第五章

狭义相对论

5. 3 相对论时空理论

5.3.1相对论的时空结构

在Σ 上发生的两件事O点 $(0,0,0,0)$，P点 (x,y,z,t)

$$\boxed{\Delta S^2 = C^2t^2 - r^2\left(r^2 = x^2 + y^2 + z^2\right)}$$

间隔有三种可能性:

$r = |ct|$，$\Delta S^2 = 0$

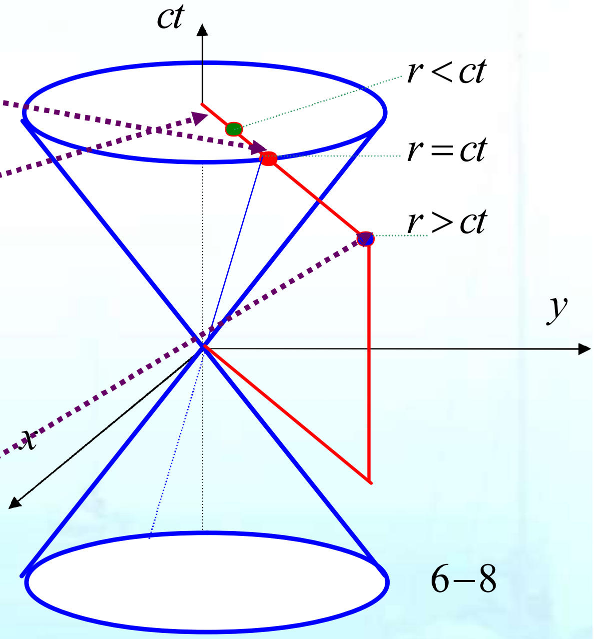
两事件用光信号联系

$r < |ct|$，$\Delta S^2 > 0$ 类时间隔

两事件可用低于光速的信号联系

$r > |ct|$，$\Delta S^2 < 0$ 类空间隔

两事件不能用光信号联系

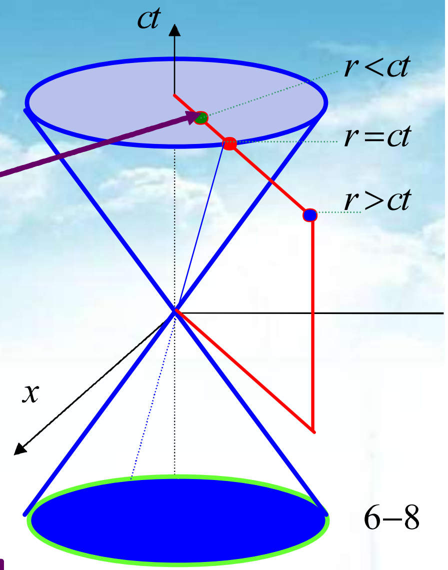


6–8

5.3.2 类时间隔 因果律对速度的限制

1. 类时间隔

$r < |ct|$， $\Delta S^2 > 0$ 　两事件点在锥内



6–8

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\frac{1}{c}(ct - \frac{v}{c}x)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

两事件可用低于光速的信号联系，事件点处在锥内

若有$t' > 0$ 　则有$t > 0$

若有$t' < 0$ 　则有$t < 0$

特点：存在绝对将来区域，绝对过去区域.

2. 因果律对速度的限制

因果律要求时间顺序在任何惯性系中不变。

即若在 Σ 系中 $t_2 - t_1 > 0$ 则在系 Σ' 中 $t'_2 - t'_1 > 0$

$$\boxed{t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

$$t'_2 - t'_1 > 0 \longrightarrow t_2 - t_1 > \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)$$

$$|t_2 - t_1| > \frac{v}{c^2}|x_2 - x_1| \qquad \boxed{\frac{|x_2 - x_1|}{|t_2 - t_1|} < \frac{c^2}{v}, \quad u \cdot v < c^2}$$

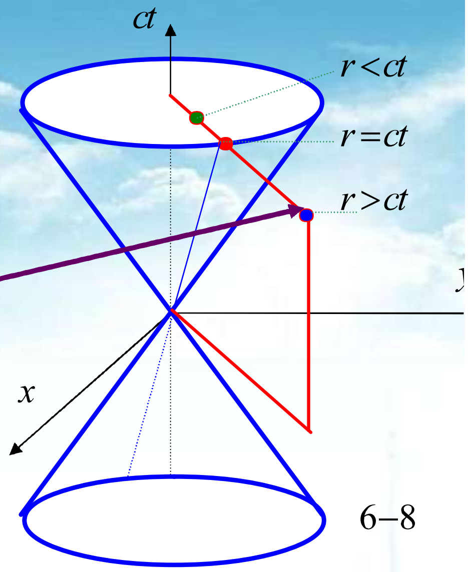
信号（参照系）最大传输速度小于c

相对论时空观符合因果规律的客观绝对性。

5.3.3类空间隔　同时的相对性

1.类空间隔

$r > |ct|$，$\Delta S^2 < 0$　事件点在锥外



特点:

① 两件事不可联系。

② 时序无意义，事件之间无因果关系

$$t_2' - t_1' = [t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)] \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

当 $x_2 - x_1$ 足够大就有　$t_2 - t_1 > 0 \Rightarrow t_2' - t_1' < 0$

事件的时间先后在不同的参照系中可能相反

因为此两件事无因果关系，所以并不会扰乱人们对世界的客观认识

2. 同时的相对性

同时不同地的两件事

$$t_2' - t_1' = \frac{-\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \neq 0$$

$t_1 = t_2$, $x_1 \neq x_2$

$$\begin{cases} 若\ x_2 > x_1 \Longrightarrow t_2' < t_1' (\Delta t' < 0) \\ 若\ x_2 < x_1 \Longrightarrow t_2' > t_1' (\Delta t' > 0) \end{cases}$$

$\Delta s^2 = -(x_2 - x_1)^2 < 0$ 此两件事为类空间隔。

结论：同时不同地两事件，在其他惯性系中一般为不同时、不同地事件 。

同时相对性：不同的惯性系时间不再统一，否定了绝对时空观

◎对钟问题

同时性是相对于具体的惯性系而言，如何判断同一参照系两件事的同时性，即如何对准同一参考系不同处的钟（两地钟）。

◎方法

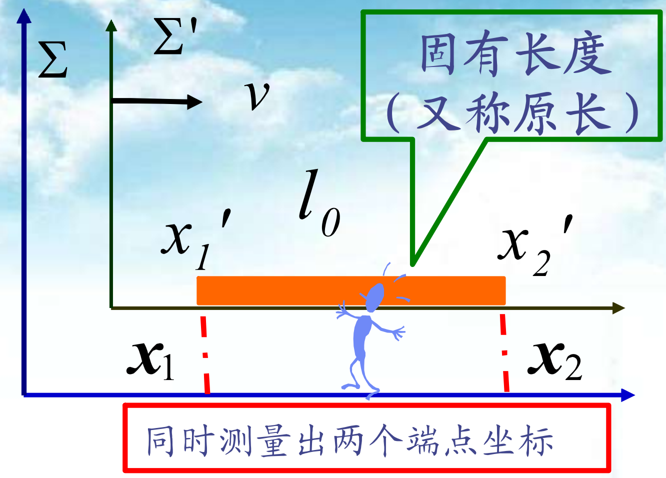
① 缓缓移动分开，
② 光信号联络

同时的相对性可形象地表述为：在某一惯性对准的钟，在另一惯性系中看来是未对准的。

5.3.4 长度收缩

1. 运动长度收缩

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \boxed{\beta = \frac{v}{c}}$$



Σ': $\Delta x' = |x_2' - x_1'| = \Delta l' = l_0$

Σ : $\Delta x = |x_2 - x_1| = \sqrt{1-\beta^2}\,|x_2' - x_1'| = l_0\sqrt{1-\beta^2}$

$$\left.\begin{aligned} x_2' &= \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x_1' &= \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\}$$

在同一时刻测量长度

$$\boxed{t_1 \equiv t_2}$$

$$\boxed{l = l_0\sqrt{1-\beta^2}}$$

结论：运动尺子长度沿运动方向收缩。

例如：一汽车 $l_0 = 2.5m$ 若速度 $v = 0.8c$ ⇨ $l_0 - l \approx 1m$

若速度 $v = 30m/s$ ⇨ $l_0 - l \approx 1.25 \times 10^{-14} m$

讨论

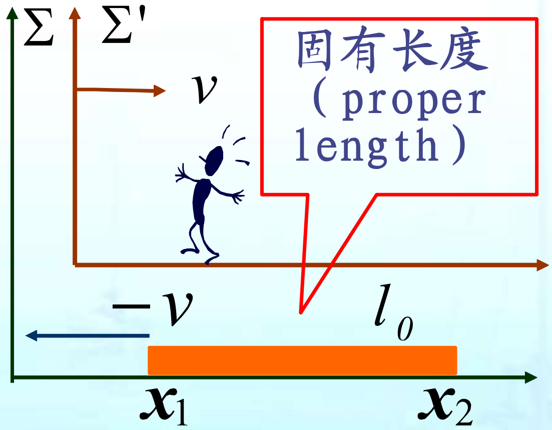
① 在不同惯性系中测量同一尺长，以原长为最长。

若尺子放在 Σ 系中，$\Delta x = l_0$ $\Delta x' = \Delta x\sqrt{1-\beta^2}$

② 长度收缩效应是相对的。

③ 该效应是时空属性之一，与尺子结构无关。

④ 当 $v \ll c$ 时，退化为经典结果。



5.3.5 时间延缓

$$t=\frac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

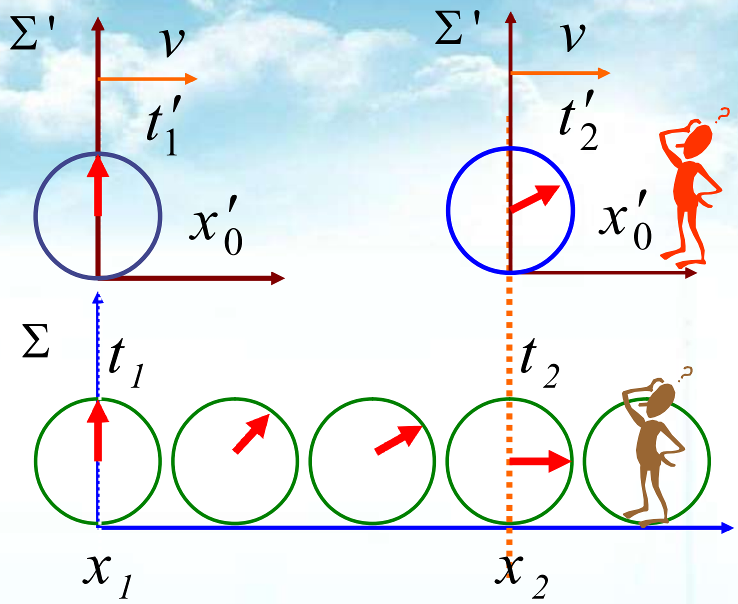
Σ': $\Delta t'=t_2'-t_1'=\tau$

τ ——固有时（原时）

Σ:
$$\boxed{\Delta t=\frac{\Delta t'+v\Delta x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

$\Delta x'=0$

$$\boxed{\Delta t=\frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

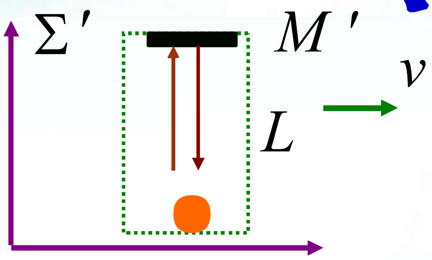


相对观察者运动的钟比静止的钟走得慢，该效应又称运动时钟减慢效应。

讨论

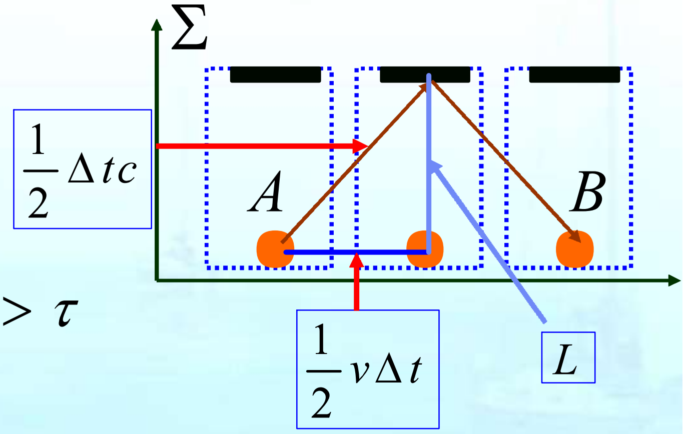
◎ 从狭义相对论的基本假设，可直接导出时间延缓效应

Σ': 经历的时间 $\Delta t' = \tau = 2L/c$



Σ: 测量的时间 $\Delta t = ?$

$$\left(\frac{1}{2}c\Delta t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + L^2$$



可导出测量时间为

$$\Delta t = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} > \tau$$

◎ 在不同惯性系中测量给定两事件之间的时间间隔，测得的结果以**原时最短**。

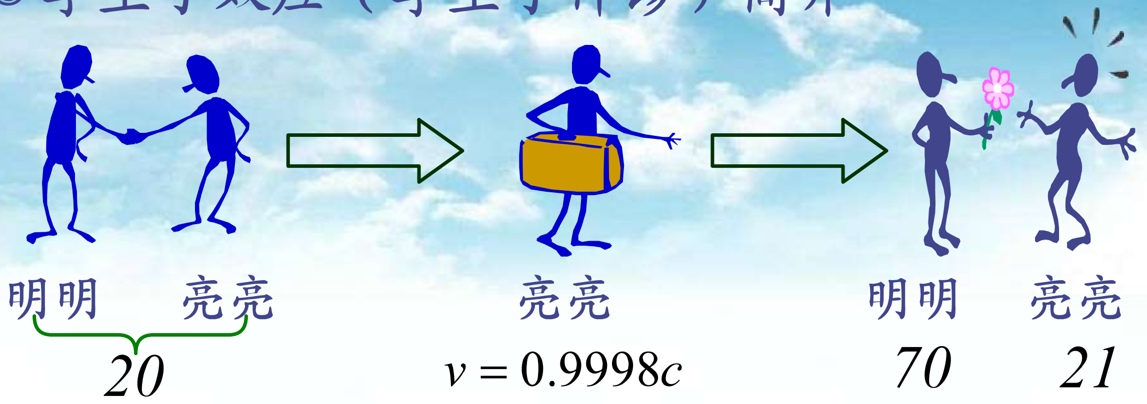
◎经典力学绝对时间概念只不过是狭义相对论的时间概念在低速情况下的近似，若

$$v << c \Rightarrow \sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow 1 \Rightarrow \Delta t = \tau \text{（过渡）}$$

◎ 爱因斯坦延缓 —— 运动参考系中的时间节奏变缓了。在其中，一切物理过程、化学过程、乃至观测者自己的生命节奏都变缓。

◎ 狭义相对论时钟延缓是相对的。

◎孪生子效应（孪生子佯谬）简介



究竟谁年轻？

1 具有加速度，超出了狭义相对论的理论范围。

2 1971年的铯原子钟实验。比静止在地面上的钟慢59 纳秒。相对于惯性系转速越大的钟走得越慢——与孪生子效应一致。

小结：1 同时性的相对性 —— 否定绝对时空观

★ 2 运动的长度收缩 $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$

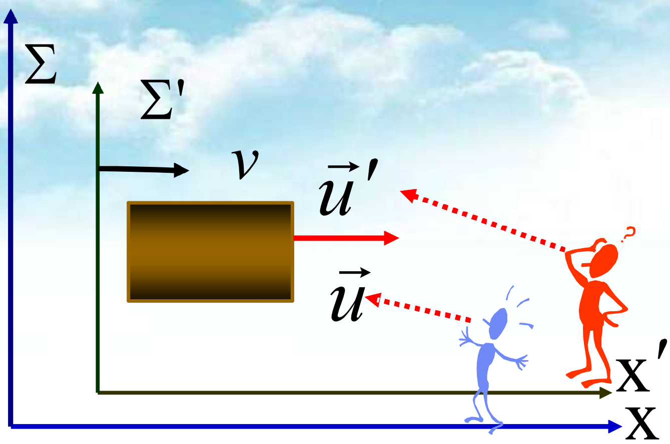
3 运动的时间延缓 $\Delta t = \tau / \sqrt{1-\beta^2}$

注意原长和原时的确定。

5.3.7 洛伦兹变换下的速度变换公式

$$dx' = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$dt' = \frac{dt - v\,dx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



$$dy' = dy$$

$$\boxed{u_x = \frac{dx}{dt}, u_y = \frac{dy}{dt}, u_z = \frac{dz}{dt}}$$

$$dz' = dz$$

$$\boxed{u'_x = \frac{dx'}{dt'}, u'_y = \frac{dy'}{dt'}, u'_z = \frac{dz'}{dt'}}$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{dt - v\,dx/c^2} = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}$$

$$dx' = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy\sqrt{1-\beta^2}}{dt - v\,dx/c^2} = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - u_x v/c^2}$$

$$dt' = \frac{dt - v\,dx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz\sqrt{1-\beta^2}}{dt - v\,dx/c^2} = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - u_x v/c^2}$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}$$

$$u_y' = \frac{u_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - u_x v / c^2}$$

$$u_z' = \frac{u_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - u_x v / c^2}$$

分析

1 v<<c，洛仑兹速度变换退化为伽利略变换

$$v << c \Rightarrow v/c \to 0 \ (\beta \to 0) \ u_x / c \to 0$$

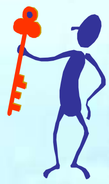
2 速度变换满足光速不变原理

- 若 $u = c$，则可推出

$$u' = \frac{u - v}{1 - vu/c^2} = \frac{c - v}{1 - vc/c^2} = \frac{c - v}{c - v} \cdot c = c$$

- 若 $u < c$，则可证明 $u' < c$

无论是在真空中还是介质中，无论用什么方法，都不可能使一个信号以大于光速的速度传递。



例3 μ 子是1936年由安德森（C. D. Anderson）等人在宇宙线中发现的。它可自发的衰变为一个电子和两个中微子。自发衰变的平均寿命 $\tau = 2.15\times10^{-6}s$ ，当高能宇宙射线质子进入地球上层大气中时，会形成丰富的 μ 子。设来自太空的宇宙线在离地面 $6000m$ 高空产生的 μ 子，可否在衰变前到达地面？已知 μ 子相对于地球的运动速率为 $v = 0.995c$

- 时间延缓法　S' 动，S 静

$$\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= 2.15\times10^{-5}s$$

在该时间内粒子运动的距离

$$L = v\Delta t = 6418\ m$$

在衰变前可到达地面。

- 长度缩短法　S' 静，S 动

粒子寿命内，S 系运动距离

$$L = v\tau = 641.8m$$

而 S' 系测量宇宙线离地面

$$L' = l_0\sqrt{1-\beta^2}$$

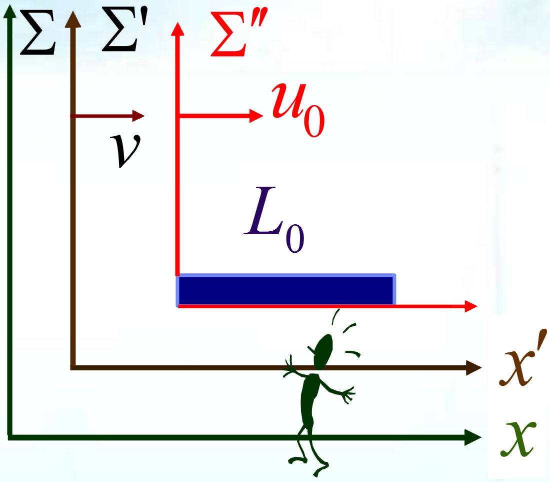
$$= 600m$$

在衰变前，粒子可与地球相遇。

例4：在Σ'系中测得一直尺长度为L'，运动速度为u_0，方向沿x'正向。而Σ'相对Σ以v沿x正向运动。问在Σ系中测到的尺长是多少？

解：(1)先求尺的固有长度L_0，由尺缩

$$L' = L_0\sqrt{1-u_0^2/c^2} \Rightarrow L_0 = \frac{L'}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}}$$

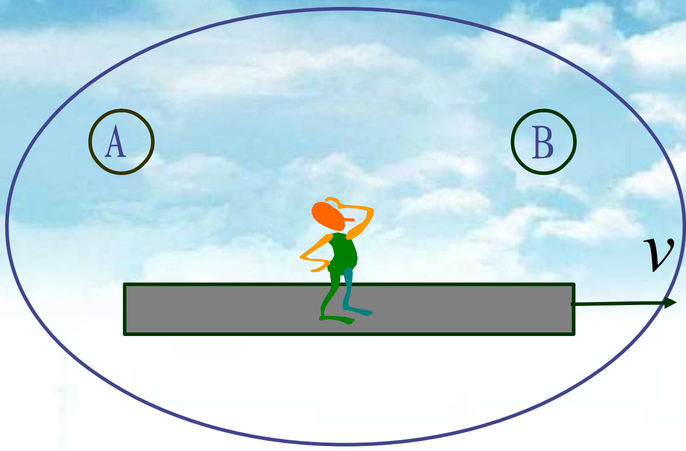


（2）再求尺相对Σ的速度u，尺相对Σ'系的速度为$u'=u_0$。利用反变换：

$$u = \frac{u'+v}{1+u'v/c^2} = \frac{u_0+v}{1+u_0v/c^2}$$

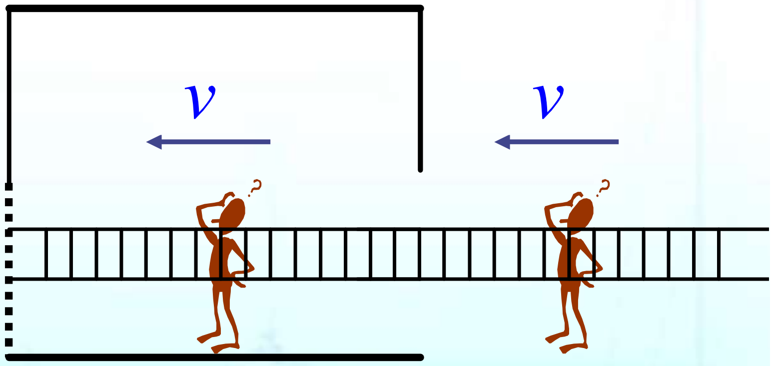
（3）求Σ测到的尺长，由尺长收缩

$$L = L_0\sqrt{1-u^2/c^2} = \frac{L'\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+u_0v/c^2}$$



思考题1： 两个相距L的点光源， 正好可用一长度为L的挡板将它挡住。现使挡板以速度v运动。试问挡板能否同时挡住这两个点光源？

思考题2： 一个人扛一个固有长度为L的梯子，以相对地面速度v冲进一个固有长度为L的厂房。当梯子末端刚进厂房时，梯子的前端将处在什么位置？



例5：设某物体内部由两事件P_1和P_2 发生。在Σ系的观察者测到该物体以速度u_0 沿x正向运动， P_1、P_2 发生的时间间隔为Δt。今有Σ′系相对Σ以速度v沿x反方向运动，则P_1、 P_2 两事件的固有时间间隔为多少？在Σ′系测得的P_1、P_2两事件的时间间隔为多少？

答案

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-u_0^2/c^2}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t(1+\frac{u_0 v}{c^2})}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$