第五章

狭义相对论

5.4相对论理论的四维形式

洛伦兹变换是一种关于时间与空间的线性变换，它体现了四维时空的变换关系。

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y' = y, \quad z' = z \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

时空本质上是四维的：3维空间+1维时间。

关于洛伦兹变换需要进一步回答的问题

1. 变换的特征是什么？

2. 物理量在坐标变换下怎样变换？

3. 物理规律的方程在坐标变换下怎样变换？

5.4.1、空间的正交变换

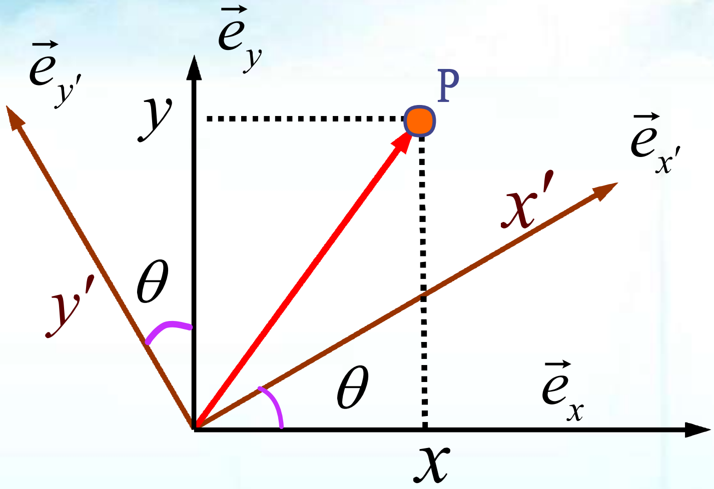
1、二维平面上坐标系的转动变换

$$\vec{P}=(x\vec{e}_x+y\vec{e}_y)$$

$$\vec{P}=(x'\vec{e}_{x'}+y'\vec{e}_{y'})$$

P点的转动变换满足

$$\begin{aligned}x'=\vec{P}\cdot\vec{e}_{x'}&=(x\vec{e}_x+y\vec{e}_y)\cdot\vec{e}_{x'}\\&=x\vec{e}_x\cdot\vec{e}_{x'}+y\vec{e}_y\cdot\vec{e}_{x'}\\&=x\cos\theta+y\sin\theta\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}y'=\vec{P}\cdot\vec{e}_{y'}&=(x\vec{e}_x+y\vec{e}_y)\cdot\vec{e}_{y'}\\&=x\vec{e}_x\cdot\vec{e}_{y'}+y\vec{e}_y\cdot\vec{e}_{y'}\\&=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{cases}x'=x\cos\theta+y\sin\theta\\y'=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases}$$

$$x^2+y^2=x'^2+y'^2$$

二维空间的转动变换为一正交变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

正交变换条件

$$\tilde{a}a = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a\tilde{a} = I$$

2、三维空间坐标转动变换

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j} \quad (i = 1, 2, 3)$$

不变量 $\sum_{i=1}^{3} x_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{3} x_i'^{2}$

3. 量在坐标旋转变换下的表示

1). 矢量变换的数学表示

$$\vec{x}' = a\vec{x}$$

$$\boxed{x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j}$$

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2). 正交变换条件

$$\tilde{a}a = a\tilde{a} = I$$

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}}$$

坐标转动变换为正交变换

3）. 二阶张量的变换

$$\vec{x}\vec{x} = \sum_{ij} x_i x_j \vec{e}_i \vec{e}_j$$

满足此关系称之为二阶张量。

$$x_i' x_j' = \sum_k a_{ik} x_k \sum_l a_{jl} x_l$$

$$= \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} x_k x_l$$

$$T_{ij}' = \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} T_{kl}$$

并矢为二阶张量。

张量的阶数与自由指标对应。

$$\begin{cases} \text{标量} & (0\text{个自由指标}) & 3^{0} & 1\text{个分量} \\ \text{矢量} & (1\text{个自由指标}) & 3^{1} & 3\text{个分量} \\ \text{二阶张量} & (2\text{个自由指标}) & 3^{2} & 9\text{个分量} \end{cases}$$

n阶张量(n个自由指标) 3^{n} 3^{n}个分量

物理量的特点可按其遵守的正交变换关系来分类

标量	$u' = u$	不含变换系数(0阶张量)
矢量	$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j$	一个变换系数(1阶张量)
二阶张量	$A'_{ij} = \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} A_{kl}$	二个变换系数(2阶张量)

4. 爱因斯坦求和符号约定

在一个数学积式里有重复的下标称为哑指标

在一个数学积式里无重复的下标称为自由指标

i为自由指标，j为哑指标.

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \quad \Longleftrightarrow \quad x_i' = a_{ij} x_j \cdots (1)$$

哑指标求和，自由指标不求和 $(x_i' = a_{ik} x_k = a_{il} x_l)$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{3} x_i'^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_i x_i = x_i' x_i' \cdots (2)$$

$$T_{ij}' = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} T_{kl} \quad \Longleftrightarrow \quad T_{ij}' = a_{ik} a_{jl} T_{kl}$$

5.4.2洛伦兹变换的四维形式

1)、四维时空中的转动变换（三维情况的推广）

转动中的不变量: $x'_\mu x'_\mu = x_\nu x_\nu \quad (\mu, \nu = 1--4)$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \Leftrightarrow \sum_{\mu=1}^{4} x'_\mu x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} x_\nu x_\nu$$

英文小写字母 i, j, k, l, m, n, … 代表1—3

希腊小写字母 μ, ν, λ, σ, τ, κ, … 代表1—4

坐标变换表示式: $x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$

正交条件为: $a_{\mu\sigma} a_{\mu\lambda} = \delta_{\sigma\lambda} \Leftrightarrow \tilde{a}a = a\tilde{a} = I$

引入参数: $\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} \qquad \beta = \dfrac{v}{c}$

2)、洛伦兹变换为复四维空间的转动变换

与转动变换不变量表示形式不同

洛伦兹变换下间隔为不变量，即：

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2t'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2$$

定义：$x_4 = ict$，　$x_4' = ict'$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \Leftrightarrow x_\mu' x_\mu' = x_\nu x_\nu$$

因此它为复四维空间$(x_1, x_2, x_3, x_4 = ict)$的“转动”变换

该空间又称为闵可夫斯基空间（1907年）。

$$x_1' = \gamma(x_1 - vt) = \gamma x_1 - \gamma\frac{v}{c}\frac{ict}{i} = \gamma x_1 + i\beta\gamma x_4 \qquad x_2' = x_2,\ x_3' = x_3$$

$$x_4' = ict' = ic\gamma(t - \frac{v}{c^2}x_1) = \gamma x_4 - i\beta\gamma x_1 = -i\beta\gamma x_1 + \gamma x_4$$

$$x_1' = \gamma x_1 + i\beta\gamma x_4 \qquad x_2' = x_2,\ \ x_3' = x_3 \qquad x_4' = -i\beta\gamma x_1 + \gamma x_4$$

$$x_\mu' = a_{\mu\nu}x_\nu = a_{\mu 1}x_1 + a_{\mu 2}x_2 + a_{\mu 3}x_3 + a_{\mu 4}x_4$$

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4$$
$$x_1' = \gamma x_1 + 0x_2 + 0x_3 + i\beta\gamma x_4$$

$$a_{11} = \gamma, \quad a_{12} = 0$$
$$a_{13} = 0 \quad a_{14} = i\beta\gamma$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4$$
$$x_2' = 0\ x_1 + 1\ x_2 + 0\ x_3 + 0\ x_4$$

$$a_{21} = 0, \quad a_{22} = 1$$
$$a_{23} = 0 \quad a_{24} = 0$$

同理可得

$$a_{31} = 0, \quad a_{32} = 0$$
$$a_{33} = 1 \quad a_{34} = 0$$

$$a_{41} = \gamma, \quad a_{42} = 0$$
$$a_{43} = 0 \quad a_{44} = -i\beta\gamma$$

$$a_{11}=\gamma,\quad a_{12}=0$$
$$a_{13}=0\quad a_{14}=i\beta\gamma$$

$$a_{21}=0,\quad a_{22}=1$$
$$a_{23}=0\quad a_{24}=0$$

$$a_{31}=0,\quad a_{32}=0$$
$$a_{33}=1\quad a_{34}=0$$

$$a_{41}=\gamma,\quad a_{42}=0$$
$$a_{43}=0\quad a_{44}=-i\beta\gamma$$

$$(x'=ax)$$

由逆变换式可得

$$(x=a^{-1}x')$$

$$a=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$$

$$a^{-1}=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$$

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \tilde{a}$$

$$\therefore \quad \tilde{a}a = I \qquad a_{\mu\gamma}a_{\mu\lambda} = \delta_{\gamma\lambda}$$

即洛仑兹变换为四维时空正交变换

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$(x' = ax) \quad x_\mu' = a_{\mu\nu}x_\nu$$

$$(x = a^{-1}x' = \tilde{a}x')$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}$$

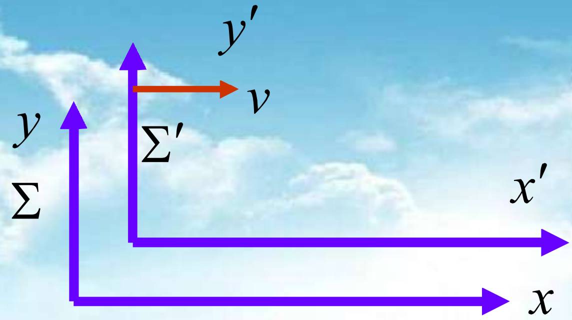
$$x_\lambda = a^{-1}{}_{\lambda\mu}x_\mu' = \tilde{a}_{\lambda\mu}x_\mu'$$

$$= a_{\mu\lambda}x_\mu'$$

$$x_1' = \gamma(x_1 - vt)$$

$$x_2' = x_2,\ \ x_3' = x_3$$

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x_1)$$

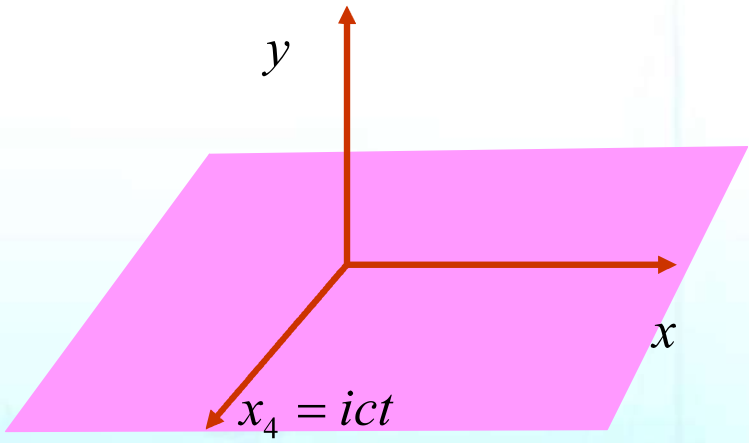


三维平动

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$(x' = ax) \qquad x_\mu' = a_{\mu\nu}x_\nu$$

$$\tilde{a}a = I \qquad a_{\mu\gamma}a_{\mu\lambda} = \delta_{\gamma\lambda}$$



四维转动

1维世界，生活在一条线上，线状“生物”
2维世界，生活在二维面上，板片状“生物”
3维世界，生活在三维体内，空间体“生物”
4维世界，生活在四维体内，4维“生物”

2维世界的事，1维生物无法理解;
3维世界的事，2维生物无法理解;
4维世界的事，3维生物无法理解。

狭义相对论中的很多现象，难以用经验进行类比。

5.4.3物理量的分类

在三维空间中，物理量有如下变换性质

标量 $u' = u$ 不含变换系数(0阶张量)

例如：例如：质量，电荷，空间距离。

矢量 $x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j$ 一个变换系数(1阶张量)

速度、加速度、力、电场强度、 ▽算符等

二阶张量 $A'_{ij} = \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} A_{kl}$ 二个变换系数(2阶张量)

例如：应力张量，电四极矩张量等。

运用四维变换式对物理量进行分类

$$a=\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

例如

$x_u=(\boldsymbol{x},ict)$满足变换为

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$$

所以 x_u 是四维矢量

协变性：在某种变换下方程形式保持不变的性质。

洛伦兹协变性：在洛伦兹变换下物理规律的数学方程保持不变的性质。

在洛伦兹变换下具有确定变换性质的物理量。这样的物理量统称为**四维协变量**。

5.4.4四维协变量

1、标量

洛伦兹标量：洛伦兹变换下保持不变的物理量

例如：电荷Q，时空间隔，固有长度，固有时间隔，静止质量m_0

固有时间隔$d\tau$为标量

讨论同一地点发生的两件事

标量

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \Rightarrow d\tau = \frac{ds}{c}$$

标量

时间间隔dt 在洛仑兹变换下是一个可变量 $dt' \neq dt.$

2. 四维矢量 V_μ，

具有四个分量，在洛伦兹变换下与坐标变换形式相同。

$$\boxed{V'_\mu = a_{\mu\nu} V_\nu}$$

- 四维空间位移：dx_μ

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x'_\nu \Rightarrow dx'_\mu = a_{\mu\nu} dx_\nu \quad (dx_4 = icdt)$$

用固有时度量四维空间的位移可得四维速度

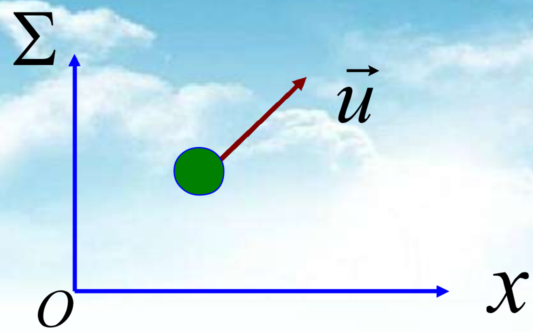
四维空间位移对四维标量时的导数

- 四维速度 $U_\mu = \dfrac{dx_\mu}{d\tau}$

变换关系 $dx'_\mu = a_{\mu\nu} dx_\nu$，$d\tau' = d\tau \Rightarrow U'_\mu = a_{\mu\nu} U_\nu$

四维速度与三维速度间的关系

令某物体沿Σ系正方向运动，它的三维速度大小为u，固有时为$d\tau$，Σ系上度量时间为dt ，



令 $$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

⇓

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma_u d\tau$$

⇓

$$u_i = \frac{dx_i}{dt} = \sqrt{1-u^2/c^2}\,\frac{dx_i}{d\tau}$$

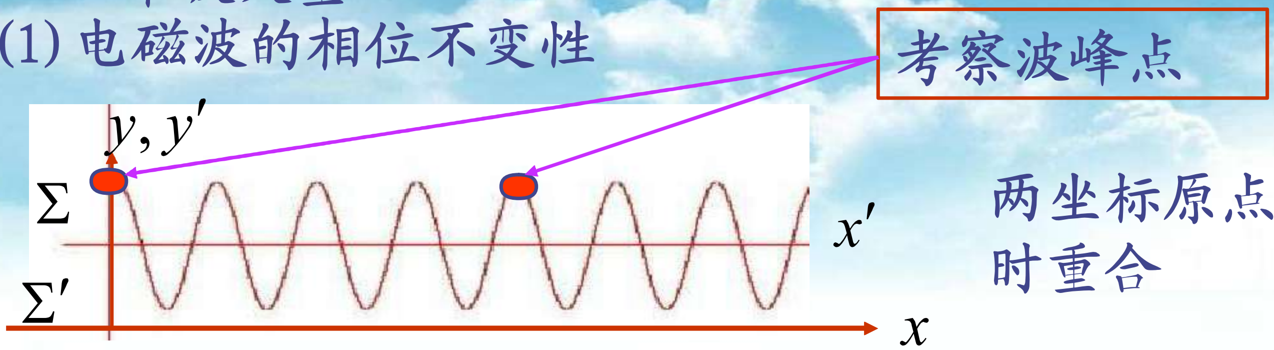
$$U_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \gamma_u u_i$$

$$U_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = ic\frac{dt}{d\tau} = ic\gamma_u$$

$$\boxed{U_\mu = \gamma_u(\vec{u}, ic)}$$

- 四维波矢量

(1) 电磁波的相位不变性



两坐标原点t=0时重合

$$\cos(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'-\omega' t')=\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)$$

$$\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'-\omega' t'=\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'-\omega t+2n\pi$$

$$t=0,\quad t'=0,\quad x'=x=0,\quad \therefore\quad n=0$$

$$\phi'=\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'-\omega' t'=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t=\phi \qquad \phi=\phi'$$

电磁波的相位具有不变性，为一四维标量

(2) 四维波矢量

$$\phi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + i\frac{\omega}{c} ict$$

$$\phi = \phi'$$

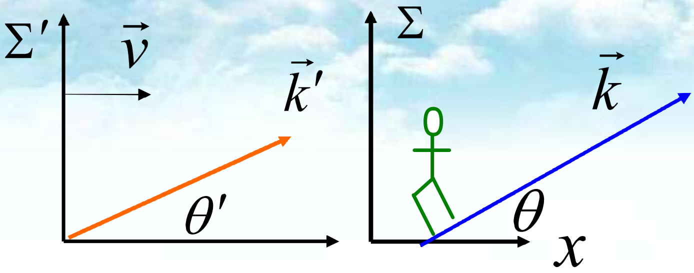
定义 $k_4 = i\frac{w}{c}$ $(x_4 = ict)$, $\Rightarrow$ $\boxed{k_\mu x_\mu = k'_\mu x'_\mu}$ 标量

四维矢 $x_\mu = (\vec{x}, ict)$ $\Rightarrow$ $k_\mu = (\vec{k}, i\frac{\omega}{c})$ 称为四维波矢量。

$k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$ 遵守洛仑兹变换

$$\begin{pmatrix} k'_x \\ k'_y \\ k'_z \\ i\frac{\omega}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ i\frac{\omega}{c} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} k'_x = \gamma(k_x - \frac{v}{c^2}\omega) \\ k'_y = k_y \\ k'_z = k_z \\ \omega' = \gamma(\omega - v k_x) \end{cases}$$

(3) 相对论多普勒效应



$$\omega' = \gamma(\omega - v k_x)$$

$$k'_y = k_y \qquad k'_z = k_z$$

$$k'_x = \gamma(k_x - \frac{v}{c^2}\omega)$$

$$\boxed{k_x = k\cos\theta = \frac{\omega}{c}\cos\theta}$$

设光源在Σ'系中静止，$\omega' = \omega_0$

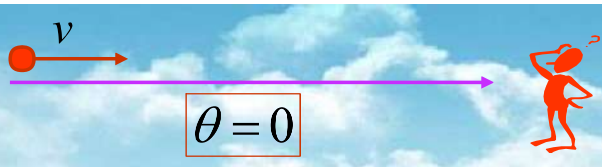
$$\omega' = \gamma(\omega - v k_x) = \gamma(\omega - \frac{v}{c}\omega\cos\theta)$$

在Σ系中静止观察者观测

$$\boxed{\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)}}$$

$$\omega=\frac{\omega_0}{\gamma(1-\frac{v}{c}\cos\theta)}$$

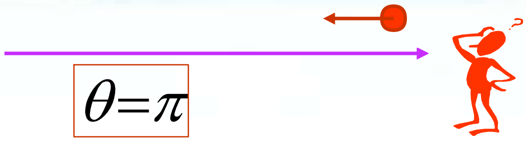
光源靠近观察者



$$\omega=\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-v/c}\omega_0=\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}\omega_0\quad(\omega>\omega_0)$$

蓝移

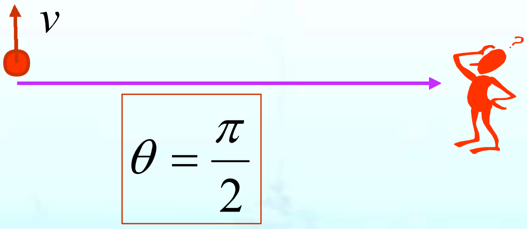
光源远离观察者



$$\omega=\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v/c}\omega_0=\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\omega_0\quad(\omega<\omega_0)$$

红移

光源垂直于观察者运动:

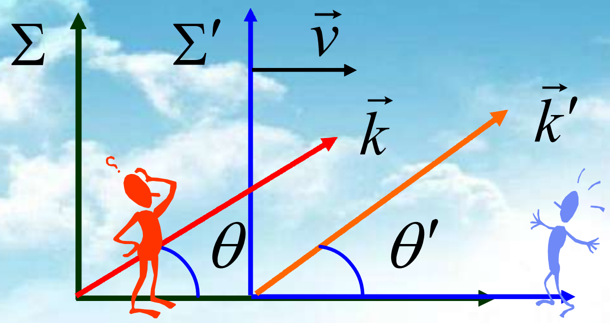


$$\omega=\sqrt{1-v^2/c^2}\,\omega_0\qquad(\omega<\omega_0)$$

横向多普勒效应被实验证实，

狭义相对论正确的有力证据之一。

(4). 光行差



$$k = \frac{w}{c} \qquad \boxed{\alpha = \theta' - \theta}$$

$$k_x = k\cos\theta \qquad k'_x = k'\cos\theta'$$

$$k_y = k\sin\theta \qquad k'_y = k'\sin\theta'$$

$$tg\theta' = \frac{k'_y}{k'_x} = \frac{k_y}{\gamma(k_x - \frac{v}{c^2}\omega)} = \frac{k\sin\theta}{\gamma(k\cos\theta - \frac{v}{c}k)} = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \frac{v}{c})}$$

此为光行差公式。

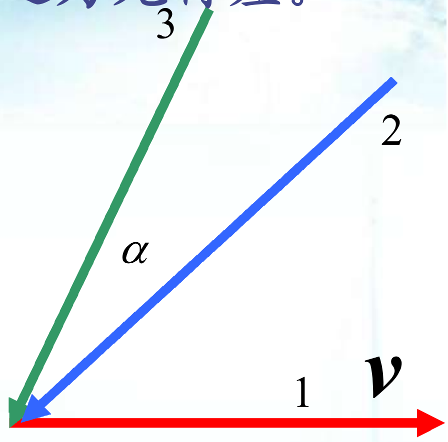
由于地球的运动，观察者看到天体的方向，不是它的真实方向，而是地球速度方向与来自天体光的速度方向合成的方向，这两个方向之差称之为光行差。

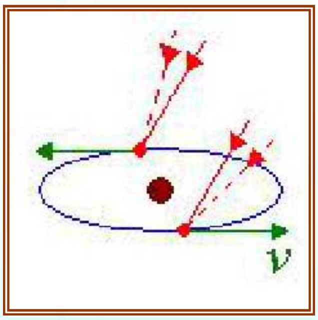
1——代表观察者运动方向

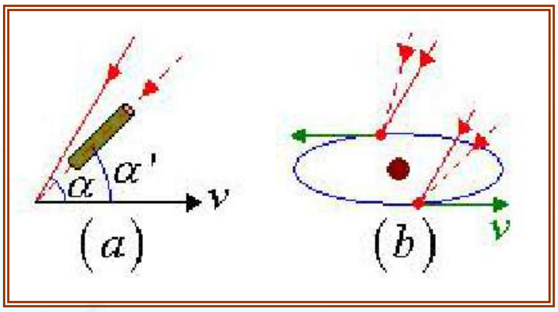
2——代表光的表观方向

3——代表光的真实方向

α ——光行差角度







$$tg\alpha = tg(\theta' - \theta) = \frac{tg\theta' - tg\theta}{1 + tg\theta tg\theta'} = \frac{\sin\theta\cos\theta(1-\gamma) + \gamma\dfrac{v}{c}\sin\theta}{\sin^2\theta + \gamma\cos^2\theta - \gamma\dfrac{v}{c}\cos\theta}$$

3.二阶张量

$$T'_{\mu\gamma} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} T_{\lambda\tau}$$

四维物理量分类概述

标量 $u' = u$

矢量 $V'_\mu = a_{\mu\nu} V_\nu$

二阶张量 $F'_{\mu\gamma} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} F_{\lambda\tau}$

$$a = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

5.4.5 物理规律的协变性

1.协变性：在参考系变换下方程形式不变的性质称之为协变性.

例：在原系中有方程 $\boxed{F_\mu = G_\mu}$

方程中的两变量为四维协变量 $\boxed{F'_\mu = a_{\mu\nu} F_\nu}$ $\boxed{G'_\mu = a_{\mu\nu} G_\nu}$

在新系中：$F'_\mu = a_{\mu\nu} F_\nu = a_{\mu\nu} G_\nu = G'_\mu$

$$\boxed{F'_\mu = G'_\mu}$$

新系与原系方程具有相同的形式，故其是协变的

2. 问题：怎样验证、描述物理规律的方程的协变

关键点1：物理量转化为四维协变

物理量---四维协变量

关键点2：方程化为四维形式

方程式---四维形式

方程中的物理量均应为四维协变量，才可能实现方程的洛伦兹协变性

3.解决方法：

（1）将所有的物理量均要改造成对应的四维协变量

（2）将所有的方程改造成四维形式