第四章

电磁波的传播

4.2电磁波在介质界面上的反射与折射

4.2. 电磁波在介质界面上的反射和折射

电磁波入射到介质界面上，会发生反射、折射现象(如光入射到水面、玻璃面)。

其一、反射、折射定律有两个方面的问题:

（1）入射角、反射角和折射角之间的关系问

（2）入射波、反射波和折射波时谐小表示式之间的关系——频率、振幅和相位的变化关系。

其二、此类问题的解决属于边值问题。

4.2.1反射和折射定律

1. 电磁场的边值关系

$$\begin{cases} \vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \\ \vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha} \\ \vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma \\ \vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \end{cases} \xrightarrow[\vec{\alpha}=0,\ \sigma=0]{\text{对于绝缘介质}} \boxed{\begin{cases} \vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \\ \vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0 \end{cases}}$$

两个独立的关系

关键问题:

讨论界面两侧电磁场的**波矢关系，频率关系，振幅关系**。这三大关系一旦确定，则电磁波状态确定。

2. 反射、折射定律的导出过程

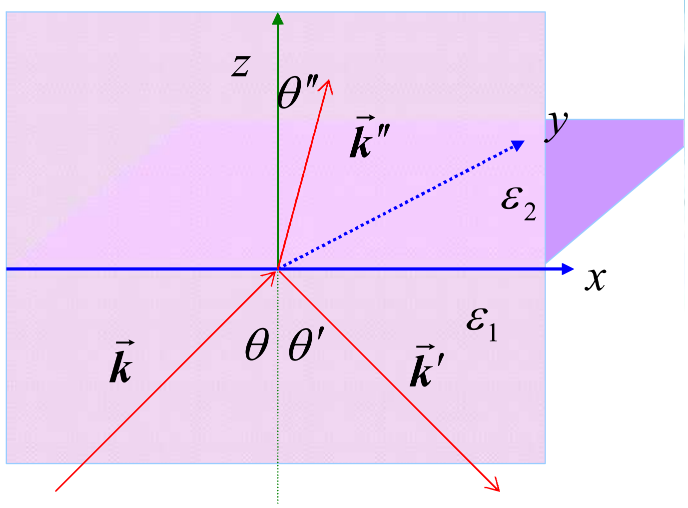
（1）假设入射波为单色平面电磁波，则反射、折射电磁波也为平面电磁波。

（2）符号约定

	频率	波矢	振幅	平面波函数
入射波	ω	$\vec{k}$	$\vec{E}_0$	$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$
（其量符不加撇号表示）				
反射波	ω'	$\vec{k}'$	$\vec{E}_0'$	$\vec{E}' = \vec{E}_0' e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega' t)}$
（其量符加一撇号表示）				
折射波	ω''	$\vec{k}''$	$\vec{E}_0''$	$\vec{E}'' = \vec{E}_0'' e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{x}-\omega'' t)}$
（其量符加双撇号表示）				

（3）波矢量分量间的关系

入射介质为1，折射介质为2



分界面为z=0的平面，入射波在xoz平面上

$$\vec{n}\times\vec{E}_1=\vec{n}\times\vec{E}_2$$

$$\vec{E}_1=\vec{E}+\vec{E}' \qquad \vec{E}_2=\vec{E}''$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}')=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}''$$

$$\vec{n}\times\vec{E}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}+\vec{n}\times\vec{E}_0'e^{i(\vec{k}'\vec{x}-\omega' t)}=\vec{n}\times\vec{E}_0''e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{x}-\omega'' t)}$$

$$\boxed{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}=e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega t)}=e^{i(k''\cdot\vec{x}-\omega'' t)}}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t=\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega' t=\vec{k}''\cdot\vec{x}-\omega'' t$$

时间参数系数相等 $\omega=\omega'=\omega''$

结论1:反射波折射波的频率与入射波频率相等。

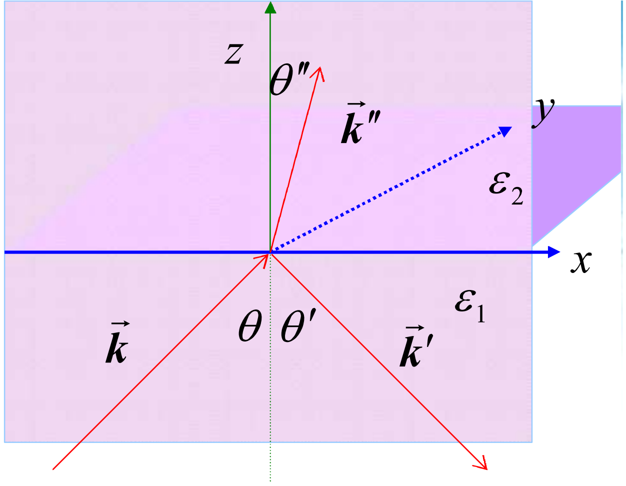
$$\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t=\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega' t=\vec{k}''\cdot\vec{x}-\omega'' t$$

$$\vec{k}\cdot\cdot\vec{x}=\vec{k}'\cdot\vec{x}=\vec{k}''\cdot\vec{x} \qquad z=0$$

$$k_x x+k_y y=k'_x+k'_y y=k''_x x+k''_y y$$

$$k_x=k'_x=k''_x \qquad k_y=k'_y=k''_y$$

$$k_y=0 \qquad \therefore\ k'_y=k''_y=0$$



结论2：入射波、反射波、折射波三者共面

$$k=k'=\frac{\omega}{\upsilon_1} \qquad k''=\frac{\omega}{\upsilon_2}$$

$$\boxed{k_x=k\sin\theta=\frac{\omega}{\upsilon_1}\sin\theta\,, \qquad k'_x=\frac{\omega}{\upsilon_1}\sin\theta'} \qquad \boxed{k''_x=\frac{\omega}{\upsilon_2}\sin\theta''}$$

$$k_x=k'_x \longrightarrow \theta=\theta'$$

结论3：入射角等于反射角满足反射定律

$$k_x = k\sin\theta = \frac{\omega}{\upsilon_1}\sin\theta\,, \qquad k'_x = \frac{\omega}{\upsilon_1}\sin\theta'$$

$$k''_x = \frac{\omega}{\upsilon_2}\sin\theta''$$

$$k_x = k''_x \longrightarrow \frac{\omega}{\upsilon_1}\sin\theta = \frac{\omega}{\upsilon_2}\sin\theta''$$

非铁磁物质 $\mu \approx \mu_0$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{c/\upsilon_2}{c/\upsilon_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_2}} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = n_{21}$$

结论4：入射角与折射角满足折射定律

电磁波矢关系，频率关系，已全部给出

波矢定量关系

$$k'_x = k_x$$
$$k'_y = k_y$$
$$k'_z = -\sqrt{k'^2 - k'^2_x} = -\sqrt{k^2 - k^2_x}$$

$$k''_x = k_x$$
$$k''_y = k_y$$
$$k''_z = \sqrt{k'^2 - k''^2_x} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{\upsilon_2}\right)^2 - k^2_x}$$

结论

结论1:反射波折射波的频率与入射波频率相等。

结论2：入射波、反射波、折射波三者共面。

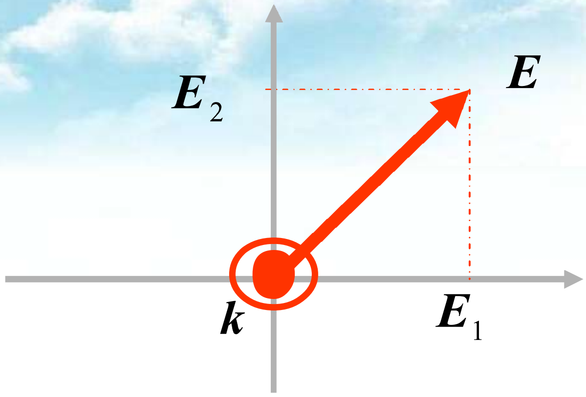
结论3：入射角等于反射角满足反射定律 。

结论4：入射角等于折射角满足折射定律。

4.2.2. 振幅关系 菲涅耳（Fresnel）公式

1.平面波独立偏振方向的约定

平面波有两个
独立偏振方向。

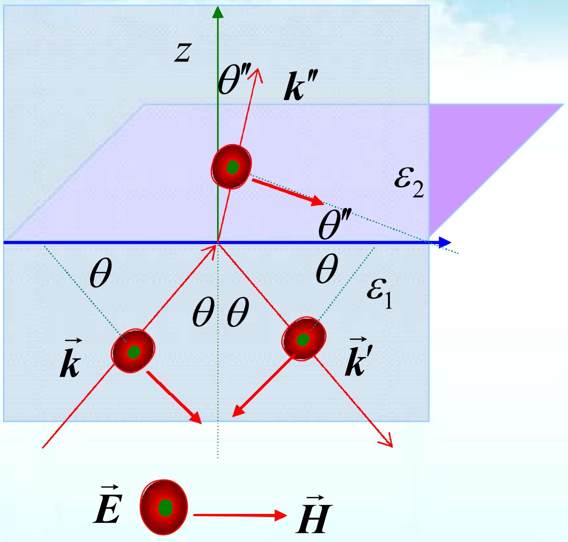


选取：　$\vec{E}_1 = \boldsymbol{E}_\perp \qquad \vec{E}_2 = \vec{\boldsymbol{E}}_\parallel$

$$\therefore \quad \vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_\perp + \vec{\boldsymbol{E}}_\parallel \qquad \vec{\boldsymbol{E}}_\perp \perp \vec{\boldsymbol{E}}_\parallel$$

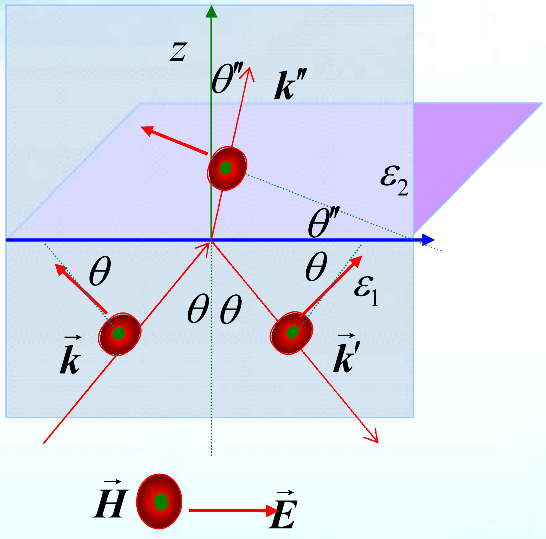
先分别讨论2个独立偏振的反射、折射振幅关系，其它方向的偏振则可分解成此两个正交偏振的迭加。

$$\vec{E} = \vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel} \qquad \vec{E}_{\perp} \perp \vec{E}_{\parallel}$$



*E*垂直于入射面

*H*平行于入射面



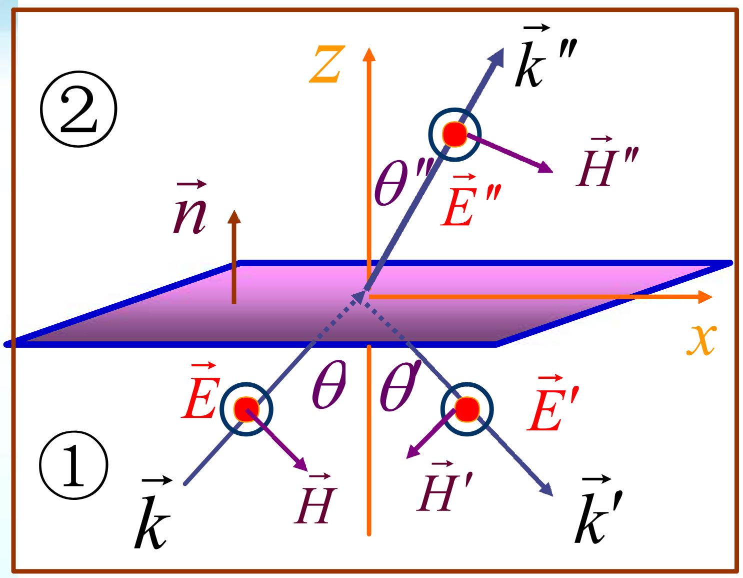
*H*垂直于入射面

*E*平行于入射面

2.$\vec{E}$ 垂直入射面（ xoz 平面） $\vec{E}=\vec{E}_{\perp}$

（振幅和位相的关系）

$$\begin{cases}\vec{n}\times[\vec{E}''-(\vec{E}+\vec{E}')]=0\\ \vec{n}\times[\vec{H}''-(\vec{H}+\vec{H}')]=0\end{cases}$$



$$E_t''=E_t+E_t'$$

$$H_t''=H_t+H_t'$$

$$\begin{cases}E''=E+E' & ①\\ H''\cos\theta''=H\cos\theta-H'\cos\theta' & ②\end{cases}$$

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad B = \mu H \quad \Rightarrow \quad H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E$$

$$\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0 \qquad \theta = \theta' \qquad \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta''}$$

$$\begin{cases} E'' = E + E' & ① \\ \sqrt{\varepsilon_1} E\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_1} E'\cos\theta = \sqrt{\varepsilon_2} E''\cos\theta'' & ③ \end{cases}$$

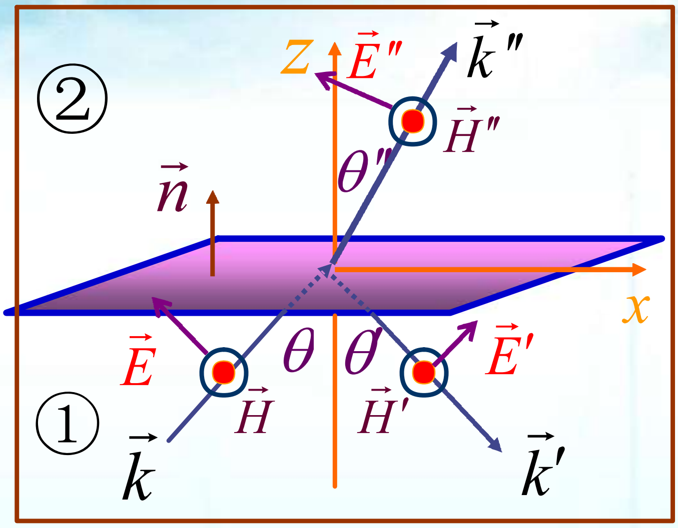
$$\begin{cases} \dfrac{E'_\perp}{E_\perp} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''} = -\dfrac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')} \\ \dfrac{E''_\perp}{E_\perp} = \dfrac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''} = \dfrac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta + \theta'')} \end{cases} \qquad (a)$$

3. $\vec{E}$平行入射面（$\vec{E}=\vec{E}_{//}$，$\vec{E}_{\perp}=0$ ）

（振幅和位相的关系）

$\vec{H}\perp$入射面，假定 $\vec{H}'$，$\vec{H}''$与 $\vec{H}$方向相同

$$\begin{cases} \vec{n}\times[\vec{E}''-(\vec{E}+\vec{E}')]=0 \\ \vec{n}\times[\vec{H}''-(\vec{H}+\vec{H}')]=0 \end{cases}$$



$$\boxed{E\cos\theta - E'\cos\theta = E''\cos\theta''}$$

$$\boxed{H + H' = H''}$$

$$\boxed{H=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}E}$$

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon_1}(E+E')=\sqrt{\varepsilon_2}E''}$$

$$\boxed{E_t - E_t' = E_t''}$$

$$\boxed{H + H' = H''}$$

$$\boxed{E\cos\theta - E'\cos\theta = E''\cos\theta''}$$

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon_1}(E + E') = \sqrt{\varepsilon_2}E''}$$

$$\begin{cases} \dfrac{E'_{//}}{E_{//}} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta''} = \dfrac{tg(\theta - \theta'')}{tg(\theta + \theta'')} \\ \dfrac{E''_{//}}{E_{//}} = \dfrac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta''} = \dfrac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta + \theta'')\cos(\theta - \theta'')} \end{cases} \qquad (b)$$

4. $\vec{E}$在任意方向，可以分解为 $\vec{E} = \vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{//}$

其振幅和位相的关系可由上面的结论共同给出。