第三章

静磁场

3.4静磁场的能量 作用力

3.4.1静磁场的能量密度

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})=(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})$$

$W=\frac{1}{2}\int\vec{B}\cdot\vec{H}dV$ 磁场的能量密度

电流定——磁场定——磁场能定

找W与J的关系

$$\vec{B}\cdot\vec{H}=\boxed{(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}}=\boxed{\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})+\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})}$$

$$=\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})+\vec{A}\cdot\vec{J}$$

$$W=\frac{1}{2}\int\vec{B}\cdot\vec{H}dV=\frac{1}{2}\boxed{\int\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})dV}+\frac{1}{2}\int\vec{A}\cdot\vec{J}dV$$

$$\boxed{\int\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})dV=\oint(\vec{A}\times\vec{H})\cdot d\vec{s}=0}$$

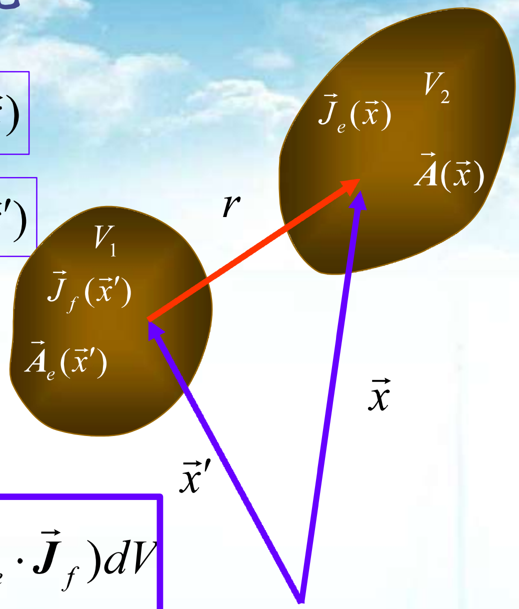
$$W=\frac{1}{2}\int\vec{A}\cdot\vec{J}dV=\int\boxed{\frac{1}{2}\vec{A}\cdot\vec{J}}dV$$

不能理解为磁能密度，仅只是一种数学关系式。

3.4.2电流系统与外磁场的相互作用能

体系V_1的电流与矢势 $\vec{J}_f(\vec{x}'), \rightarrow \vec{A}(\vec{x})$

体系V_2的电流与矢势 $\vec{J}_e(\vec{x}), \rightarrow \vec{A}_e(\vec{x}')$



$$W=\frac{1}{2}\int\left[\vec{J}_f(\vec{x}')+\vec{J}_e(\vec{x})\right]\left[\vec{A}(\vec{x})+\vec{A}_e(\vec{x}')\right]dV$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}\int\vec{A}\cdot\vec{J}_f dV}+\boxed{\frac{1}{2}\int\vec{A}_e\cdot\vec{J}_e dV}+\boxed{\frac{1}{2}\int(\vec{A}\cdot\vec{J}_e+\vec{A}_e\cdot\vec{J}_f)dV}$$

V_1自能 | V_2自能 | V_2与V_1的相互作用能

$$W_i=\frac{1}{2}\int\left[\vec{J}_f(\vec{x}')\cdot\vec{A}_e(\vec{x}')+\vec{J}_e(\vec{x})\cdot\vec{A}(\vec{x})\right]dV$$

当全空间充满均匀介质时

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V_1}\frac{\vec{J}_f(\vec{x}')dV'}{r} \qquad \vec{A}_e(\vec{x}') = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V_2}\frac{\vec{J}_e(\vec{x})}{r}dV$$

$$\boxed{\iiint_{V_2}\vec{A}(\vec{x})\cdot\vec{J}_e(\vec{x})dV} = \iiint_{V_2}\left[\frac{\mu}{4\pi}\boxed{\iiint_{V_1}}\frac{\boxed{\vec{J}_f(\vec{x}')dV'}}{r}\right]\cdot\vec{J}_e(\vec{x})dV$$

交换积分顺序

$$= \boxed{\iiint_{V_1}}\boxed{\left[\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V_2}\frac{\vec{J}_e(\vec{x})dV}{r}\right]}\cdot\boxed{\vec{J}_f(\vec{x}')dV'}$$

$$= \boxed{\iiint_{V_1}\boxed{\vec{A}_e(\vec{x}')}\cdot\vec{J}_f(\vec{x}')dV'}$$

$$W_i = \frac{1}{2}\int\left[\vec{J}_f(\vec{x}')\cdot\vec{A}_e(\vec{x}') + \vec{J}_e(\vec{x})\cdot\vec{A}(\vec{x})\right]dV$$

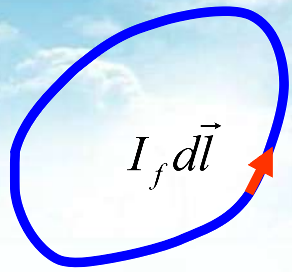
$$W_i = \int_{V_1}\vec{J}_f(\vec{x}')\cdot\vec{A}_e(\vec{x}')dV' = \int_{V_2}\vec{J}_e(\vec{x})\cdot\vec{A}(\vec{x})dV$$

3.4.4小区域电流与外磁场的作用能

$$\boxed{W_i = \iiint_V \vec{\boldsymbol{J}}_f(\vec{x})\cdot\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{x})dV}$$

$\vec{J}_f$为小区域电流分布

$\vec{A}_e$为外磁场的矢势



对于线电流 $\vec{\boldsymbol{J}}_e(\vec{x})dV \Leftrightarrow I_f d\vec{l}$

斯托克斯定理

$$W_i = I_f \boxed{\oint_L \vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{x})\cdot d\vec{l}} = I_f \boxed{\iint_S \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}_e(\vec{x})\cdot d\vec{S}}$$

$$= I_f \iint_S \vec{B}_e(\vec{x})\cdot d\vec{S} = I_f\Phi_e$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}_e(\boldsymbol{x}) = \vec{\boldsymbol{B}}_e(0) + \vec{\boldsymbol{x}}\cdot\nabla\vec{\boldsymbol{B}}_e(0) + \cdots\cdots$$

$$\approx \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)$$

认为小区域内为均匀磁场

$$W = W_i \approx I_f \boldsymbol{B}_e(0)\int \boldsymbol{ds} \doteq I\cdot\boldsymbol{B}_e(0)\Delta\vec{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{m}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_e(0)$$

3.4.4外磁场对电流系统的作用力

洛仑兹力公式

$$\vec{F} = \iiint_V \boxed{\vec{f}}\, dV' = \iiint_V \boxed{\vec{J}_f(\boldsymbol{x}') \times \vec{B}_e(\boldsymbol{x}')} dV'$$

磁场在原点展开

$$\boxed{\vec{B}_e(\boldsymbol{x})} = \vec{B}_e(0) + \vec{x} \cdot \nabla \vec{B}_e(0) + \cdots\cdots$$

$$\vec{F} = \iiint_V \vec{f} dV' = \iiint_V \vec{J}_f(\boldsymbol{x}') \times \boxed{\left[\vec{B}_e(0) + \vec{x} \cdot \nabla \vec{B}_e(0) + \cdots\cdots\right]} dV'$$

讨论第一项

$$\vec{F}^{(0)} = \iiint_V \vec{J}_f(\boldsymbol{x}') \times \vec{B}_e(0) dV'$$

$$= \iiint_V \left[\vec{J}_f(\boldsymbol{x}')\right] dV' \times \vec{B}_e(0)$$

$$\iiint_V \left[\vec{J}_f(\boldsymbol{x}')\right] dV' = 0 \longrightarrow \vec{F}^{(0)} = 0$$

讨论第二项

$$\vec{F}^{(1)}=\iiint_V \vec{\boldsymbol{J}}_f(\boldsymbol{x}')\times\left[\vec{\boldsymbol{x}}\cdot\nabla\vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\right]dV'$$

∇ 对不带撇的坐标求导

$$\nabla(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e)=\vec{x}'\times\boxed{(\nabla\times\vec{B}_e)}+(\vec{x}'\cdot\nabla)\vec{B}_e+\vec{B}_e\times\boxed{(\nabla\times\vec{x}')}+\boxed{(\vec{B}_e\cdot\nabla)\vec{x}'}$$

$\boxed{0}$ 此处没外场对应的电流

$$\boxed{\nabla(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e)=(\vec{x}'\cdot\nabla)\vec{B}_e}$$

$$\vec{F}^{(1)}=\iiint_V \vec{\boldsymbol{J}}_f(\boldsymbol{x}')\times\boxed{\left[\left(\vec{\boldsymbol{x}}\cdot\nabla\right)\vec{\boldsymbol{B}}_e(0)\right]}dV'=\iiint_V \boxed{\vec{\boldsymbol{J}}_f(\boldsymbol{x}')\times\boxed{\nabla(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e)}dV'}$$

$$\nabla\times(\boxed{\varphi}\vec{A})=\boxed{\varphi}\nabla\times\vec{A}+(\nabla\boxed{\varphi})\times\vec{A}$$

$$\boxed{\nabla\times\left[\boxed{(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e)}\vec{J}_f(x')\right]}=\boxed{(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e)}\nabla\times\vec{J}_f(\vec{x}')+\left[\nabla\boxed{(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e)}\right]\times\vec{J}_f(x')$$

$$=\left[\nabla(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e)\right]\times\vec{J}_f(x')=\boxed{-\vec{J}_f(x')\times\left[\nabla(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e)\right]}$$

$$\vec{F}^{(1)}=-\iiint_V \boxed{\nabla\times\left[(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e)\vec{J}_f(x')\right]}dV'=-\nabla\times\iiint_V\left[(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e)\vec{J}_f(x')\right]dV'$$

$$\vec{F}^{1)} = -\nabla \times \iiint_V \left[(\vec{x}' \cdot \vec{B}_e) \vec{J}_f(x') \right] dV'$$

$$= -\frac{1}{2} \nabla \times \iiint_V \left[\vec{J}_f (\vec{x}' \cdot \vec{B}_e) - \vec{x}' \left(\vec{J}_f \cdot \vec{B}_e \right) \right] dV'$$

证明

$$-\frac{1}{2} \nabla \times \iiint_V \left[\vec{J}_f (\vec{x}' \cdot \vec{B}_e) + \vec{x}' \left(\vec{J}_f \cdot \vec{B}_e \right) \right] dV' \rightarrow 0$$

$$\vec{F}^{(1)} = -\frac{1}{2} \nabla \times \iiint_V \left[\vec{J}_f (\vec{x}' \cdot \vec{B}_e) - \vec{x}' \left(\vec{J}_f \cdot \vec{B}_e \right) \right] dV'$$

$$= -\frac{1}{2} \nabla \times \iiint_V \left[\vec{x}' \times \vec{J}_f \right] \times \vec{B}_e dV'$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint_V \left[\vec{x}' \times \vec{J}_f \right] dV'$$

$$= -\frac{1}{2} \nabla \times \iiint_V \left[\vec{x}' \times \vec{J}_f \right] dV' \times \vec{B}_e$$

$$\vec{F}^{(1)} = -\nabla \times \left[\vec{m} \times \vec{B}_e(0) \right] = \vec{m} \cdot \nabla \vec{B}_e(0) = \nabla \left[\vec{m} \cdot \vec{B}_e(0) \right]$$

$$\vec{F}^{(1)} = \nabla \left[\vec{m} \cdot \vec{B}_e(0) \right] = \nabla W_i$$

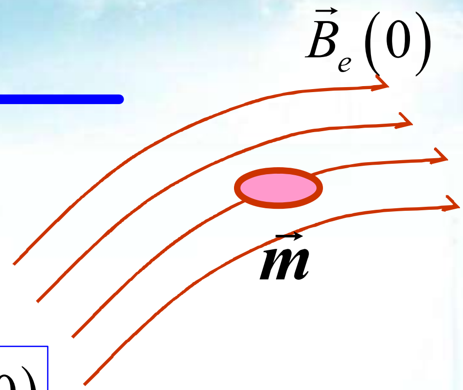
此为相互作用能的梯度

推导方法同
p44练习1.6

静电场中的电势能和相互作用能相等 $W_i^{(1)} = U^{(1)} = -\vec{\boldsymbol{P}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}$

作用力表示为 $\vec{F} = -\nabla W_i = -\nabla U$

力与势能的微分关系 $\vec{F}^{(1)} = -\nabla \boxed{U^{(1)}}$

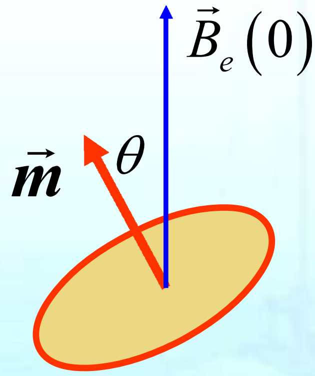


磁场情况

$$\vec{F}^{(1)} = \nabla \boxed{\left[\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{B}_e(0)\right]}$$

***m*在外磁场中的磁势能** $\boxed{U^{(1)} = -\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{B}_e(0)}$

***m*与外磁场中相互作用能** $W = \vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_e(0)$



***m*在外磁场中的所受的力矩**

$$\vec{L}_\theta = -\frac{\partial U^{(1)}}{\partial\ \theta} = \frac{\partial}{\partial\ \theta} mB_e \cos\theta = -mB_e \sin\theta$$

3.4.5磁偶极子在外磁场中的势能与相互作用能的关系

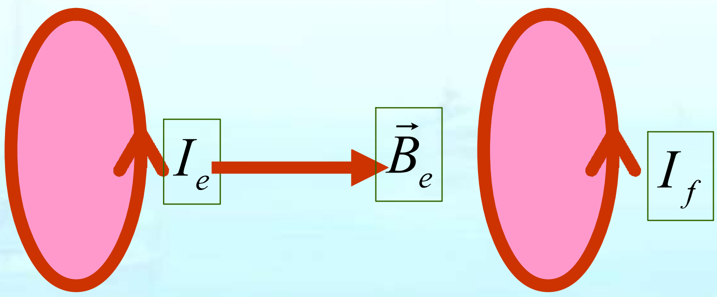
问题：电偶极子 $\boxed{W_i^{(1)} = U^{(1)} = -\vec{P} \cdot \vec{E}}$

磁偶极子 $\boxed{W^{(1)} = \vec{m} \cdot \vec{B}_e(0)}$ $\boxed{U^{(1)} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_e(0)}$

其原因在于相互作用的过程存在差异

电偶极子在作用的过程中自身性态(电量)不变

磁偶极子在作用的过程中自身性态(电流)产生变化

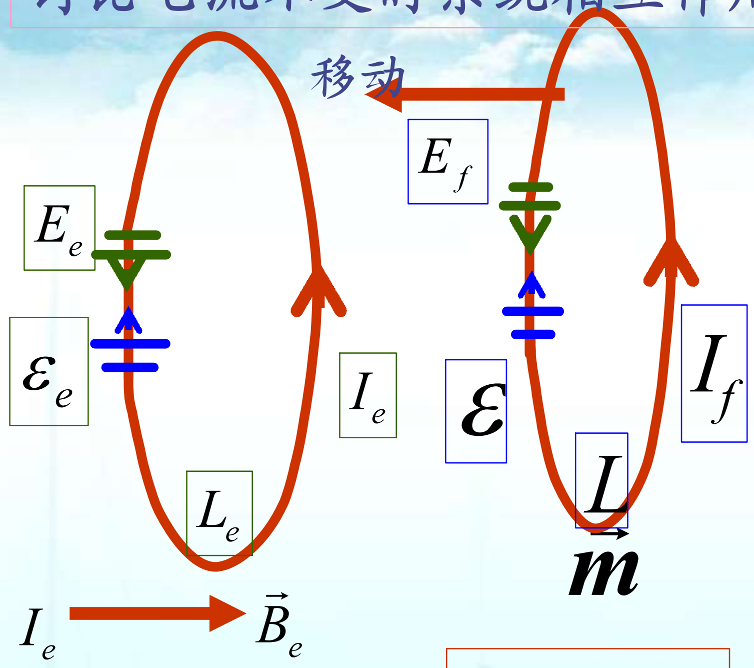


$\boxed{I_f}$

磁场作用电流使之运动时会产生感应电动势，使两个线圈的电流发生改变

要使系统维持原性态(电流)不变,需要外加电动势对电流线圈做功,才能保证系统不变.

讨论电流不变时系统相互作用能的改变



外场的电流分布

被外场作用的磁偶极子

E_f E_e

$\delta A'$ 外部电源对系统做的功

$=$

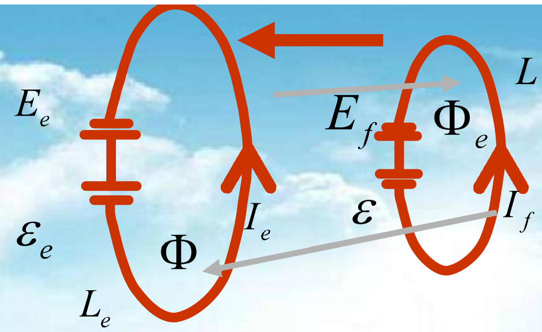
$(\delta W)_I$ 系统相互作用能增加

$+$

δA 系统的磁力做功

$$\delta A' = (\delta W)_I + \delta A$$

$$\boxed{\delta A' = (\delta W)_I + \delta A}$$



$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi_e}{dt}} \qquad \boxed{\varepsilon_e = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

$$W_i = \frac{1}{2}\left(I_f \oint_L \vec{A}_e(\vec{x}) \cdot d\vec{l} + I_e \oint_{L_e} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{l}\right) = \frac{1}{2}\left(I_f \Phi_e + I_e \Phi\right)$$

$$\boxed{(\delta W)_I = \frac{1}{2}\left(I_f \delta\Phi_e + I_e \delta\Phi\right)}$$

系统相互作用能增量

$$\varepsilon I_f \delta t + \varepsilon_e I_e \delta t = -I_f \delta \Phi_e - I_e \delta \Phi$$

感应电动势做的功

$$\delta A' = I_f \delta \Phi_e + I_e \delta \Phi$$

反抗感应电动势做的功

$$\boxed{\delta A' = 2(\delta W)_I} \qquad \boxed{(\delta W)_I = \delta W_i}$$

$$\delta A' = (\delta W)_I + \delta A \qquad \delta A' = 2(\delta W)_I \qquad (\delta W)_I = \delta W_i$$

$$2(\delta W)_I = (\delta W)_I + \delta A \qquad (\delta W)_I = \delta A \qquad \delta W_i = \delta A$$

势能与磁力做功的关系为 $\delta A = -\delta U$

$$\delta W_i = \delta A$$

$$\delta A = -\delta U$$

$$W_i = -U^{(1)}$$

$$\underbrace{\delta A'}_{2(\delta W)_I} = \underbrace{(\delta W)_I}_{(\delta W)_I} + \underbrace{\delta A}_{(\delta W)_I}$$

$$\Pi=\iiint_V\left[\vec{J}_f(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e)+\vec{x}'\left(\vec{J}_f\cdot\vec{B}_e\right)\right]dV'=\iiint_V\left[\vec{J}_f x'+\vec{x}'\vec{J}_f\right]\cdot\vec{B}_e dV'$$

$$=\sum_{i,j}\iiint_V\left[J_i x_j'+x_i'J_j\right]dV'\left(\vec{e}_i\vec{e}_j\right)\cdot\vec{B}_e$$

构造一个函数

$$\nabla'\cdot\left(x_i'x_j'\vec{J}\right)=\nabla'\left(x_i'x_j'\right)\cdot\vec{J}+\left(x_i'x_j'\right)\nabla'\cdot\vec{J}=\nabla'\left(x_i'x_j'\right)\cdot\vec{J}$$

$$=\nabla'\left(x_i'\right)\cdot\vec{J}x_j'+x_i'\nabla'\left(x_j'\right)\cdot\vec{J}=\vec{e}_i\cdot\vec{J}x_j'+x_i'\vec{e}_j\cdot\vec{J}=J_i x_j'+x_i'J_j$$

$$\Pi=\sum_{i,j}\iiint_V\nabla'\cdot\left(x_i'x_j'\vec{J}\right)dV'\left(\vec{e}_i\vec{e}_j\right)\cdot\vec{B}_e$$

$$=\sum_{i,j}\oint\!\!\!\oint_S\left(x_i'x_j'\vec{J}\right)\cdot d\vec{S}'\left(\vec{e}_i\vec{e}_j\right)\cdot\vec{B}_e$$

$$=0$$

返回