

2001 年全国硕士研究生入学统一考试

理工数学一试题详解及评析

一、 填空题

(1) 设 $y = e^x (c_1 \sin x + c_2 \cos x)$ (c_1, c_2 为任意常数) 为某二阶常系数线性齐次微分方程的同解, 则该方程为_____.

【答】 $y'' - 2y' + 2y = 0$.

【详解】 方法一 看出所给解对应的特征根为 $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, 从而特征方程为 $(\lambda - (1+i))$,

$(\lambda - (1-i)) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, 于是所求方程为 $y'' - 2y' + 2y = 0$.

方法二 将已知解代入 $y'' + by' + cy = 0$, 得

$e^x \sin x \cdot (b(c_1 - c_2) + cc_1 - 2c_2) + e^x \cos x \cdot (b(c_1 + c_2) + cc_2 + 2c_1)$. 由于 $e^x \sin x$ 与 $e^x \cos x$

线性无关, 故 $b(c_1 - c_2) + cc_1 = 2c_2, b(c_1 + c_2) + cc_2 = -2c_1$, 解得 $b = -2, c = 2$

显然解法 2 较解法 1 麻烦.

方法三、由通解 $y = e^x (c_1 \sin x + c_2 \cos x)$, 求得

$$y' = e^x ((c_1 - c_2) \sin x + (c_1 + c_2) \cos x)$$

$$y'' = e^x (-2c_2 \sin x + 2c_1 \cos x)$$

从这三个式子消去 c_1 与 c_2 , 得 $y'' - 2y' + 2y = 0$

(2) 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)|_{(1,-2,2)} =$ _____.

【答】 $\frac{2}{3}$.

【详解】 根据定义有

$$\operatorname{grad} r = \frac{\partial r}{\partial x} i + \frac{\partial r}{\partial y} j + \frac{\partial r}{\partial z} k = \frac{x}{r} i + \frac{y}{r} j + \frac{z}{r} k$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r) = \frac{\partial \left(\frac{x}{r}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{y}{r}\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{z}{r}\right)}{\partial z} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} = \frac{2r^2}{r^3} = \frac{2}{r}$$

于是 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)|_{(1,-2,2)} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}$

(3) 交换二次积分的积分次序: $\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx =$ _____.

【答】 $\int_1^2 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$.

【详解】 因为

$$\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx = -\int_{-1}^0 dy \int_{1-y}^2 f(x, y) dx,$$

积分区域为 $D = \{(x, y) | -1 \leq y \leq 0, 1 - y \leq x \leq 2\}$,

又可将 D 改写为

$$D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 1 - x \leq y \leq 2\},$$

于是有

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx &= -\int_{-1}^0 dy \int_{1-y}^2 f(x, y) dx = -\int_1^2 dx \int_{-x}^0 f(x, y) dy \\ &= \int_1^2 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy \end{aligned}$$

(4) 设矩阵 A 满足 $A^2 + A - 4E = O$, 其中 E 为单位矩阵, 则 $(A - E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 $\frac{1}{2}(A + 2E)$.

【答】 由题设, $A^2 + A - 4E = O$,

有 $A^2 + A - 2E = 2E$,

$$(A - E)(A + 2E) = 2E,$$

也即 $(A - E) \cdot \frac{1}{2}(A + 2E) = E$,

故 $(A - E)^{-1} = \frac{1}{2}(A + 2E)$

(5) 设随机变量 X 的方差为 2, 则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X - E(X)| \geq 2\} \leq \underline{\hspace{2cm}}$.

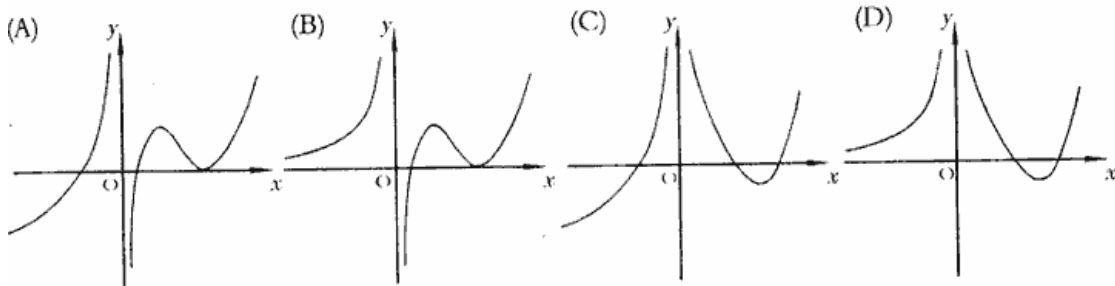
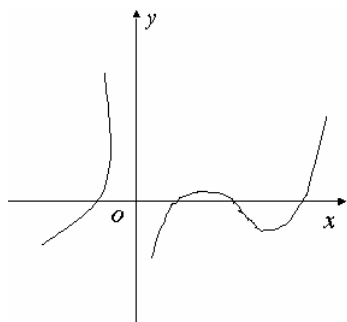
【答】 $\frac{1}{2}$.

【详解】 根据切比雪夫不等式有

$$P\{|X - E(X)| \geq 2\} \leq \frac{D(X)}{2^2} = \frac{1}{2}$$

二、选择题

(1) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y = f(x)$ 的图形如右图所示, 则导函数 $y = f'(x)$ 的图形为



【 】

【答】 应选 (D)

【详解】 从题设图形可见,在 y 轴的左侧,曲线 $y = f(x)$ 是严格单调增加的,因此当 $x < 0$ 时,一定有 $f'(x) > 0$ 对应 $y = f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方,由此可排除 (A), (C);

又 $y = f(x)$ 的图形在 y 轴右侧有三个零点,因此由罗尔中值定理知,其导函数 $y = f'(x)$ 图形在 y 轴一定有两个零点,进一步可排除 (B).

故正确答案为 (D).

(2) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 附近有定义,且 $f'_x(0, 0) = 3, f'_y(0, 0) = 1$, 则

(A) $dz|_{(0,0)} = 3dx + dy.$

(B) 曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的法向量为 $\{3, 1, 1\}$

(C) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为 $\{1, 0, 3\}$

(D) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为 $\{3, 0, 1\}$

【 】

【答】 应选 (C)

【详解】 题设只知道一点的偏导数存在,但不一定可微,因此可立即排除 (A); 至于 (B), (C), (D) 则需要通过具体的计算才能进行区分,

令 $F(x, y, z) = z - f(x, y)$, 则有

$$F'_x = -f'_x, F'_y = -f'_y, F'_z = 1$$

因此过点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的法向量为 $\pm\{-3, -1, 1\}$ ，可排除 (B)；

曲线点 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 可表示为参数形式： $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = f(x, 0) \end{cases}$ ，其中点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为

$$\pm\{1, 0, f'_x(0, 0)\} = \pm\{1, 0, 3\}$$

故正确选项为 (C)。

(3) 设 $f(0) = 0$ ，则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 可导的充要条件为

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh)$ 存在.

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在.

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sinh)$ 存在.

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$ 存在

【 】

【答】 应选 (B)。

【详解】 因为

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h) \stackrel{1 - e^h = x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{x}{\ln(1-x)}$$

可见，若 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 可导，则极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 一定存在；反过来，若 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在，则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \stackrel{x = 1 - e^h}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h} \cdot \frac{h}{1 - e^h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h}$$

存在，即 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 可导，因此正确选项为 (B)。

至于 (A), (C), (D) 均为必要而非充分条件，可举反例说明不成立。比如， $f(x) = |x|$ ，在 $x = 0$ 处不可导，但

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|1 - \cosh|}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh}{h^2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sinh) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h - \sinh|}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1 - \sinh}{h^3} \right| \cdot |h| = 0 \end{aligned}$$

均存在，可排除 (A) 及 (C)。

又如 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处不可导，但

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = 0$$

存在, 进一步可排除 (D).

$$(4) \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } A \text{ 与 } B$$

(A) 合同且相似

(B) 合同但不相似

(C) 不合同但相似

(D) 不合同且不相似

【 】

【答】 应选(A)

【详解】 因为

A 是实对称矩阵, 且其特征值为: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, 故存在正交矩阵 Q , 使得

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见, 则 A 与 B 既合同又相似.

(5) 将一枚硬币重复掷 n 次, 以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数, 则 X 和 Y 的相关系数等于

(A) -1

(B) 0

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 1

【 】

【答】 应选 (A)

【详解】 设 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数, 则有 $Y = n - X$, 因此 X 和 Y 的相关系数为 $r = -1$

三、求 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$

【详解】

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx &= \frac{1}{2} \int \arctan e^x d(e^{-2x}) \\ &= -\frac{1}{2} \left(e^{-2x} \arctan e^x - \int \frac{de^x}{e^{2x}(1+e^{2x})} \right) \\ &= -\frac{1}{2} (e^{-2x} \arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x) + C \end{aligned}$$

四、设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处可微, 且

$$f(1,1)=1, \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=2, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=3, \varphi(x)=f(x, f(x,x)).$$

$$\text{求 } \frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}$$

【详解】 由题设, 有 $\varphi(1)=f(1, f(1,1))=f(1,1)=1$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1} &= \left[3\varphi^2(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right] \Big|_{x=1} \\ &= 3\varphi^2(x) \left[f'_x(x, f(x,x)) + f'_y(x, f(x,x))(f'_x(x,x) + f'_y(x,x)) \right] \Big|_{x=1} \\ &= 3 \cdot 1 \cdot [2 + 3(2+3)] = 51 \end{aligned}$$

五、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的

和.

【详解】 因 $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, x \in (-1,1)$

$$\text{故 } \arctan x = \int_0^x (\arctan x)' dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in [-1,1]$$

于是

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{2n+1} x^{2n}, x \in [-1,1] \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2} [f(1) - 1] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

六、计算 $I = \oint_L (y^2 - z^2) dx + (2z^2 - x^2) dy + (3x^2 - y^2) dz$, 其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线, 从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向.

【详解 1】 记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围成部分的上侧, D 为 S 在 xOy 坐标面上的投影.

由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S (-2y - 4z)dydz + (-2z - 6x)dzdx + (-2x - 6y)dxdy \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (4x + 2y + 3z)dS \\
&= -2 \iint_D (x - y + 6)dxdy \\
&= -12 \iint_D dxdy \\
&= -24.
\end{aligned}$$

【详解 2】转换投影法.用斯托克斯公式,取平面 $x + y + z = 2$ 被 L 所围成的部分为 S ,按斯托克斯公式的规定,它的方向向上, S 在 xOy 平面上的投影域记为

$D, D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$. S 为 $z = 2 - x - y, \frac{\partial z}{\partial x} = -1, \frac{\partial z}{\partial y} = -1$, 于是

$$\begin{aligned}
I &= \oint_L (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz \\
&= \iint_S (-2y - 4z)dydz + (-2z - 6x)dzdx + (-2x - 6y)dxdy \\
&= \iint_S \{-2y - 4z, -2z - 6x, -2x - 2y\} \cdot \left\{ -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right\} dxdy \\
&= -2 \iint_S (4x + 2y + 3z)dxdy = -2 \iint_D (x - y + 6)dxdy \\
&= -12 \iint_D dxdy = -24
\end{aligned}$$

其中 $\iint_D (x - y)dxdy = \iint_D xdx dy = -\iint_D ydx dy = 0 - 0 = 0$, 用得性质: x 为 x 得奇函数, D 对称于 y 轴; y 为 y 的奇函数, D 对称于 x 轴;积分均应为零.

【详解 3】

降维法,取 S 如解法 1 中定义,代入 I 中,

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{L_1} (y^2 - (2 - x - y)^2)dx + (2((2 - x - y)^2 - x^2))dy + (3x^2 - y^2)(-dx - dy) \\
&= \oint_{L_1} (y^2 - 4x^2 - 4xy + 4x + 4y - 4)dx + (3y^2 - 2x^2 + 8xy - 8x - 8y + 8)dy \\
&\quad \underline{\text{格林公式}} - 2 \iint_D (x - y + 6)dxdy = -24
\end{aligned}$$

其中, L_1 为 L 在 xOy 平面上投影,逆时针.

【详解 4】

逐个投影法,由斯托克斯公式

$$I_1 = \iint_S (-2y - 4z)dydz - 2 \iint_D (y + 2z)dydz,$$

其中 $D_{yz} = \{(y, z) \mid |2 - y - z| + |y| \leq 1\}$, 分别令 $y \geq 0, y \leq 0, 2 - y - z \geq 0, 2 - y - z \leq 0$, 可得
到 D_{yz} 的 4 条边的方程:

右: $2y + z = 3$; 上: $z = 3$; 左: $2y + z = 1$; 下: $z = 1$.

$$\text{于是 } I_1 = -2 \int_1^3 dz \int_{\frac{1}{2}(1-z)}^{\frac{1}{2}(3-z)} (y + 2z) dy = -16$$

$$\text{类似地, } I_2 = -2 \iint_S (2 + 3x) dz dx = -8$$

$$I_3 = -2 \iint_S (x + y) dx dy = 0 \quad (\text{由奇、偶数及对称性})$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -24$$

【详解 5】

参数法. $L: |x| + |y| = 1, z = 2 - x - y$

当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时, $L_1: y = 1 - x, z = 2 - x - y, x$ 从 1 到 0.

$$\begin{aligned} & \int_{L_1} (y^2 - z^2) dx + (2z^2 - x^2) dy + (3x^2 - y^2) dz \\ &= \int_1^0 [(1-x)^2 - 1 + (2-x^2)(-1)] \\ &= \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

当 $x \leq 0, y \geq 0, L_2: y = 1 + x, z = 1 - 2x, x$ 从 0 到 -1

$$\int_{L_2} = \int_0^{-1} (2x + 4) = -3$$

当 $x \leq 0, y \leq 0, L_3: y = 1 - x, z = 3, x$ 从 -1 到 0

$$\int_{L_3} = \int_{-1}^0 (2x^2 + 2x - 26) dx = -\frac{79}{3}$$

当 $x \geq 0, y \leq 0, L_4: y = x - 1, z = 3 - 2x, x$ 从 0 到 1

$$\int_{L_4} = \int_0^1 (-18x + 12) dx = 3.$$

$$I = \int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} + \int_{L_4} = -24$$

七、设 $y = f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x) \neq 0$, 试证:

(1) 对于 $(-1, 1)$ 内的任意 $x \neq 0$, 存在唯一的 $\theta(x) \in (0, 1)$, 使 $f(x) = f(0) + xf'[\theta(x)x]$ 成立;

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

【详解 1】

(1) 任给非零 $x \in (-1, 1)$, 由拉格朗日中值定理得

$$f(x) = f(0) + xf'[\theta(x)x] \quad (0 < \theta(x) < 1)$$

因为 $f''(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内连续且 $f''(x) \neq 0$, 所以 $f''(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内不变号, 不妨设 $f''(x) > 0$,

则 $f''(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内严格单调且增加, 故唯一.

(2) 对于非零 $x \in (-1, 1)$, 由拉格朗日中值定理得

$$f(x) = f(0) + xf'[\theta(x)x] \quad (0 < \theta(x) < 1)$$

于是有

$$\frac{f'[\theta(x)x] - f'(0)}{x} = \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2}$$

上式两边取极限, 得

$$\text{左端} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'[\theta(x)x] - f'(0)}{\theta(x)x} \theta(x) = f''(0) \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x)$$

$$\text{右端} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{1}{2} f''(0)$$

$$\text{故} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

【详解 2】

(1) 同【详解 1】.

(2) 由泰勒公式得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(\xi)x^2, \quad \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}$$

所以

$$xf'[\theta(x)x] = f(x) - f(0) = f'(0)x + \frac{1}{2} f''(\xi)x^2,$$

从而

$$\frac{f'[\theta(x)x] - f'(0)}{\theta(x)x} \theta(x) = \frac{1}{2} f''(\xi),$$

$$\text{由于} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'[\theta(x)x] - f'(0)}{\theta(x)x} = f''(0), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} f''(\xi) = f''(0)$$

$$\text{故} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

【详解3】

(1) 同【详解1】.

(2) 因 $f''(x) \neq 0$, 故 $f'(x)$ 存在单值连续可导的反函数, 记为 $\varphi(x)$, 则有

$$\theta(x) \cdot x = \varphi \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} \right],$$

所以
$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} \right] = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} \right]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi' \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} \right] \cdot \frac{xf'(x) - f(x) + f(0)}{x^2} \\ &= \varphi' [f'(0)] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf''(x)}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \varphi' [f'(0)] f'(0) \end{aligned}$$

但因 $\varphi[f'(x)] = x$, 两边对 x 求导, 有

$$\varphi'[f'(x)] f''(x) = 1, \text{ 以 } x=0 \text{ 代入,}$$

于是有
$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

【详解4】

(1) 同【详解1】.

(2) 由 $f(x) = f(0) + f'(\theta(x)x)x$, 将 $f'(\theta(x)x)$ 再展开, 有

$$f'(\theta(x)x) = f'(0) + f''(0)\theta(x)x + o(\theta(x)x)$$

代入上式, 得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\theta(x)x^2 + o(\theta(x)x)x$$

所以

$$\theta(x) = \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - o(\theta(x)x)x}{f''(0)x}$$

令 $x \rightarrow 0$ 取极限,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) + f'(0)x}{x^2} = \frac{1}{2} f''(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(\theta(x)x)x}{x^2} = 0.$$

八、设有一高度为 $h(t)$ (t 为时间) 的雪堆再融化过程中, 其侧面积满足方程

$$z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)} \quad (\text{设长度单位为厘米, 时间单位为小时}), \text{ 已知体积减少的速率与侧面}$$

积成正比 (比例系数 0.9), 问高度为 130 厘米) 的雪堆全部融化需多少小时?

【详解】

记 V 为雪堆体积, S 为雪堆的侧面积, 则

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{h(t)} dz = \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}[h(t)^2 - h(t)z]} dx dy \\ &= \int_0^{h(t)} \frac{1}{2} \pi [h(t)^2 - h(t)z] dz \\ &= \frac{\pi}{4} h^3(t) \\ S &= \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{h^2(t)}{2}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{h^2(t)}{2}} \sqrt{1 + \frac{16(x^2 + y^2)}{h^2(t)}} dx dy \\ &= \frac{2\pi}{h(t)} \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} [h^2(t) + 16r^2]^{\frac{1}{2}} r dr \\ &= \frac{13\pi h^2(t)}{12} \end{aligned}$$

由题意知 $\frac{dV}{dt} = -0.9S(t)$, 将上述 $V(t)$ 和 $S(t)$ 代入, 得 $\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{13}{10}$

解得
$$h(t) = -\frac{13}{10}t + C$$

由 $h(0) = 130$, 得

$$h(t) = -\frac{13}{10}t + 130.$$

令 $h(t) \rightarrow 0$ 得 $t = 100$ (小时).

因此高度为 130 厘米得雪堆全部融化所需要时间为 100 小时.

九、设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系,

$\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2, \beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3, \dots, \beta_s = t_1\alpha_s + t_2\alpha_1$, 其中 t_1, t_2 为实常数. 试问 t_1, t_2 满足什么

关系时, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 也为 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

【详解】

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 $Ax=0$ 的解. 下面证明 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关. 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

$$\text{即 } (t_1k_1 + t_2k_s)\alpha_1 + (t_2k_1 + t_1k_2)\alpha_2 + \dots + (t_2k_{s-1} + t_1k_s)\alpha_s = 0$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 因此其系数全为零, 即

$$\begin{cases} t_1k_1 + t_2k_s = 0 \\ t_2k_1 + t_1k_2 = 0 \\ \vdots \\ t_2k_{s-1} + t_1k_s = 0 \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \end{vmatrix} = t_1^s + (-1)t_2^s$$

可见, 当 $t_1^s + (-1)t_2^s \neq 0$, 即当 s 为偶数, $t_1 \neq \pm t_2$; 当 s 为奇数, $t_1 \neq t_2$ 时, 上述方程组只

有零解 $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$, 因此向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关,

从而 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 也为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

十、已知 3 阶矩阵 A 与三维向量 x , 使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关, 且满足

$$A^3x = 3Ax - 2A^2x$$

(1) 记 $P = (x, Ax, A^2x)$, 求 2 阶矩阵 B , 使 $A = PBP^{-1}$;

(2) 计算行列式 $|A + E|$.

【详解】

(1) 方法一:

因为

$$Ax = Ax$$

$$A(Ax) = A^2x$$

$$A(A^2x) = A^3x = 3Ax - 2A^2x$$

于是综合上述三式有

$$\begin{aligned} A(x, Ax, A^2x) &= (Ax, A^2x, A^3x) = (Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x) \\ &= (x, Ax, A^2x) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{即 } AP = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = PB$$

$$\text{也即 } A = PBP^{-1}; \text{ 其中 } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

方法二：

$$\text{设 } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \text{ 则由 } AP = PB \text{ 得}$$

$$(Ax, A^2x, A^3x) = (x, Ax, A^2x) \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix},$$

上式可写成

$$Ax = a_1x + b_1Ax + c_1A^2x, \quad (1)$$

$$A^2x = a_2x + b_2Ax + c_2A^2x, \quad (2)$$

$$A^3x = a_3x + b_3Ax + c_3A^2x, \quad (3)$$

将 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$ 代入 (3) 式得

$$3Ax - 2A^2x = a_3x + b_3Ax + c_3A^2x \quad (4)$$

由于 x, Ax, A^2x 线性无关，故

$$\text{由 (1) 式可得 } a_1 = c_1 = 0, b_1 = 1;$$

$$\text{由 (2) 式可得 } a_2 = b_2 = 0, c_2 = 1;$$

$$\text{由 (4) 式可得 } a_3 = 0, b_3 = 0, c_3 = -2;$$

故

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

方法三：

将 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$ 改写成

$$A(A^2x - Ax) = -3(A^2x - Ax)$$

故 $\lambda_1 = -3$ 为 A 的特征值， $A^2x - Ax$ 为属于 -3 的特征向量；

$\lambda_2 = 1$ 为 A 的特征值， $A^2x + 3Ax$ 为属于 1 的特征向量；

$\lambda_3 = 0$ 为 A 的特征值， $A^2x + 2Ax - 3Ax$ 为属于 -3 的特征向量；

令

$$Q = (x, Ax, A^2x) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} P^{-1}AP \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} B \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

但另一方面， Q 为特征向量组成的矩阵，所以 $Q^{-1}AQ$ 为由对应的特征值组成的对角矩阵：

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(2) 由 (1) 知， A 与 B 相似，故 $A+E$ 与 $B+E$ 也相似，于是有

$$|A+E| = |B+E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

十一、设某班车起点站上客人数 X 服从参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概

率为 $P(0 < P < 1)$ ，且途中下车与否相互独立，以 Y 表示在中途下车的人数，求：

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率；

(2) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布。

【详解】

(1) 求在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率，相当于求条件概率

$$P\{Y = m | X = n\},$$

而由题设知，此条件概率服从二项分布，

因此有：

$$P\{Y = m | X = n\} = C_n^m P^m (1-P)^{n-m}, 0 \leq m \leq n, n = 0, 1, 2, \dots$$

(2) 利用乘法公式，得

$$\begin{aligned} P\{X = n | Y = m\} &= P\{Y = m | X = n\} P\{X = n\} \\ &= C_n^m P^m (1-P)^{n-m} \cdot \frac{e^{-\lambda}}{n!} \lambda^n, 0 \leq m \leq n, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

十二、设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$ ，从该总体中抽取简单随机样本

$X_1, X_2, \dots, X_{2n} (n \geq 2)$ 其样本均值为 $\bar{X} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$ ，求统计量 $Y = \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$ 的

数学期望 $E(Y)$ 。

【详解】

记 $\bar{X}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{X}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{n+i}$ 则有 $2\bar{X} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2$

因此

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left[\sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2\right] = E\left\{\sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X}_1) + (X_{n+i} - \bar{X}_2)]^2\right\} \\ &= E\left\{\sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X}_1)^2 + 2(X_i - \bar{X}_1)(X_{n+i} - \bar{X}_2) + (X_{n+i} - \bar{X}_2)^2]\right\} \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_1)^2\right] + 0 + E\left[\sum_{i=1}^n (X_{n+i} - \bar{X}_2)^2\right] \\ &= (n-1)\sigma^2 + (n-1)\sigma^2 \\ &= 2(n-1)\sigma^2 \end{aligned}$$