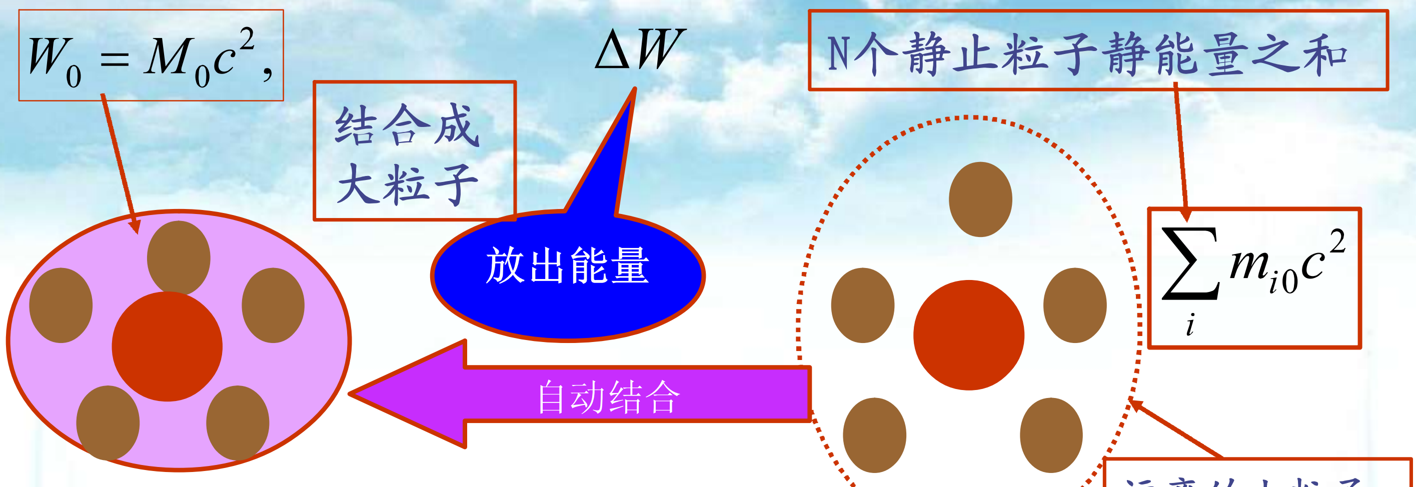
(1) 它反映了作为惯性量度的质量与作为运动强度量度的能量间的关系。

(2) 它揭示静止物体（如粒子）内部仍然存在运动。一定质量的粒子具有一定的内部运动能量.

(3) 在物质反应（如核反应）或转变过程中，物质存在方式与运动形式均发生变化，在转化过程中可以释放大量能量。

例如：正负电子对→光子，电子静止质量转化为光子场的运动质量，正负电子对内部能（或静止能）转化为光子场能。

2、结合能与质量亏损



定义结合能 $$\Delta W = \sum_i m_{i0} c^2 - W_0$$

定义质量亏损 $$\Delta M = \sum_i m_{i0} - M_0$$ $\longrightarrow$ $M_0 \neq \sum_i m_{i0},$

$$\Delta W = \sum_i m_{i0} c^2 - M_0 c^2 = \left(\sum_i m_{i0} - M_0\right) c^2 = \Delta M c^2$$

$\Delta W > 0$ 自动结合（体系稳定），称为结合能（吸能反应）

$\Delta W < 0$ 自动分裂（体系不稳定），发生衰变

$\Delta W = \Delta MC^2$ 在原子核和基本粒子等物理实验中被证实.

例如当一个质子与一个中子结合成一个氘核时，质量亏损为

$$\Delta M = 3.9657 \times 10^{-30} kg$$

相应的结合能为 $\Delta W = \Delta M c^2 = 3.5642 \times 10^{-13} J$

例题：带电 π介子衰变为μ子和中微子ν

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$$

各粒子静止质量为：m_π=139.57 MeV/c^2，m_μ=105.66 MeV/c^2。求在 π介子的质心系中，μ子的动量、能量和速度。

有关说明:

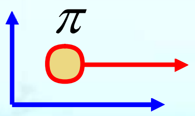
1.微观粒子能量单位常用 MeV，质量单位常用 MeV/c^2，动量单位常用MeV/c。

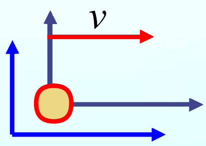
$$1MeV = 1.602189\times10^{-13}J, \qquad 1MeV/c^2 = 1.782676\times10^{-30}kg$$

2.电子静止质量：$m_e = 0.5110034(\pm0.0000014)MeV/c^2$

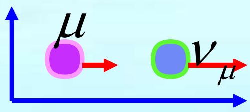
3.质心参照系与实验室参照系

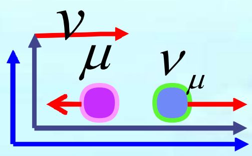
反应前：

实系 

质系 

反应后：

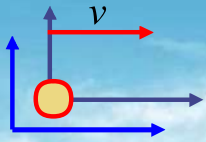
实系 

质系 

在质心系中反应前： π 介子的动量和能量

$$\vec{p}_{(\pi)}=0,\quad W_{(\pi)}=m_\pi c^2$$

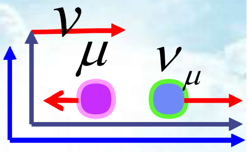
质系



在质心系中反应后： μ 子和中微子的能量分别为

$$W_{(\mu)}=\sqrt{p_{(\mu)}^2c^2+m_\mu^2c^4},\qquad W_{(\nu)}=p_{(\nu)}c$$

质系



动量守恒 → $\vec{p}_{(\mu)}+\vec{p}_{(\nu)}=0$ → $p=\left|\vec{p}_{(\mu)}\right|=\left|\vec{p}_{(\nu)}\right|$

$W_{(\mu)}+W_{(\nu)}=W_{(\pi)}$ ← 能量守恒

$$\sqrt{p_{(\mu)}^2c^2+m_\mu^2c^4}+p_{(\nu)}c=m_\pi c^2$$

$$p=\frac{m_\pi^2-m_\mu^2}{2m_\pi}c=29.79MeV/c$$

m_π=139.57 MeV/c^2

m_μ=105.66 MeV/c^2

$$W_{(\mu)}=W_{(\pi)}-W_{(\nu)}=m_\pi c^2-pc=\frac{m_\pi^2+m_\mu^2}{2m_\pi}c=109.78MeV$$

$$W_{(\mu)}=\frac{m_\mu c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

可解得 μ子的速度 $v=0.2714c$

三 、相对论力学方程

1. 定义四维力 $\boxed{K_\mu = \dfrac{dp_\mu}{d\tau}}$

前三个分量 $\vec{K} = \dfrac{d\vec{p}}{d\tau}$

k_4 的表示式

而 $K_4 = \dfrac{dp_4}{d\tau} = \dfrac{i}{c}\dfrac{dW}{d\tau}$

$$\because \quad \vec{p}^2 - \frac{W^2}{c^2} = -m_0^2c^2$$

$$\Downarrow$$

$$2\vec{p}\cdot d\vec{p} - \frac{2WdW}{c^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$dW = \frac{\vec{p}\cdot d\vec{p}}{m}(W = mc^2)$$

$$\Downarrow$$

$$= \vec{v}\cdot d\vec{p}\left(\vec{p} = m\vec{v}\right)$$

$$\therefore K_4 = \frac{i}{c}\frac{\vec{v}\cdot d\vec{p}}{d\tau} = \frac{i}{c}\vec{K}\cdot\vec{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{K}\cdot\vec{v} = \frac{dW}{d\tau}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{K_\mu = \left(\vec{K},\ \frac{i}{c}\vec{K}\cdot\vec{v}\right)}$$

4分量

2. 动力学方程

$$K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

空间分量 → $$\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$$ 与牛顿二定律对应

时间分量 → $$\frac{i}{c}\vec{K}\cdot\vec{v} = \frac{i}{c}\frac{dW}{d\tau}$$ 与功率对应

$$K_\mu = (\vec{K},\ \frac{i}{c}\vec{K}\cdot\vec{v})$$ ← 四维力矢量

三维力与四维力空间分量的对应关系 → $\vec{K} = \gamma\vec{F}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \sqrt{1-v^2/c^2}\,\vec{K}$$

$v << c,\ m \approx m_0$ ⇓ $\vec{K} \approx \vec{F}$

一般情况下: $$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a} + \vec{v}\frac{dm}{dt} \neq m\vec{a}$$

3、功率方程

由四维力矢量定义 → 得功率方程：

$$\vec{K}\cdot\vec{v}=\frac{dW}{d\tau} \rightarrow \gamma\vec{F}\cdot\vec{v}=\gamma\frac{dW}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{F}\cdot\vec{v}=\frac{dW}{dt}}$$

$$\vec{K}=\gamma\vec{F},\ d\tau=\frac{1}{\gamma}dt$$

$$W=mc^2$$

（1）方程在形式上一致，力、能量、动量、质量、时间等概念均与经典不同。

（2）能量含义与经典表示有很大区别（经典能量通常有一可加常数，相对论中 $W=mc^2$ 是物体的总能量）。

四、洛伦兹力公式

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix}$$

可用下式综合表示出来

$$\boxed{K_\mu = eF_{\mu\nu}U_\nu}$$

$$\boxed{\text{设} \quad \vec{v} = v\vec{e}_x}$$

$$\boxed{U_\mu = \gamma\,(v, 0, 0, ic)}$$

$$K_i = eF_{i\nu}U_\nu$$

$$K_4 = eF_{4\nu}U_\nu$$

$$\begin{cases} K_1 = eF_{1\nu}U_\nu = e(F_{11}U_1 + F_{12}U_2 + F_{13}U_3 + F_{14}U_4) = e\gamma E_1 \\ K_2 = eF_{2\nu}U_\nu = e(F_{21}U_1 + F_{22}U_2 + F_{23}U_3 + F_{24}U_4) = e\gamma(-vB_3 + E_2) \\ K_3 = eF_{3\nu}U_\nu = e(F_{31}U_1 + F_{32}U_2 + F_{33}U_3 + F_{34}U_4) = e\gamma(vB_2 + E_3) \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{K} = \gamma\vec{F} = e\gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}$$

$$\boxed{K_4 = \frac{i}{c}\vec{K} \cdot \vec{v}}$$

$$K_4 = eF_{4\nu}U_\nu = eF_{41}U_1 = e\frac{i}{c}E_1\gamma v = \frac{i}{c}e\gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}$$

$$\boxed{K_\mu = eF_{\mu\nu}U_\nu} \qquad \vec{\boldsymbol{F}} = e(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}})$$

$$\boxed{\vec{K} = \gamma \vec{F} = e\gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})} \qquad \boxed{K_4 = \frac{i}{c}\vec{K}\cdot\vec{v}}$$

$$K_\mu = \gamma_u\left(\vec{\boldsymbol{F}}, \frac{i}{c}\vec{K}\cdot\vec{u}\right) = e\gamma_u\left(\boldsymbol{E} + \vec{u}\times\vec{\boldsymbol{B}}, \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{u}\right)$$

运动的点电荷

对于洛仑兹力密度

$$\vec{f} = \rho(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{J} \times \vec{\boldsymbol{B}})$$

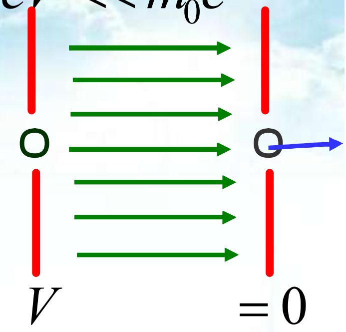
按上述类似的方法，可其四维形式表示为

$$\boxed{f_\mu = F_{\mu\nu}J_\nu}$$

$$\vec{f} = \rho_0\gamma(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{J} \times \vec{\boldsymbol{B}}) \qquad f_4 = \frac{i}{c}\vec{J}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}$$

举例:

1、 静质量为 m_0 ，电荷为e的粒子通过电势差为V的电场后，将获得多大速度？（设粒子初速度为零，并讨论 $eV << m_0c^2$ $eV >> m_0c^2$ 两种情况）



解：初始动能为零，总能 $W_{初} = m_0c^2 + eV$

末态势能为零，总能 $W_{末} = mc^2$

根据能量守恒：$eV + m_0c^2 = mc^2 = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1+\frac{eV}{m_0c^2})^2}} = \frac{c}{1+eV/m_0c^2}\sqrt{(1+\frac{eV}{m_0c^2})^2 - 1}$$

$$= c\sqrt{\frac{2eV}{m_0c^2} + (\frac{eV}{m_0c^2})^2} \Big/ (1 + eV/m_0c^2)$$

$$v=c\sqrt{\frac{2eV}{m_0c^2}}\sqrt{1+eV/2m_0c^2}\Big/\left(1+eV/m_0c^2\right)=\sqrt{\frac{2eV}{m_0}}\frac{\sqrt{1+eV/2m_0c^2}}{1+eV/m_0c^2}$$

当 $ev<<m_0c^2$，$v\approx\sqrt{\frac{2eV}{m_0}}\left(1-\frac{3}{4}\frac{eV}{m_0c^2}\right)$

$$\boxed{\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x,\quad \frac{1}{1+y}=1-y}$$

进一步近似 $v\approx\sqrt{\frac{2eV}{m_0}}$ 经典力学结果

当 $ev>>m_0c^2$，

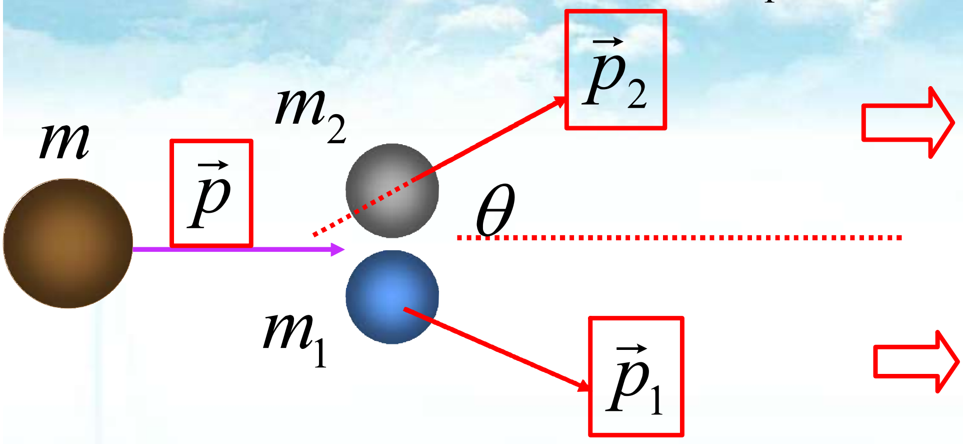
$$v=c\sqrt{1-\frac{1}{(\boxed{1}+\frac{eV}{m_0c^2})^2}}\approx c\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{eV}\right)^2}\approx c\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{m_0c^2}{eV}\right)^2\right]$$

去掉

从这里可以看出**v<c**总成立，当 $eV\to\infty$，$v\to c$

结论：不可能通过加速使物体运动速度大于光速。

2、已知质量为m，动量为 $\vec{p}$ 的粒子衰变为两个粒子。其中一个粒子质量为 m_2 ，动量为 $\vec{p}_2$，$\vec{p}$ 与 $\vec{p}_2$ 的夹角 θ 为已知，求另一粒子质量 m_1



解 $\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2$

$$\Rightarrow \vec{p}_1^{\,2}=\vec{p}^{\,2}+\vec{p}_2^{\,2}-2\vec{p}\cdot\vec{p}_2$$

$$W=W_1+W_2$$

$$\Rightarrow W_1^2=W^2+W_2^2-2WW_2$$

$$\vec{p}_1^{\,2}-\frac{W_1^2}{c^2}=\left(\vec{p}^{\,2}-\frac{W^2}{c^2}\right)+\left(\vec{p}_2^{\,2}-\frac{W_2^2}{c^2}\right)-2\left(\vec{p}\cdot\vec{p}_2-\frac{WW_2}{c^2}\right)$$

利用公式 $\vec{p}^2-\dfrac{W^2}{c^2}=-m_0^2c^2$ $\qquad W=\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}$

$$\vec{p}_1^2-\frac{W_1^2}{c^2}=\left(\vec{p}^2-\frac{W^2}{c^2}\right)+\left(\vec{p}_2^2-\frac{W_2^2}{c^2}\right)-2\left(\vec{p}\cdot\vec{p}_2-\frac{WW_2}{c^2}\right)$$

$$-m_1^2c^2=-m^2c^2-m_2^2c^2-2\left(pp_2\cos\theta-\frac{1}{c^2}\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}\sqrt{p_2^2c^2+m_2^2c^4}\right)$$

$$m_1^2=m^2+m_2^2+\frac{2}{c^2}\left(pp_2\cos\theta-\sqrt{p^2+m^2c^2}\sqrt{p_2^2+m_2^2c^2}\right)$$

注意：$m\neq m_1+m_2$，$m>m_1+m_2$，$\Delta m=(m_1+m_2)-m<0$

$$\boldsymbol{F} = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \qquad \gamma\boldsymbol{F} = e(\gamma_u \boldsymbol{E} + \gamma_u \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B})$$

$$k_\mu = \gamma_u \left(\boldsymbol{F}, \frac{i}{c} W \right) = \gamma_u \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}, \frac{i}{c} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{u} \right)$$

$$k_\mu = eF_{\mu\gamma} U_\gamma$$