物理学专业必修课程

电动力学

主讲教师

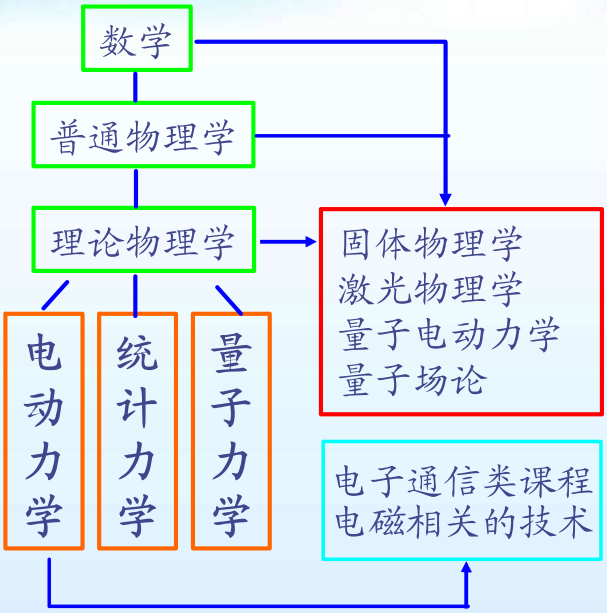
李　梅

绪 论

一、基本情况及要求

课程性质及关联结构:

电动力学是物理学科的一门重要基础理论课，是物理学的“四大力学”之一。



研究对象：运动规律以及与带电物质之间的相互作用电动力学主要研究电磁场的基本性质。

课程类型：物理学、材料物理学本科生

学时学分：72学时，4学分

先修要求：普通物理电磁学，数学物理方程

成绩评定：考试（６０%），
平时学习、作业（４０%）

一、知识目标

（1）系统深入地掌握电动力学的基本概念和基本规律和处理问题的基本方法以。为后续物理学习建构基础。

（2）系统领悟电动力学的基本科学思想和方法，培养科学创新意识与科学探索的求真精神。

（3）了解电动力学在物理学中的地位、作用及其对人类社会文明进程的影响，树立为人类文明而创新的科学价值观和为社会需要而工作的职业道德精神。

二、能力目标

（1）实践能力。运用电磁理论的知识思考、研究和解释电磁现象，具备教师指导下自主学习的能力。

（2）创新能力。认识电磁场物质与介质电磁性能，关注事物的特殊性、现象与本质之间的关联和差异，领悟电磁理论科学原创思想与智慧的精妙所在，培养科学创新能力。

电动力学

目录

第0章　绪论及数学准备

第1章　电磁现象的普遍规律

第2章　静电场

第3章　静磁场

第4章　电磁波的传播

第5章　狭义相对论

第6章　电磁波的辐射

第 7 章　带电粒子和电磁场的相互作用

主要参考书:

[1]《电动力学》郭硕鸿 高教出版社 第二版 1997
[2]《电动力学》蔡圣善等 高教出版社 第二版 2002
[3]《电动力学》虞福春 北京大学出版社 1992
[4]《电动力学题解》林璇英、张之翔 科学出版社 1999;
[5]《电动力学解题指导》王雪君 北京师范大学出版社 1998
[6] 经典电动力学(影印版)(第3版) John David Jackson 高等教育出版社 2004 .

二、电动力学与电磁学的联系与区别

认知范围：既讨论静场又讨论变化场，同时讨论狭义相对论情况下的电动力学规律形式。

认知深度：从矢量场论出发，总结电磁现象普遍规律，解决问题更具一般性。

认知方法：建立模型、求解方程、注重理论演绎与分析。

数学工具：矢量场论、张量分析初步、线性代数、数理方程、特殊函数 ………

三、电磁理论的发展简史

(1) 1675 库仑定律

(2) 1820 电流磁效应（毕－萨定律）

(3) 1822 安培作用力定律（电动力学一词开始使用）

(4) 1831 电磁感应（法拉第），场的思想

(5) 1856-1873 麦克斯韦方程，预言了电磁波的存在

(6) 1881-1887 迈克尔逊实验（1881），迈－莫雷实验（1887）

(7) 1888 赫兹证实电磁波存在

(8) 1905 狭义相对论（爱因斯坦“论运动物体的电动力学”）。


第零章
电动力学的数学基础
第一节、 矢量代数
第二节、 矢量场论复习
第三节、 δ函数

第一节

矢量代数复习

第一节 、矢量代数

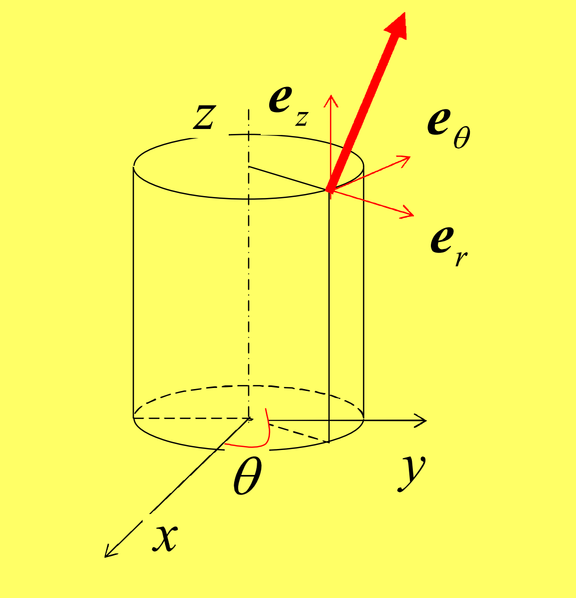
1. 矢量在三个常用坐标系中的表示

直角坐标系：$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} = \sum_{i=1}^{3} A_i\vec{e}_i$

柱坐标系：

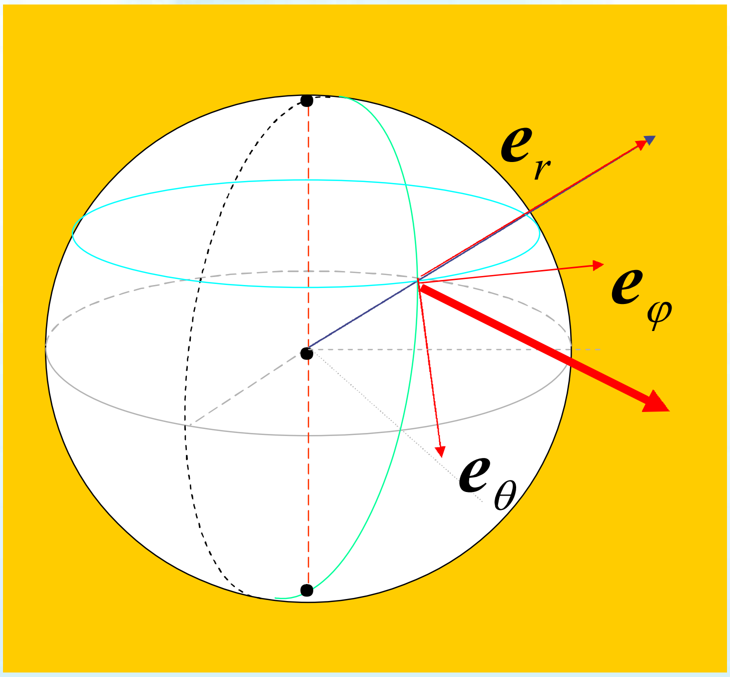
$$\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_z\vec{e}_z$$

$$= \sum_{i=1}^{3} A_i\vec{e}_i$$



球坐标系：

$$\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_\phi\vec{e}_\phi = \sum_{i=1}^{3} A_i\vec{e}_i$$



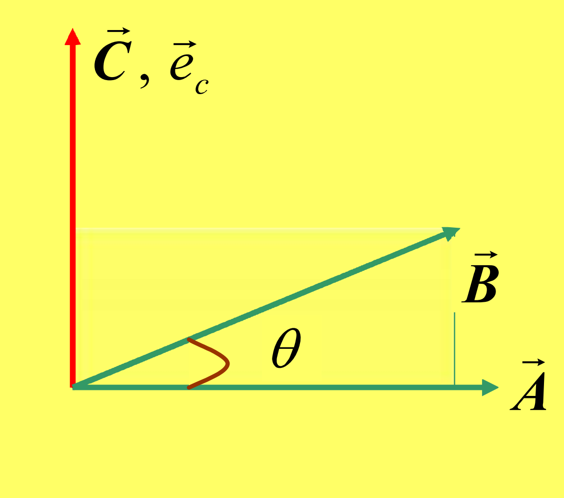
二. 矢量的代数运算加法

加法: $$\vec{A}+\vec{B}=\sum_{i=1}^{3}(A_i+B_i)\vec{e}_i$$

标积: $$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta=\sum_{i=1}^{3}A_iB_i$$

矢积: $$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=AB\sin\theta\vec{e}_c$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=AB\sin\theta\vec{e}_c=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} A_j B_k \vec{e}_i$$

$$C_i = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} A_j A_k$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i,\ j,\ k \text{ 顺序排列} \\ -1 & i,\ j,\ k \text{ 逆顺序排列} \\ 0 & i,\ j,\ k \text{ 两个或三个相等} \end{cases}$$

顺序排列: 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2

逆序排列: 2, 1, 3; 1, 3, 2 3, 2, 1;

两或三等排列: 1, 1, 3; 3, 3, 2; 2, 2, 2 ... 等

矢量代数中的两个重要公式:

混合积 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

双重矢量积 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{c})}_{\text{两边}}\vec{b}-\underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{b})}_{\text{相邻}}\vec{c}$

矢量微分:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\hat{\vec{A}}\frac{dA}{dt}+A\frac{d\hat{\vec{A}}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt}=\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}+\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}$$

注意顺序不能颠倒

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt}=\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}+\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}$$

三. 并矢与张量

1、张量的数学定义

$\vec{A}\vec{B}$ 两个矢量并排形成一个新的量，其具有**9**个分量

$$\overleftrightarrow{T} = \vec{A}\vec{B} = \sum_{i,j=1}^{3} A_i B_j \vec{e}_i \vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$$

$\vec{e}_i \vec{e}_j$ 为单位并矢，构成张量的基（9个分量）

$T_{ij} = A_i B_j$ 为在***ij***基上的分量

可以类比于矢量理解为张量基上的投影！

张量的矩阵表示

$$\vec{A}\vec{B} = A_1B_1\vec{e}_1\vec{e}_1 + A_1B_2\vec{e}_1\vec{e}_2 + A_1B_3\vec{e}_1\vec{e}_3 + A_2B_1\vec{e}_2\vec{e}_1 + A_2B_2\vec{e}_2\vec{e}_2 + A_2B_3\vec{e}_2\vec{e}_3 + A_3B_1\vec{e}_3\vec{e}_1 + A_3B_2\vec{e}_3\vec{e}_2 + A_3B_3\vec{e}_3\vec{e}_3$$

$$\overleftrightarrow{T} = \vec{A}\vec{B} \qquad T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{pmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{f} = \sum_{i=1}^{3} \delta_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j \Rightarrow f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2、张量的物理实例表示

当力作用于弹性体时，会产生9个方面的物理效应

$\vec{F}$ 在x方向上作用时，此时在xyz三个方向上产生形变，可以表示为 $l_{11}, \ l_{12}, \ l_{13}$

y方向上作用时，产生形变表示为 $l_{21}, \ l_{22}, \ l_{23}$

z方向上作用时，产生形变表示为 $l_{31}, \ l_{32}, \ l_{33}$

$$\overleftrightarrow{L} = \sum_{ij} l_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \Longrightarrow L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

由此可见物体形变需要用张量才能表示

3、张量的运算

张量的加法

$$\vec{\vec{T}}+\vec{\vec{V}}=\sum_{i,j}(T_{ij}+V_{ij})\vec{e}_i\vec{e}_j$$

张量的点积

运算遵守就近作用原则

$$\vec{A}\vec{B}\cdot\vec{C}=\vec{A}\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)=\vec{A}\left(\vec{C}\cdot\vec{B}\right)=\vec{A}\vec{C}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{C}\cdot\vec{A}\vec{B}=\left(\vec{C}\cdot\vec{A}\right)\vec{B}=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)=\vec{B}\vec{A}\cdot\vec{C}$$

张量的矢积乘

运算遵守就近作用原则

$$\begin{cases}\vec{A}\vec{B}\times\vec{C}=\vec{A}\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) & \text{并矢}\\ \vec{C}\times\vec{A}\vec{B}=\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)\vec{B} & \text{并矢}\end{cases}$$

两并矢的一次点乘

$$\vec{A}\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\vec{D}\right)=\vec{A}\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{D}=\vec{A}\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A}\vec{D}\neq\vec{C}\vec{D}\cdot\vec{A}\vec{B}$$

两并矢的二次点乘

运算遵守就近作用原则

$$\vec{A}\vec{B}:\vec{C}\vec{D}=\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\left(\vec{A}\cdot\vec{D}\right)$$

单位张量与矢量的点乘

$$\boxed{\overleftrightarrow{f}\cdot\vec{C}=\vec{C}\cdot\overleftrightarrow{f}=\vec{C}}$$

运算遵守就近作用原则

$$\boxed{\overleftrightarrow{f}\cdot\nabla=\nabla\cdot\overleftrightarrow{f}=\nabla}$$

4、张量分析

张量的散度

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x \cdot \overleftrightarrow{T} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y \cdot \overleftrightarrow{T} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \cdot \overleftrightarrow{T}$$

$$\nabla \cdot (\vec{f}\,\vec{g}) = (\nabla \cdot \vec{f})\vec{g} + \vec{f} \cdot (\nabla \vec{g})$$

张量的高斯定理

$$\oint_s d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{T} = \iiint_v dV \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$$

单位张量与张量的点乘、双点乘

$$\overleftrightarrow{I} \cdot \vec{A}\vec{B} = \vec{A}\vec{B} \cdot \overleftrightarrow{I} = \vec{A}\vec{B} \qquad \overleftrightarrow{I} : \vec{A}\vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

第二节

矢量场论复习

§2 矢量场论复习

一、场的概念

描述一定空间中连续分布的物理量。

标量场：全空间区域或部分空间区域各点都存在一个标量，这种标量点全体集合构成的区域称为标量场。

矢量场：全空间区域或部分空间区域中各点都存在一个矢量，这种矢量点的全体集合区域称为矢量场。

注意：

·数学中的场与物理上的物质场的内涵不同

·标量函数表征的是某一区域标量场的特征

·矢量函数表征的是某一区域矢量场的特征

场一般采用空间和时间坐标参数来描述：

$$\begin{cases} \text{标量场} & \varphi(x,y,z,t)=\varphi(\vec{x},t) \\ \text{矢量场} & \vec{A}(x,y,z,t)=\vec{A}(\vec{x},t) \end{cases}$$

稳恒场（稳定场、静场）：场与时间无关

变化场（时变场）：场函数与时间有关

场分析的数学运算工具

对已知场函数进行梯度、散度、旋度分析，可以了解场的各种性质.

二、标量场的梯度

∇ ——矢量微分算子，具有矢量与微分的双重运算特征

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

既具有矢量性质，又具有微分性质

矢量微分算符可以点乘、叉乘矢量函数;
矢量微分算符可以作用于标量函数 .

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{e}_z = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\vec{e}_i$$

梯度

(数学上) 梯度是一种对标量场实施的矢量微分运算

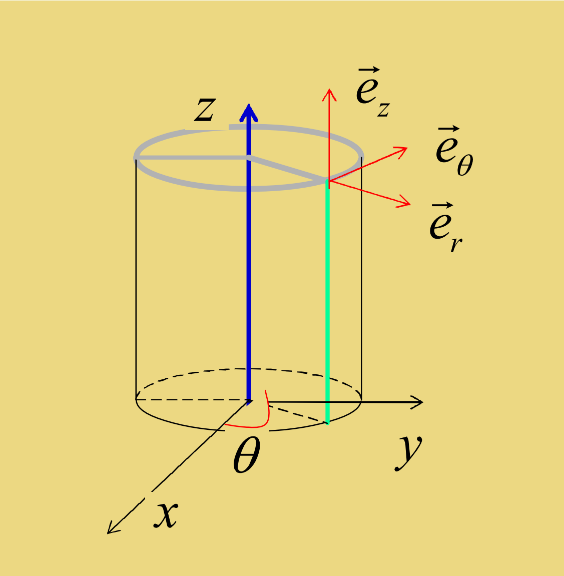
注意： $\nabla \varphi \neq \varphi \nabla$

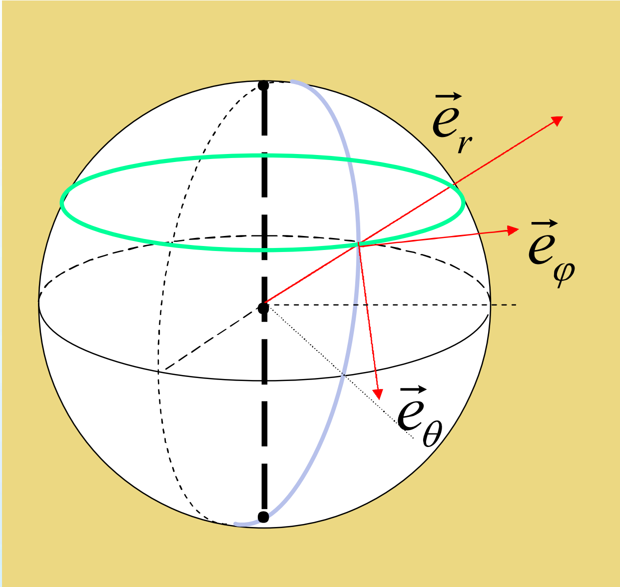
$$grad\varphi = \nabla \varphi$$

梯度在柱坐标和球坐标系中的表示:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z$$ 柱坐标

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi$$ 球坐标

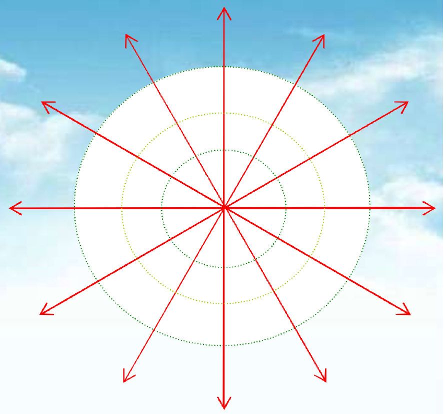




梯度应用实例:

①点电荷的势

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \nabla\varphi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$



②堤坝的高度变化

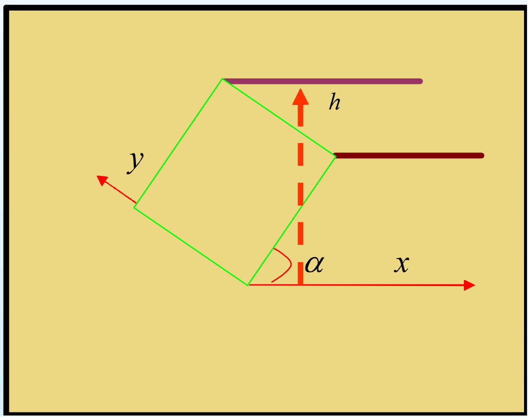
$$h = tg\alpha x$$

$$\nabla h = tg\alpha \vec{e}_x$$

h沿x方向变化最大，

沿y方向无变化（$\frac{\partial h}{\partial y} = 0$），

表征了高度的变化率——坝的倾斜度，故称之为梯度。



三、矢量场的散度

微分算子对矢量函数实施的标积运算，其结果为标量。

$\vec{v}$

直角坐标表示：

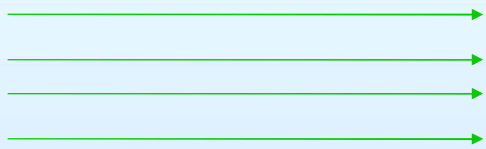
$$\nabla\cdot\vec{A}=\left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{e}_x A_x+\vec{e}_y A_y+\vec{e}_z A_z\right)=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

其柱坐标和球坐标表示参阅教材附录。

散度应用实例：

①矩形池均匀流动的池水速度

$\vec{v}$ 构成矢量场



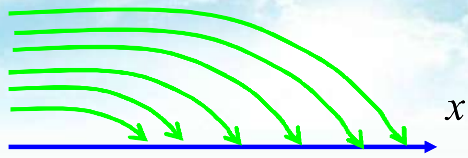
$\vec{A}=v\vec{e}_x \qquad \nabla\cdot\vec{\mathbf{A}}=0$

水流速度均为无源场，

水速流线为连续的无起点无终点线。

②一股水在干沙池中流动，水在沿途部分地被沙吸收，可设定水速为

$$\boxed{A=(B-x)e_x} \qquad x\le B$$



$$\nabla\cdot\vec{A}=-1<0$$

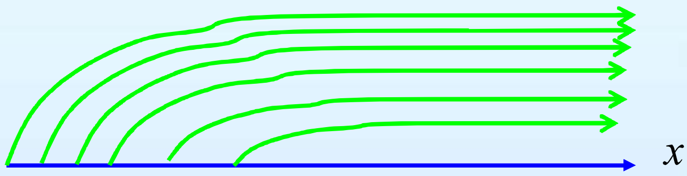
水流不断吸收，负源。

③如果沿着水槽不断有水向上冒，水的流速则不断增加。假定

$$\vec{A}=Bx\vec{e}_x$$

则 $\nabla\cdot\vec{A}=B>0$

处处有源！



综上所述

$\nabla \cdot \vec{A} = 0$ → 无源，水流速线不中断

$\nabla \cdot \vec{A} > 0$ → 有源，水流速线不断产生

$\nabla \cdot \vec{A} < 0$ → 有源，水流速线不断消失

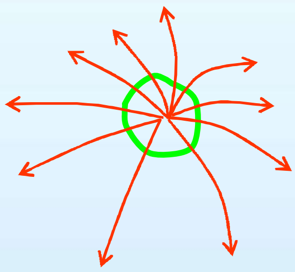
$\nabla \cdot \vec{A}$ 的大小表征了场源强弱，即源的强度大小。

高斯定理

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\boldsymbol{S}$$

散度的定义

$$\nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$



某点附近，单位体积内产生的力线数

三、矢量场的旋度

微分算子对矢量函数实施的矢积运算，其结果为矢量。

直角坐标表示:

$$\nabla\times\vec{A}=\vec{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\vec{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\vec{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

缩写表示式:

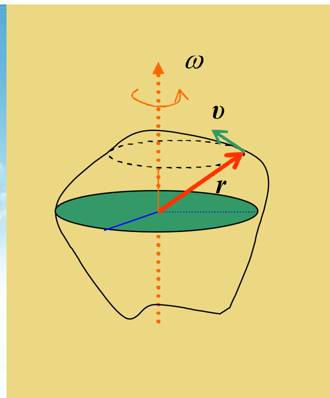
$$\nabla\times\vec{A}=(\partial_y A_z-\partial_z A_y)\vec{\boldsymbol{e}}_x+(\partial_z A_x-\partial_x A_z)\vec{\boldsymbol{e}}_y$$
$$+(\partial_x A_y-\partial_y A_x)\vec{\boldsymbol{e}}_z$$

柱坐标与球坐标表示参阅教材附录。

旋度应用实例

刚体绕固定轴的转动，其角速度为 $\vec{\omega}$

任意一点的速度为 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$



$$\boxed{\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z} \qquad \boxed{\vec{\omega} = \omega\vec{e}_x + \omega_y\vec{e}_y + \omega_z\vec{e}_z}$$

$$\boxed{v_x = \omega_y z - \omega_z y} \qquad v_y = \omega_z x - \omega_x z \qquad \boxed{v_z = \omega_x y - \omega_y x}$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{v})_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2\omega_x$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{v})_y = 2\omega_y$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{v})_z = 2\omega_z$$

$$\nabla \times \vec{v} = 2\vec{\omega}$$

$$\nabla \times \vec{v} = 2\vec{\omega}$$

说明：$\vec{v}$ 的旋度与转动角速度成正比，

$\vec{v}$ 的旋度大小表征了刚体旋转快慢。

四、微分算子的二级运算

$$\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0 \Longrightarrow \nabla \times \vec{f} = 0 \Longrightarrow \vec{f} = \nabla \varphi$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \Longrightarrow \nabla \cdot \vec{f} = 0 \Longrightarrow \vec{f} = \nabla \times \vec{A}$$

五、矢量场分析常用公式

1.关于中间变量函数的场微分公式和积分公式

$$\nabla f(u) = \frac{df}{du} \cdot \nabla u \qquad \nabla \cdot \vec{A}(u) = \frac{d\vec{A}}{du} \cdot \nabla u$$

$$\nabla \times \vec{A}(u) = \nabla u \times \frac{d\vec{A}}{du}$$

高斯公式: $\boxed{\int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}$

斯托克斯公式: $\iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l}$

2.矢量微分算符常用公式

1） $$\nabla(\varphi\psi)=(\nabla\varphi)\psi+\varphi\nabla\psi$$

2） $$\nabla\cdot(\varphi\vec{A})=\nabla\varphi\cdot\vec{A}+\varphi\nabla\cdot\vec{A}$$

3） $$\nabla\times(\varphi\vec{A})=\nabla\varphi\times\vec{A}+\varphi\nabla\times\vec{A}$$

4） $$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{B}-(\nabla\times\vec{B})\cdot\vec{A}$$

5） $$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\nabla\cdot\vec{B})\vec{A}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\nabla\cdot\vec{A})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

6） $$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$$

7） $$\vec{A}\times(\nabla\times\vec{A})=\frac{1}{2}\nabla A^2-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{A}$$

8） $$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

3.矢量微分算子运算规则

1.将 ∇ 看微分符号，对被作用积式函数进行微分运算

对不被 ∇ 作用的函数写下标C

2.将 ∇ 看作矢量符号，按矢量运算法则进行调整。

将被 ∇ 作用的函数放在 ∇ 后边，

将被 ∇ 作用的函数放在 ∇ 前边或者括号的外边

去掉函数的下标C

4.微分算子公式的证明实例

$$\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}$$

先证:

$$\nabla\left(\vec{A}_C\cdot\vec{B}\right)=\vec{A}_C\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)+\left(\vec{A}_C\cdot\nabla\right)\vec{B}$$

$$\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}_C\right)=\vec{B}_C\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)+\left(\vec{B}_C\cdot\nabla\right)\vec{A}$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

$$\vec{A}_C\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)=\nabla\left(\vec{A}_C\cdot\vec{B}\right)-\left(\vec{A}_C\cdot\nabla\right)\vec{B}$$

$$\vec{A}_C\rightarrow\vec{a}\qquad\nabla\rightarrow\vec{b}\qquad\vec{B}\rightarrow\vec{c}$$

$$\nabla\left(\vec{A}_C\cdot\vec{B}\right)=\vec{A}_C\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)+\left(\vec{A}_C\cdot\nabla\right)\vec{B}$$

同理 $\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}_C\right)=\nabla\left(\vec{B}_C\cdot\vec{A}\right)=\vec{B}_C\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)+\left(\vec{B}_C\cdot\nabla\right)\vec{A}$

$$\nabla\left(\vec{A}_C\cdot\vec{B}\right)=\vec{A}_C\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)+\left(\vec{A}_C\cdot\nabla\right)\vec{B} \qquad \nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}_C\right)=\vec{B}_C\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)+\left(\vec{B}_C\cdot\nabla\right)\vec{A}$$

再证： $\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}$

$$\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}_C\right)+\nabla\left(\vec{A}_C\cdot\vec{B}\right)$$

微分运算

去掉脚标

$$\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}$$

证7式：

$$\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\frac{1}{2}\nabla A^2-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{A}$$

$$\vec{A}_c\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla(\vec{A}\cdot\vec{A}_c)-\left(\vec{A}_c\cdot\nabla\right)\vec{A}$$

$$\vec{A}_c\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\frac{1}{2}\nabla(\vec{A}\cdot\vec{A})-\left(\vec{A}_c\cdot\nabla\right)\vec{A}$$

$$\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\frac{1}{2}\nabla\vec{A}^2-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{A}$$

第三节

δ 函数

一. δ函数的定义

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty & x=x_0\\ 0 & x\neq x_0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)dx=1$$

注意:

此定义是通过代数式和积分式来共同完成

二. δ函数的性质

$$\delta(x)=\delta(-x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)$$

$$\delta(ax)=\frac{1}{a}\delta(x)$$

三.几种常用的表达式

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega$$ → δ 函数的积分表示

$$\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{\pi x}$$ → δ 函数的极限表示

$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}})=\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$ → δ 函数的三维表示

$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}$$ → δ 函数的微分表示

四. δ 函数表示式的证明等式

证明 δ 函数等式是否成立关键步骤:

其一，证明代数式成立:

$r \to 0$， δ 函数值 $\to \infty$;

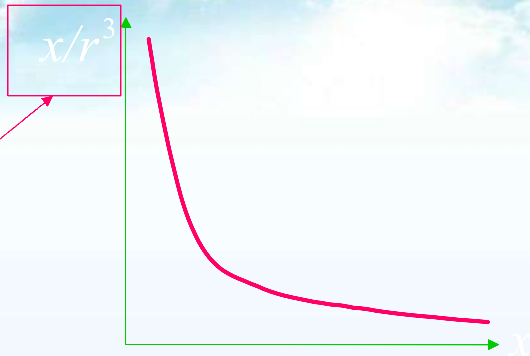
$r \neq 0$， δ 函数值为 0。

其二，证明对应的积分式成立:

证明等式两边积分值是否相等。

证明1: $\delta(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}$ 的代数式成立

证： $r\neq 0$ $\quad \nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}=-\nabla^2\frac{1}{r}=0$



$r\to 0$

$$\frac{\vec{r}}{r^3}=(\frac{x\vec{e}_x}{r^3}+\frac{y\vec{e}_y}{r^3}+\frac{z\vec{e}_z}{r^3})$$

$$\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}=\boxed{\frac{\partial(x/r^3)}{\partial x}}+\frac{\partial(y/r^3)}{\partial y}+\frac{\partial(z/r^3)}{\partial z})\ \boxed{\to\ \infty}$$

$$\boxed{\delta(\vec{r})=\begin{cases}\infty & r=0\\ 0 & r\neq 0\end{cases}}$$

证明2: $\delta(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}$ 对应的积分式成立

$$\iiint\delta(\vec{r})dV=\boxed{\frac{1}{4\pi}\iiint\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}dV}$$

?? 积分是否相等

$$\boxed{\frac{1}{4\pi}\int_V\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}dV}$$

运用高斯定理

$$=\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{dS}{r^2}=\frac{1}{4\pi}\oint_S d\Omega=1$$

$$\iiint\delta(\vec{r})dV=1$$

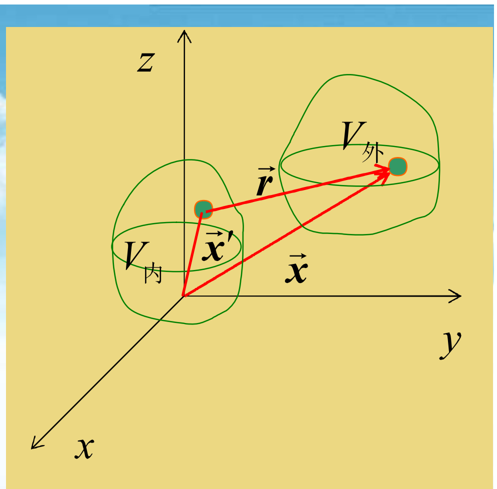
根据积分定义

可见两边的积分式相等

作如下坐标变换

$$\vec{r}=(x-x')\vec{e}_x+(y-y')\vec{e}_y+(z-z')\vec{e}_z$$

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$



对应的 δ 函数的表示变为:

$$\delta(\vec{r})=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

$$=\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}$$

因为 x',y',z' 在此是平移量，为常数

所以算符▽仍然可视为是对x,y,z作用,

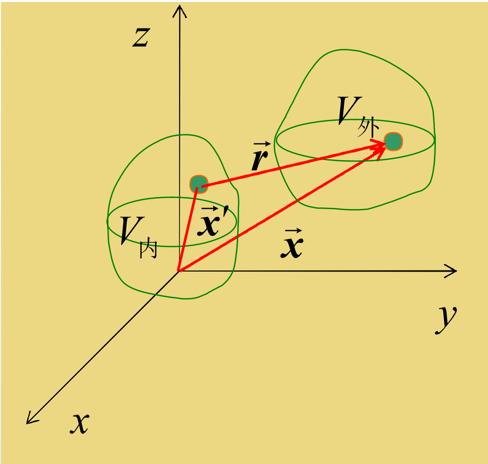
上述表达式同样成立

带有场点和源点坐标的 δ 函数微分算子表示式

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

$$= \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}$$

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} = \vec{x}' \\ 0, & \vec{x} \neq \vec{x}' \end{cases}$$



五、δ函数的常见的坐标表示形式

一维

$$\delta(x-a)=\begin{cases}0 & x\neq a\\ \infty & x=a\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,dx=\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\delta(x-a)\,dx=1$$

三维

$$\boxed{\delta(\vec{r})=\delta(\vec{x}-\vec{x}')=\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)}$$

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

$$=\frac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(z-z_0)$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)$$