

1999 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题详解及评析

一、填空题

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 $\frac{1}{3}$

【详解 1】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

【详解 2】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(2) $\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 $\sin x^2$.

【详解】

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt &\stackrel{x-t=u}{=} \frac{d}{dx} \int_x^0 (-\sin u^2) du \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^x \sin u^2 du \\ &= \sin x^2 \end{aligned}$$

故本题应填 $\sin x^2$

(3) $y' - 4y = e^{2x}$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 $y = C_1 e^{-2x} + \left(C_2 + \frac{1}{4}x\right)e^{2x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

【详解】 特征方程为: $\lambda^2 - 4 = 0$, 解得 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$

故 $y'' - 4y = 0$ 的通解为 $y_1 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$, 由于非齐次项为 $f(x) = e^{2x}$, $a = 2$ 为特征方程

的单根, 因此原方程的特解可设为 $y^* = A x e^{2x}$, 代入原方程可求得 $A = \frac{1}{4}$,

故所求通解为

$$y = y_1 + y^* = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4} x e^{2x}$$

故本题应填 $y = C_1 e^{-2x} + \left(C_2 + \frac{1}{4}x\right)e^{2x}$,

(4) 设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1, 则 A 的 n 个特征值是_____.

【答】 $n, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-1}$

【详解】 因为

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - n & -1 & \cdots & -1 \\ \lambda - n & \lambda - 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda - n & -1 & \cdots & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda - n \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

故矩阵 A 的 n 个特征值是 n 和 0 ($n-1$ 重)

因此本题应填 $n, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-1}$.

(5) 设两两相互独立的三事件 A, B 和 C 满足条件: $ABC = \phi, P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$,

且 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$, 则 $P(A) =$ _____.

【答】 $\frac{1}{4}$.

【详解】 根据加法公式有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AC) - P(AB) - P(BC) + P(ABC)$$

由题 A, B 和 C 两两相互独立, $ABC = \phi, P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$, 因此有

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = P^2(A),$$

$$P(ABC) = P(\phi) = 0,$$

$$\text{从而 } P(A \cup B \cup C) = 3P(A) - 3P^2(A) = \frac{9}{16}$$

$$\text{解得 } P(A) = \frac{3}{4}, P(A) = \frac{1}{4}$$

$$\text{又根据题设 } P(A) < \frac{1}{2}, \text{ 故 } P(A) = \frac{1}{4}$$

二、选择题

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是其原函数, 则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数.

【 】

【答】 应选 (A)

【详解】 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$, 于是

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C \stackrel{u=-t}{=} \int_0^x f(-u)d(-u) + C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时, $f(-u) = -f(u)$, 从而有

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^x f(u)du + C \\ &= \int_0^x f(t)dt + C = F(x) \end{aligned}$$

即 $F(x)$ 为偶函数.

故 (A) 为正确选项. 至于 (B), (C), (D) 可分别举反例如下:

$f(x) = x^2$ 是偶函数, 但其原函数 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ 不是奇函数, 可排除 (B);

$f(x) = \cos^2 x$ 是周期函数, 但其原函数 $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$ 不是周期函数, 可排除 (C);

$f(x) = x$ 在区间 $(-\infty + \infty)$ 内是单调增函数, 但其原函数 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ 在区间 $(-\infty + \infty)$ 内非单调增函数, 可排除 (D).

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ x^2 g(x), & x \leq 0 \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

- (A) 极限不存在. (B) 极限存在, 但不连续
(C) 连续, 但不可导 (D) 可导.

【 】

【答】 应选 (D)

【详解】 因为

$$f'(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$f'(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0,$$

可见, $f(x)$ 在 $x=0$ 处左、右导数相等, 因此, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,

故正确选项为(D).

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$, $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, -\infty < x < +\infty,$

其中 $a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx, (n = 0, 1, 2, \dots)$, 则 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$ 等于

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $-\frac{3}{4}$

【 】

【答】 应选 (C).

【详解】 由题设知, 应先将 $f(x)$ 从 $[0, 1]$ 作偶延拓, 使之成为区间 $[-1, 1]$ 上的偶函数, 然后再作周期 (周期 2) 延拓, 进一步展开为傅里叶级数, 根据收敛定理有

$$\begin{aligned} S\left(-\frac{5}{2}\right) &= S\left(-2 - \frac{1}{2}\right) = S\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{2}-0\right) + f\left(\frac{1}{2}+0\right)}{2} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(4) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则

- (A) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$ (B) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$

(C) 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$

(D) 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$

【 】

【答】 应选 (B).

【详解】 因为 AB 为 m 阶方阵, 且

$$r(AB) \leq \min[r(A), r(B)] \leq \min(m, n)$$

当 $m > n$ 时, 由上式可知, $r(AB) \leq n < m$, 即 AB 不是满秩的, 故有行列式 $|AB| = 0$.

因此, 正确选项为 (B).

(5) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0, 1)$ 和 $N(1, 1)$, 则

$$(A) P\{X + Y \leq 0\} = \frac{1}{2}.$$

$$(B) P\{X + Y \leq 1\} = \frac{1}{2}.$$

$$(C) P\{X - Y \leq 0\} = \frac{1}{2}.$$

$$(D) P\{X - Y \leq 1\} = \frac{1}{2}.$$

【 】

【答】 应选 (B).

【详解】 根据正态分布的性质, 服从正态分布的随机变量的线性组合仍服从正态分布. 因此

$$(X + Y) \sim N(1, 2), (X - Y) \sim N(-1, 2)$$

利用正态分布在其数学期望左右两侧取值的概率均为 $\frac{1}{2}$ 知, (B) 为正确选项.

三、设 $y = y(x)$, $z = z(x)$ 是由方程 $z = xf(x + y)$ 和 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的函数, 其中 f 和

F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\frac{dz}{dx}$.

【详解】 分别在 $z = xf(x + y)$ 和 $F(x, y, z) = 0$ 的两端对 x 求导, 得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = f + x \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) f' \\ F'x + F'y \frac{dy}{dx} + F'z \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

整理后得

$$\begin{cases} -xf' \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = f + xf' \\ F'y \frac{dy}{dx} + F'z \frac{dz}{dx} = -F'x \end{cases}$$

解此方程组, 得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(f + xf')F'y - xf'F'z}{F'y + xf'F'z}, (F'y + xf'F'z \neq 0)$$

四、求 $I = \int_L (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy$, 其中 a, b 为正常数, L 为从点 $A(2a, 0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{ax - x^2}$ 到点 $O(0, 0)$ 的弧.

【详解】 添加从点 $O(0, 0)$ 沿 $y = 0$ 到点 $A(2a, 0)$ 的有向直线段 L_1 , 则

$$\begin{aligned} I &= \int_{L+L_1} [e^x \sin y - b(x+y)]dx + (e^x \cos y - ax)dy \\ &\quad - \int_{L_1} [e^x \sin y - b(x+y)]dx + (e^x \cos y - ax)dy \end{aligned}$$

利用格林公式, 前一积分

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (b-a) dx dy \\ &= \frac{\pi}{2} a^2 (b-a) \end{aligned}$$

其中 D 为 $L + L_1$ 所围成的半圆域, 后一积分选择 x 为参数, 得 L_1 :

$$\begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases}, (0 \leq x \leq 2a),$$

可直接积分

$$I_2 = \int_0^{2a} (-bx)dx = -2a^2b$$

故
$$I = I_1 - I_2 = \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) a^2 b - \frac{\pi}{2} a^3.$$

五、 设函数 $y(x) (x \geq 0)$ 二阶可导且 $y'(x) > 0, y(0) = 1$, 过曲线 $y = y(x)$ 上任意一点 $P(x, y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1 , 区间 $[0, x]$ 上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2 , 并设 $2S_1 - S_2$ 恒为 1, 求此曲线 $y = y(x)$ 的方程.

【详解】 曲线 $y = y(x)$ 上点 $P(x, y)$ 处的切线方程为

$$Y - y(x) = y'(x)(X - x)$$

它与 x 轴的交点为 $\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$ 由于 $y'(x) > 0, y(0) = 1$, 因此 $y(x) (x > 0)$

$$\text{于是 } S_1 = \frac{1}{2} y \left| x - \left(x - \frac{y}{y'}\right) \right| = \frac{y^2}{2y'}$$

$$\text{又 } S_2 = \int_0^x y(t) dt$$

$$\text{根据题设 } 2S_1 - S_2 = 1, \text{ 有 } \frac{y^2}{2y'} - \int_0^x y(t) dt = 1,$$

并且 $y'(0) = 1$, 两边对 x 求导并化简得

$$yy'' = (y')^2$$

这是可降阶得二阶常微分方程, 令 $p = y'$, 则上述方程可化为

$$yp \frac{dp}{dy} = p^2, \text{ 分离变量得}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

$$\text{解得 } p = C_1 y, \text{ 即 } \frac{dy}{dx} = C_1 y,$$

$$\text{从而有 } y = C_1 e^x + C_2$$

$$\text{根据 } y(0) = 1, y'(0) = 1, \text{ 可得 } C_1 = 1, C_2 = 0,$$

$$\text{故所求曲线得方程为 } y = e^x.$$

六、试证: 当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$.

【详解 1】

$$\text{令 } f(x) = (x^2 - 1) \ln x - (x - 1)^2. \text{ 易知 } f(1) = 0$$

又

$$f'(x) = 2x \ln x - x + 2 - \frac{1}{x}, f'(1) = 0$$

$$f''(x) = 2 \ln x + 1 + \frac{1}{x^2}, f''(1) = 2 > 0$$

$$f'''(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3}$$

可见, 当 $0 < x < 1$ 时, $f''(x) < 0$; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $f''(x) > 0$;

因此, 有当 $1 < x < +\infty$ 时,

$$f''(x) \geq f''(1) = 2 > 0$$

又由 $f'(1) = 0$ 及 $f'(x)$ 是单调增函数推知, 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $1 < x < +\infty$ 时,

$f'(x) > 0$; 因此进一步有 $f(x) \geq f(1) = 0 (0 < x < +\infty)$, 即证之:

当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$.

【详解 2】

先对要证的不等式作适当变形, 则当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$. 等价于当 $0 < x < 1$ 时,

$\ln x \leq \frac{x-1}{x+1}$; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $\ln x \geq \frac{x-1}{x+1}$; 于是令

$$f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1}$$

则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0 (x > 0)$

又因为 $f(1) = 0$, 可见有

当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$,

当 $1 < x < +\infty$ 时, $f(x) > 0$, 从而当 $x > 0$ 时, 有

$$(x^2 - 1)f(x) = (x^2 - 1)\ln x - (x - 1)^2 \geq 0,$$

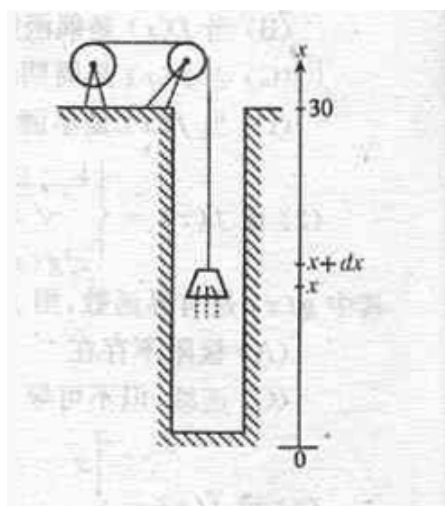
即当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$.

七、为清除井底的污泥, 用缆绳将抓斗放入井底, 抓起污泥后提出井口, 已知井深 30m, 抓斗自重 400 N, 缆绳每米重 500 N, 抓斗抓起的污泥重 2000 N, 提升速度为 3m/s, 在提升过程中, 污泥以 20 N/s 的速度从抓斗缝隙中漏掉, 现将抓起污泥的抓斗提升至井口, 问克服重力需作多少焦耳的功? (说明: $1N \times 1m = 1J$; m, N, s, J 分别表示米, 牛顿, 秒, 焦耳; 抓斗的高度位于井口上方的缆绳长度忽略不计)

【详解 1】

建立坐标轴如图所示, 将抓起污泥的抓斗提升至井口需作功

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$



其中 W_1 是克服抓斗自重所作的功； W_2 是克服缆绳重力所作的功； W_3 为提出污泥所作的功. 由题意知

$$W_1 = 400 \times 30 = 12000.$$

将抓斗由 x 处提升到 $x + dx$ 处，克服缆绳重力所作的功为

$$dW_2 = 50(30 - x)dx,$$

从而 $W_2 = \int_0^{30} 50(30 - x)dx = 22500.$

在时间间隔 $[t, t + dt]$ 内提升污泥需做功为

$$dW_3 = 3(2000 - 20t)dt.$$

将污泥从井底提升至井口共需时间 $\frac{30}{3} = 10$ ，所以

$$W_3 = \int_0^{10} 3(2000 - 20t)dt = 57000.$$

因此，共需做功

$$W = 12000 + 22500 + 57000 = 91500(J)$$

【详解 2】

作 x 轴如图所示，将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功记为 W ，当抓斗运动到 x 处时，作用力 $f(x)$ 包括抓斗的自重 $400 N$ ，缆绳的重力 $50(30 - x)(N)$ ，污泥的重力 $2000 - \frac{1}{3}x \cdot 20(N)$ ，即

$$f(x) = 400 + 50(30 - x) + 2000 - \frac{20}{3}x = 3900 - \frac{170}{3}x,$$

于是

$$W = \int_0^{30} \left(3900 - \frac{170}{3}x \right) dx = 3900x - \frac{85}{3}x^2 \Big|_0^{30} = 117000 - 24500 = 91500 (J)$$

八、设 S 为椭圆面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ 的上半部分, 点 $P(x, y, z) \in S$, π 为 S 在点 P 处的切平面,

$\rho(x, y, z)$ 为点 $O(0, 0, 0)$ 到平面 π 的距离, 求 $\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$.

【详解】 令 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 - 1$, 设 (X, Y, Z) 为 π 上任意一点, 则 π 的方程为

$$F'_x(X-x) + F'_y(Y-y) + F'_z(Z-z) = 0,$$

即 $\frac{xX}{2} + \frac{yY}{2} + zZ = 1$

从而知

$$\rho(x, y, z) = \frac{|Ax + By + Cz|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

这里 $A = \frac{x}{2}, B = \frac{y}{2}, C = z$,

由曲面方程知 $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right)}$,

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right)}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{2\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right)}},$$

因此

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} d\sigma = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right)}} d\sigma$$

故有

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS &= \iint_S z \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2} dS \\ &= \frac{1}{4} \iint_D (4 - x^2 - y^2) d\sigma = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (4 - r^2) r dr \\ &= \frac{3}{2} \pi \end{aligned}$$

九、设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$,

(1) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$ 的值;

(2) 试证: 对任意的常数 $\lambda > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛

【详解】 (1) 因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2}) &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \sec^2 x dx \\ \underline{\underline{\tan x = t}} \quad \frac{1}{n} \int_0^1 t^n dt &= \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

又由部分和数列

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}(a_i + a_{i+2}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$,

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2}) = 1$.

(2) 先估计 a_n 的值, 因为

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \quad \underline{\underline{\tan x = t}} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt < \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1},$$

所以 $\frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^\lambda(n+1)} < \frac{1}{n^{\lambda+1}}$,

由 $\lambda+1 > 1$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 也收敛.

十、设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$, 其行列式 $|A| = -1$, 又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0 ,

属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha = (-1, -1, 1)^T$, 求 a, b, c 和 λ_0 的值.

【详解】

根据题设有 $A^* \alpha = \lambda_0 \alpha$,

又 $AA^* = |A|E = -E$, 于是 $AA^* \alpha = A\lambda_0 \alpha = \lambda_0 A\alpha$,

即 $-\alpha = \lambda_0 A\alpha$

也即
$$\lambda_0 \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由此, 可得

$$\begin{cases} \lambda_0(a+1+c) = 1 \\ \lambda_0(-5-b+3) = 1 \\ \lambda_0(-1+c-a) = -1 \end{cases}$$

解此方程组, 得 $\lambda_0 = 1, b = -3, a = c$

又由 $|A| = -1$ 和 $a = c$, 有

$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix} = a-3 = -1$$

故 $a = c = 2$,

因此 $a = 2, b = -3, c = 2, \lambda_0 = 1$.

十一、设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定, B 为 $m \times n$ 实矩阵, B^T 为 B 的转置矩阵, 试证:

$B^T AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B) = n$.

【详解】 必要性. 设 $B^T AB$ 为正定矩阵, 则由定义知, 对任意的实 n 维列向量 $x \neq 0$, 有

$$x^T (B^T AB)x > 0, \quad \text{即} \quad (Bx)^T BA(Bx) > 0,$$

于是, $Bx \neq 0$. 因此, $Bx = 0$ 只有零解, 故有 $r(B) = n$

充分性. 因 $(B^T AB)^T = B^T A^T B = B^T AB$, 故 $B^T AB$ 为实对称矩阵. 若 $r(B) = n$

则线性方程组 $Bx = 0$ 只有零解, 从而对任意的实 n 维列向量 $x \neq 0$, 有 $Bx \neq 0$. 又 A 为正定矩阵, 所以对于 $Bx \neq 0$ 有 $(Bx)^T BA(Bx) > 0$,

于是当 $x \neq 0$, 有 $x^T (B^T AB)x = (Bx)^T A(Bx) > 0$, 故 $B^T AB$ 为正定矩阵.

十二、设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量 (X, Y) 联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值，试将其余数值填入表中的空白处.

| | | | | |
|----------------------|---------------|---------------|-------|----------------------|
| | y_1 | y_2 | y_3 | $P\{X = x_i\} = p_i$ |
| x_1 | | $\frac{1}{8}$ | | |
| x_2 | $\frac{1}{8}$ | | | |
| $P\{Y = y_j\} = p_j$ | $\frac{1}{6}$ | | | 1 |

【详解】

| | | | | |
|----------------------|----------------|---------------|----------------|----------------------|
| | y_1 | y_2 | y_3 | $P\{X = x_i\} = p_i$ |
| x_1 | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ |
| x_2 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $P\{Y = y_j\} = p_j$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

十三、设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x) & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$.

【详解】 (1) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\theta} \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x)dx = \frac{\theta}{2}$

记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 令 $\frac{\theta}{2} = \bar{X}$, 得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = 2\bar{X}$;

(2) 由于

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\theta} \frac{6x^2}{\theta^3}(\theta - x)dx = \frac{6x^2}{20}$$

$$D(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \frac{6\theta^2}{20} - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{20}$$

因此 $\hat{\theta} = 2\bar{X}$ 的方差为

$$\begin{aligned} D(\hat{\theta}) &= D(2\bar{X}) = 4D(\bar{X}) \\ &= \frac{4}{n}D(X) = \frac{\theta^2}{5n} \end{aligned}$$