第七章

带电粒子与电磁场的相互作用

7.1李纳-维谢尔势及其辐射场

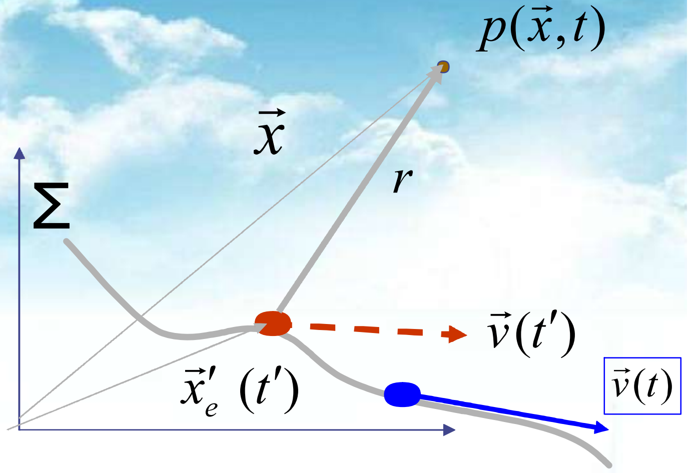
7.2 相对论性带电粒子的辐射

7.3带电粒子的电磁场对自身的反作用

7.4电磁波的散射和吸收

7.1李纳-维谢尔势及其辐射场

7.1.1李纳-维谢尔势



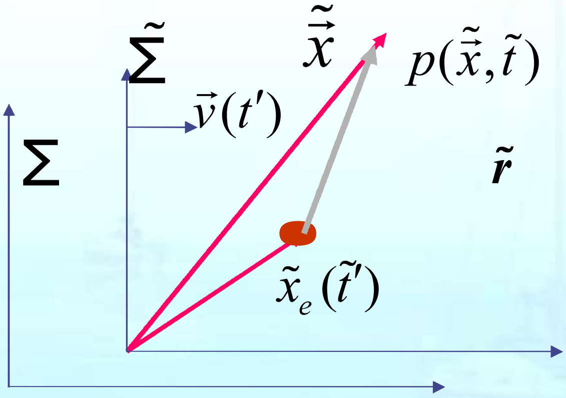
1.有关规定

在某一时刻 t' 选两个惯性参照系

Σ 为静系,粒子相对其运动,

$$r=\left|\vec{x}-\vec{x}_e(t')\right|=c(t-t')$$

$\tilde{\Sigma}$ 为动系,粒子在 t' 时刻相对其静止



$$\tilde{r}=\left|\tilde{\vec{x}}-\tilde{\vec{x}}_e(\tilde{t}')\right|$$

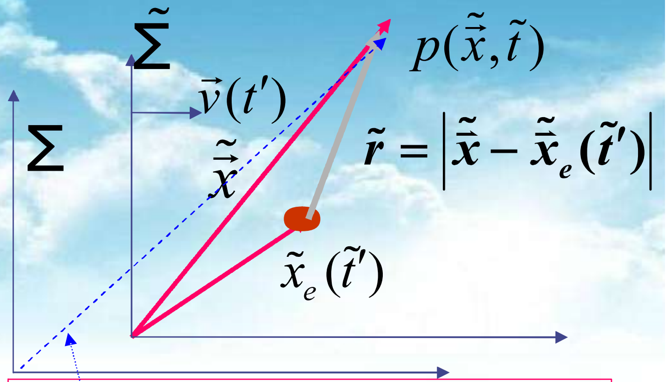
~ 此波浪符号表示在静系的量

动系的量不加波浪号

2.求解过程

$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{j}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}d\tau'$$



$$\boxed{r=\left|\vec{x}-\vec{x}_e(t')\right|=c(t-t')}$$

$\tilde{\Sigma}$ 为动系,粒子相对其静止，其上所测势为静势

$$\tilde{\varphi}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0\tilde{r}},\quad \tilde{\vec{A}}=0 \qquad \tilde{r}=c(\tilde{t}-\tilde{t}')$$

$$\boxed{\tilde{r}}=c(\tilde{t}-\tilde{t}')=c\frac{(t-t')-\frac{\vec{v}}{c^2}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_e)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\boxed{\frac{r-\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

采用洛仑兹变换（反变换），把动系的势变换到静系中来

动系的势

$$\tilde{\varphi} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \tilde{r}},$$

$$\tilde{\tilde{A}} = 0$$

静系与动系势的变换关系

$$\begin{cases} A_x = \dfrac{\tilde{A}_x + \dfrac{v}{c^2}\tilde{\varphi}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{\dfrac{v}{c^2}\tilde{\varphi}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ A_y = \tilde{A}_y = 0 \\ A_z = \tilde{A}_z = 0 \\ \varphi = \dfrac{\tilde{\varphi} + v\tilde{A}_x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{\tilde{\varphi}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

动系与静系的坐标关系

$$\tilde{r} = \frac{r - \dfrac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

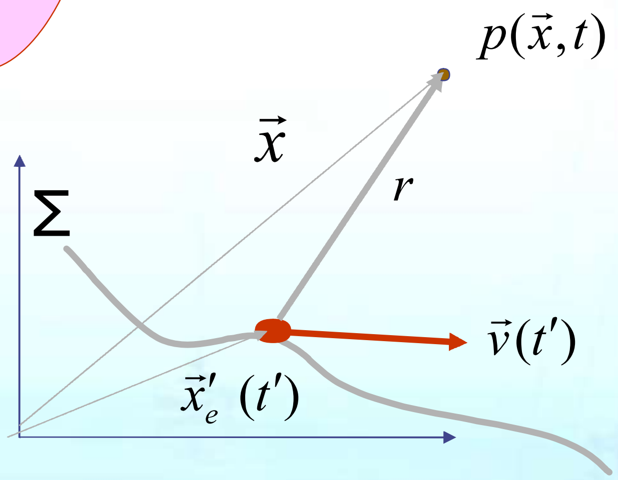
$$\vec{A} = \frac{\frac{\vec{v}}{c^2}\tilde{\varphi}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad \varphi = \frac{\tilde{\varphi}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\tilde{\varphi} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \tilde{r}},$$

$$\tilde{r} = \frac{r - \frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\begin{cases} \vec{A} = \dfrac{e\vec{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 (r - \frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r})} \\ \varphi = \dfrac{\tilde{\varphi}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 (r - \frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r})} \end{cases}$$

李纳—维谢尔势



注：上式右边各量都是在时刻***t'= t - r/c***上取值，如***v =v(t')***，***r =x-x***

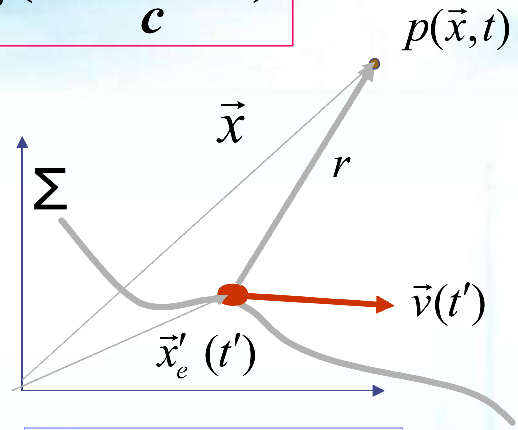
由此势可求出电场和磁场

3.求辐射场的导数表示

$$\vec{A}=\frac{e\vec{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2\left(r-\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r}\right)} \qquad \varphi=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0\left(r-\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r}\right)}$$

$$\vec{v}=\vec{v}(t')$$

$$\vec{E}(\vec{x},t)=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B}(\vec{x},t)=\nabla\times\vec{A}$$



$$r=\left|\vec{x}-\vec{x}_e(t')\right|$$

$\vec{x},t$ 为场点的独立空时坐标自变量，

$$t'=t-\frac{r}{c}=t-\frac{\sqrt{\left[\vec{x}-\vec{x}_e(t')\right]^2}}{c}$$

t' 为中间变量，其中隐含有 $\vec{x},t$

求导应注意：

$$\vec{r}=\boxed{\vec{x}}-\boxed{\vec{x}_e(t')}$$

要分别考虑两种x引起的空间变化率

$$r = \left|\vec{x} - \vec{x}_e(t')\right|$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} - \nabla\varphi\Big|_{\vec{x}_e(t')=\text{常数}} - \nabla\varphi\Big|_{\vec{x}=\text{常数}}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} - \nabla\varphi\Big|_{t'=\text{常数}} - \frac{\partial\varphi}{\partial t'}\nabla t'}$$

其中导数关系为：

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \nabla\times\vec{A}\Big|_{\vec{x}_e(t')\text{不变}} + \nabla\times\vec{A}\Big|_{\vec{x}\text{不变}}$$

$$\boxed{\vec{B} = \nabla\times\vec{A}\Big|_{t'\text{不变}} + \nabla t'\times\frac{\partial \vec{A}}{\partial t'}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial t'}{\partial t} &= \frac{1}{1-\dfrac{\vec{v}\cdot\hat{\vec{n}}}{c}}\\ \nabla t' &= -\frac{\hat{\vec{n}}}{c\left(1-\dfrac{\vec{v}\cdot\hat{\vec{n}}}{c}\right)}\end{aligned}}$$

此式证明见下页

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(t-\frac{r}{c})=1-\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial t}$$

$$\boxed{t'=t-\frac{r}{c}}$$

$$\boxed{r^2=\left[\vec{x}-\vec{x}_e(t')\right]^2}$$

$$=1-\frac{1}{c}\frac{\partial r(t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$2r\frac{\partial r(t')}{\partial t'}=2\vec{r}(t')\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\left[\vec{x}-\vec{x}_e(t')\right]$$

$$=-2\vec{r}(t')\cdot\frac{\partial \vec{x}_e(t')}{\partial t'}$$

$$=-2\vec{r}(t')\cdot\vec{v}(t')$$

$$\boxed{\frac{\partial r(t')}{\partial t'}=-\frac{\vec{r}(t')\cdot\vec{v}(t')}{r}}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=1-\frac{1}{c}\left[-\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{v}(t')\right]\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$=1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{cr}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{cr}}=\frac{1}{1-\frac{\vec{v}\cdot\hat{\vec{n}}}{c}}}$$

$$t' = t - \frac{r}{c}$$

$$\frac{\partial r(t')}{\partial t'} = -\frac{\vec{r}(t')\cdot\vec{v}(t')}{r}$$

$$r = \sqrt{[\vec{x} - \vec{x}_e(t')]^2}$$

$$\nabla t' = \nabla(t - \frac{r}{c}) = -\frac{1}{c}\nabla r = -\frac{1}{c}\nabla r\Big|_{t'=\text{常数}} - \frac{1}{c}\nabla r\Big|_{\vec{x}=\text{常数}}$$

$$= -\frac{\vec{r}}{cr} - \frac{1}{c}\boxed{\frac{\partial r(t')}{\partial t'}}\nabla t' = -\frac{\vec{r}}{cr} + \boxed{\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{cr}}\nabla t'$$

$$\nabla t'(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{cr}) = -\frac{\vec{r}}{cr}$$

$$\nabla t' = \frac{-\frac{\vec{r}}{cr}}{1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{cr}} = -\frac{\hat{\vec{n}}}{c(1 - \frac{\vec{v}\cdot\hat{\vec{n}}}{c})}$$

7.1.2偶极辐射

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{cr}}=\frac{1}{1-\frac{\vec{v}\cdot\hat{\vec{n}}}{c}}$$

$$\nabla t'=\frac{-\frac{\vec{r}}{cr}}{1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{cr}}=-\frac{\hat{\vec{n}}}{c(1-\frac{\vec{v}\cdot\hat{\vec{n}}}{c})}$$

讨论低速运动粒子电磁辐射

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=1 \qquad v<<c \qquad \nabla t'=-\frac{\hat{\vec{n}}}{c}$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\Big|_{t'\text{不变}}+\nabla t'\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t'}$$

不计静磁场

$$\vec{B}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\dot{v}\times\vec{n}=\frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}$$

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}-\nabla\varphi\Big|_{t'=\text{常数}}-\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\nabla t'$$

不计为库仑场

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{v})$$

结论1：加速运动的粒子辐射电磁场

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\hat{\vec{n}}\times(\hat{\vec{n}}\times\dot{\vec{v}}) \\ \vec{B} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\dot{\vec{v}}\times\hat{\vec{n}} \end{cases}$$

令$p=ex_e$为带电粒子的电偶极矩，

$$\ddot{\vec{p}} = e\dot{\vec{v}}$$

辐射场表达式与电偶极辐射公式一致。

$$\vec{E} = \frac{e^{ikR}}{4\pi Rc^2\varepsilon_0}(\ddot{\vec{p}}\times\hat{\vec{n}})\times\hat{\vec{n}}$$

$$\vec{B} = \frac{e^{ikR}}{4\pi Rc^3\varepsilon_0}\ddot{\vec{p}}\times\hat{\vec{n}}$$

$$\langle\vec{S}\rangle = \bar{\vec{S}} = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2}\sin^2\theta\hat{\vec{n}}$$

$$\bar{P} = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3};\quad \theta = (\hat{\vec{n}},\dot{\vec{v}})$$

结论**2**：辐射能流、辐射功率的特征与电偶极辐射相同。

结论**3**：低速运动的带电粒子当其加速时激发电偶极辐射。

7.1.3任意运动的带电粒子的辐射

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}\Big|_{t'\text{不变}} + \nabla t' \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t'}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} - \nabla \varphi\Big|_{t'=\text{常数}} - \frac{\partial \varphi}{\partial t'}\nabla t'$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{cr}} = \frac{1}{1 - \dfrac{\vec{v}\cdot\hat{\vec{n}}}{c}}$$

$$\nabla t' = \frac{-\dfrac{\vec{r}}{cr}}{1 - \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{cr}} = -\frac{\hat{\vec{n}}}{c\left(1 - \dfrac{\vec{v}\cdot\hat{\vec{n}}}{c}\right)}$$

1.处理方法

运算忽略**r**平方反比项,保留与**r**成反比的项,计算出辐射场

$1/r$ 为一级小量;

$1/r^2$ 为二级小量，在运算进程中略去不计。

2.计算结果数学表达式

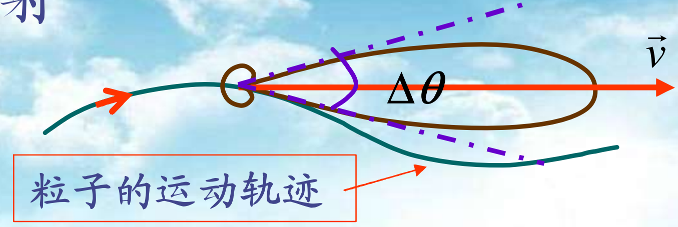
$$
\begin{cases}
\vec{E} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{(1-\dfrac{v^2}{c^2})(\hat{\vec{n}}-\dfrac{\vec{v}}{c})}{(1-\dfrac{\vec{v}\cdot\hat{\vec{n}}}{c})^3} + \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\dfrac{\hat{\vec{n}}\times\left[(\hat{\vec{n}}-\dfrac{\vec{v}}{c})\times\dot{\vec{v}}\right]}{(1-\dfrac{\vec{v}\cdot\hat{\vec{n}}}{c})^3} \\
\vec{B} = \dfrac{1}{c}\hat{\vec{n}}\times\vec{E}
\end{cases}
$$

3.有关结论

带电粒子加速时,有电磁波辐射,辐射场是横向的,辐射与与r成反比,辐射能流与r成平方反比.

7.2相对论性带电粒子的辐射

高速运动的带电粒子其辐射具有很强的方向性，辐射能量主要集中在前进方向近域的小角度范围内。



可将其分为两种特殊情况----速度与加速度平行及垂直，进行讨论，。

7.2.1.轫致辐射

$$(v \sim c, \dot{\vec{v}} // \vec{v})$$

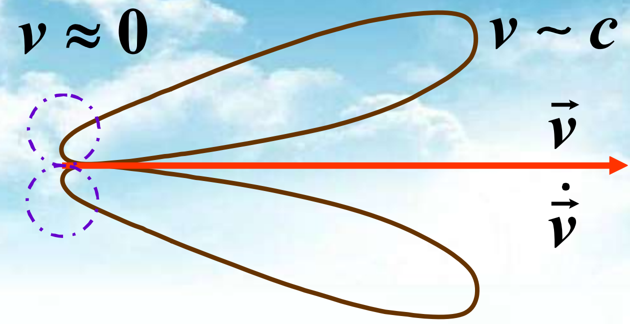
定义：带电粒子在直线加速或减速过程中产生的辐射。

如带电粒子入射到物质靶上和靶内原子中的电子和原子核碰撞时，在减速过程中产生的辐射主要是轫致辐射。

电子直线加速器中产生的电磁辐射也是是轫致辐射。

韧致辐射功率角分布图

线性运动的粒子辐射能量与粒子自身的能量无关



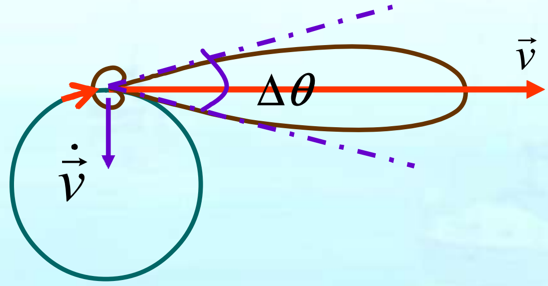
7.2.2.同步加速辐射 $(v \sim c, \dot{\vec{v}} \perp \vec{v})$

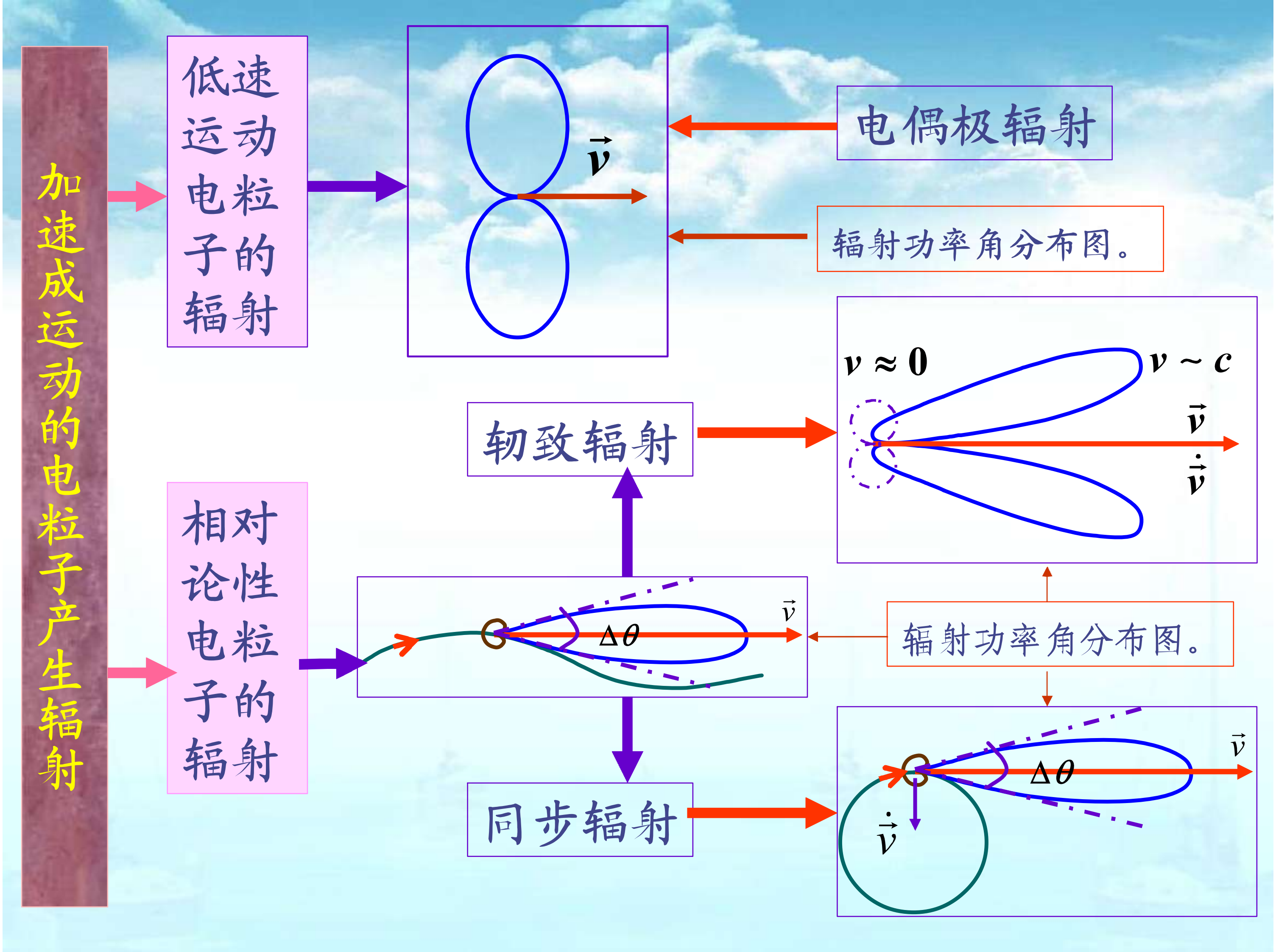
带电粒子作圆周运动时速度与加速度总是互相垂直，此时粒子发出的辐射称为同步加速辐射。

例如：粒子 在磁场高速运动会产生同步辐射。

同步辐射功率角分布图

圆周运动的粒子辐射能量与粒子能量平方成正比.




加速成运动的电粒子产生辐射
低速运动电粒子的辐射
$\vec{v}$
电偶极辐射
辐射功率角分布图。
韧致辐射
$v \approx 0$
$v \sim c$
$\vec{v}$
$\dot{\vec{v}}$
相对论性电粒子的辐射
$\Delta\theta$
$\vec{v}$
辐射功率角分布图。
同步辐射
$\Delta\theta$
$\vec{v}$
$\dot{\vec{v}}$