# 第一章

## 经典电动力学的理论基础

### 1.2静磁现象的基本规律

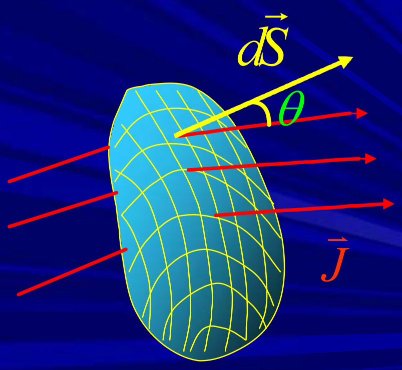
## 1.2.1. 电荷守恒律

### 1. 电流密度

定义： $\vec{J}$ 大小：单位时间垂直通过单位面积的电量

方向：沿导体内一点电荷流动的方向

电流强度和电流密度的关系：

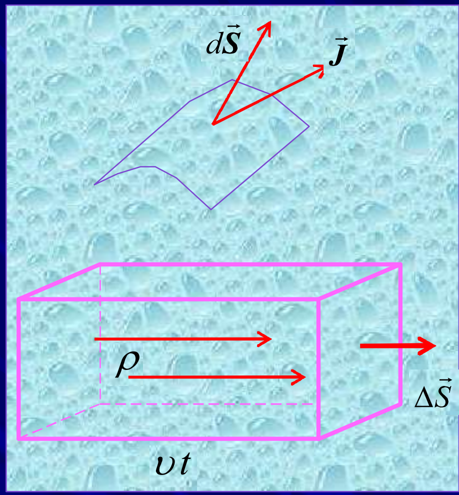



$$dI = \left|\vec{J}\right| \cos\theta dS = \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{I = \int_S dI = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}}$$

流过任意曲面的电流强度

带电粒子的电流密度表示




$$J = \frac{\Delta Q / \Delta s_n}{\Delta t} = \rho v$$

$$\boxed{\vec{J} = \rho \vec{v}}$$

对于多种电粒子系统，则有

$$\boxed{\vec{J} = \Sigma \vec{J}_i = \Sigma \rho_i \vec{v}_i}$$

其中*v*为带电粒子的运动速度

## 2、电荷守恒定律

1）电荷守恒定律积分方程

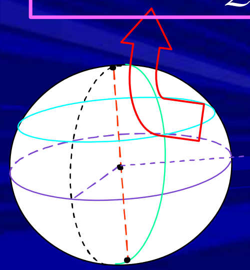
考察电流场中的任意闭合面，导出数学表达式。

**流出的电量=体内电量的减小量（负增量）**

流出电量 $\boxed{\Delta Q = I\Delta t = \oint \vec{J}\cdot d\vec{s}\,\Delta t}$

体内增量 $\boxed{= \dfrac{\partial Q}{\partial t}\Delta t = \dfrac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dv\Delta t = \int \dfrac{\partial \rho}{\partial t} dv\Delta t}$

$\boxed{\Delta tI = \Delta Q}$



$$\boxed{\oint \vec{J}\cdot d\vec{s}\,\Delta t = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv\Delta t}$$

$$\boxed{\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}$$

2）全空间电荷守恒定律

$$\boxed{\frac{dQ}{dt}=0} \Rightarrow \boxed{Q=C}$$

总电量不随时间变化

3）电荷守恒定律的微分方程

$$\boxed{\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=-\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV} \longrightarrow \boxed{\int(\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t})dv=0}$$

亦称电流连续性方程

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}$$

微分形式的电荷守恒律反映的是局限性关系

## 微分形式的电荷守恒律反映的物理本质

$\nabla\cdot\vec{J}>0 \quad \frac{\partial\rho}{\partial t}<0$ 产生电流线，电荷由此发出

$\nabla\cdot\vec{J}<0 \quad \frac{\partial\rho}{\partial t}>0$ 电流线终止点，电荷汇集此点

$\nabla\cdot\vec{J}=0 \quad \frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 电荷不在此处发出和集结

微分式表明某处有电荷减小，必然此处有电荷发往它处，反映了电荷虽然不停地运动，但其总量保持不变。

$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad \nabla\cdot\vec{J}=0$

稳恒情况电流线闭合，电流场为无源场。所以直流电路的工作状态一定要形成闭合回路。

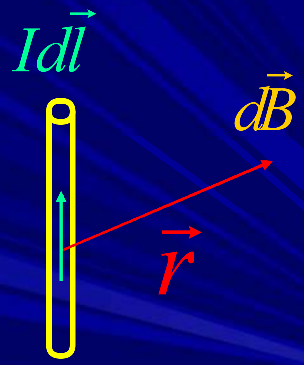
## 1.2.3. 毕——萨定律

### 1. 安培定律

$$d\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0 I_1 I_2 d\vec{l}_2\times(d\vec{l}_1\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

与库仑定律的作用方式非常类似。电流之间的作用通过磁场来传递

### 2. 毕——萨定律




| 线分布 | 体分布 |
| --- | --- |
| $d\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$ | $d\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{J}d\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$ |
| $\vec{B}=\oint_L\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$ | $\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\oint_V\dfrac{\vec{J}\times\vec{r}}{r^3}dV$ |

线分布与体分布的关系： $\vec{J}dV\Leftrightarrow Id\vec{l}$

## 1.2.4. 磁场的旋度与散度

### 1. 磁场的旋度

（由电磁学中已给出安培环路定理给出旋度，后再给出磁场旋度的来严格证明。）

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int \vec{J}\cdot d\vec{s}$$

$$\int (\nabla\times\vec{B})\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{J}\cdot d\vec{s}$$

由等式的时空任性知其被积函数应相等

$$\boxed{\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}}$$

电流激发的磁场为横向场，有旋场！

## 2. 磁场的散度

（由电磁学中已给出高斯定理给出散度，后再给出磁场散度的来严格证明。）

由磁场的高斯定理 $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_V\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)dV=0} \rightarrow \boxed{\therefore \quad \nabla\cdot\vec{B}=0}$$

由等式的时空任性知其被积函数应相等

## 3. 静磁场的微分方程

$\boxed{\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}}$ 有旋场，电流为激发磁场的物理源。

$\boxed{\nabla\cdot\vec{B}=0}$ 无源场，磁场线可能闭合

磁场的微分方程揭示了磁场的局域空间特性。

4. 磁场旋度和散度公式的证明

证明思路：从毕奥——萨伐尔定律出发，对其分别实散度和旋度运算。

（1）磁场散度 $\boxed{\nabla\cdot\vec{B}=0}$

（2）磁场旋度 $\boxed{\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}}$

（1） $\nabla\cdot\vec{B}=0$ 的证明

$$\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')\times\vec{r}}{r^3}dV'}=\frac{-\mu_0}{4\pi}\int\vec{J}(\vec{x}')\times\nabla\frac{1}{r}dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\frac{1}{r}\times\vec{J}(\vec{x}')dV'$$

$$\nabla\times(\vec{J}(\vec{x}')\frac{1}{r})=\nabla\frac{1}{r}\times\vec{J}(\vec{x}')+\frac{1}{r}\nabla\times\vec{J}(\vec{x}')\quad=\nabla\frac{1}{r}\times\vec{J}(\vec{x}')$$

$$\nabla\times(A\varphi)\ =\varphi\nabla\times A\ +(\nabla\varphi)\times A$$

$$\therefore\quad\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\times\left[\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\right]dV'\quad=\nabla\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}dV'\right]=\nabla\times\vec{A}$$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}dV'\qquad\therefore\qquad\nabla\cdot\vec{B}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})\equiv0$$

（2）$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}(\vec{x})$ 的证明

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}dV'$$

$$\nabla\times\vec{B}=\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\cdot\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}dV'\quad=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{J}(\vec{x}')\cdot\nabla\frac{1}{r}dV'$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{J}(\vec{x}')\cdot\nabla'\frac{1}{r}dV'$$

$$\nabla\cdot(\varphi\vec{A})=\varphi\nabla\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot(\nabla\varphi)$$

$$\nabla\frac{1}{r}=-\nabla'\frac{1}{r}$$

$$\nabla'\cdot(\vec{J}(\vec{x}')\frac{1}{r})=\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}')+(\nabla'\frac{1}{r})\cdot\vec{J}(\vec{x}')$$

$$\therefore\nabla\cdot\vec{A}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\cdot(\vec{J}(\vec{x}')\frac{1}{r})dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}')dV'$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\vec{J}(\vec{x}')\cdot\frac{1}{r}d\vec{S}'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\nabla\cdot\vec{J}(\vec{x}')}{r}dV'=0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}(\vec{x})$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r} dV'$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{x}') \nabla^2 \frac{1}{r} dV'$$

$$\delta(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r}$$

$$= -\mu_0 \int \vec{J}(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') dV'$$

$$= -\mu_0 \vec{J}(\vec{x})$$

$$\therefore \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}(\vec{x})$$