1997 年全国硕士研究生入学统一考试

理工数学一试题详解及评析

一、填空题

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$_____.

【答】 $\dfrac{3}{2}$.

【详解】 原式＝$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{2x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}x\cos\dfrac{1}{x}$

$=\dfrac{3}{2}+0=\dfrac{3}{2}.$

（2）设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为 3，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$的收敛区间为_____.

【答】 $(-2,4)$.

【详解】 根据幂级数的性质，逐项求导后，得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$的收敛半径仍为 3，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}=(x-1)^2\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-2}$$

的收敛区间为 $|x-1|<3,$ 即$(-2,4)$.

（3）对数螺线$\rho=e^{\theta}$在点处切线的直角坐标方程为_____.

【答】 $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}.$

【项解 1】

由于$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,$螺线方程$\rho=e^{\theta}$可化为

$$\begin{cases}x=e^{\theta}\cos\theta,\\ y=e^{\theta}\sin\theta.\end{cases}$$

由于$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1,$且当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时， $x=0,y=e^{\frac{\pi}{2}}.$

故所求切线方程为

$$y-e^{\frac{\pi}{2}}=-1\cdot(x-0),\text{即}\,x+y=\frac{\pi}{2}.$$

【详解 2】

螺线方程 $\rho=e^{\theta}$ 可化为隐函数方程：

$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x},$

利用隐函数求导法，得在点 $\left(0,e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ 处的导数为 $y'(0)=-1,$ 故所求切线方程为

$$y-e^{\frac{\pi}{2}}=-1\cdot(x-0),\text{即}\,x+y=\frac{\pi}{2}.$$

（4）设 $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{bmatrix}$, B 为三阶非零矩阵，且 $AB=0,$ 则 t=_____.

【答】 -3.

【详解】 由于 B 为三阶非零矩阵，且 $AB=0,$，可见线性方程组 $Ax=0$ 存在非零解，故

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow t=-3.$$

(5)袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球，今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取得黄球的概率是_____.

【答】 $\dfrac{2}{5}.$

【详解】 设 $A=\{$第一个人取出的为黄球$\}$, $B=\{$第一个人取出的为白球$\}$，$C=\{$第二个人取出的为黄球$\}$.

则 $P(A)=\dfrac{2}{5},P(B)=\dfrac{3}{5},P(C\mid A)=\dfrac{19}{49},P(C\mid B)=\dfrac{20}{49}.$

由全概率公式知：

$$\begin{aligned}P(C)&=P(A)\cdot P(C\mid A)+P(B)\cdot P(C\mid B)\\&=\frac{2}{5}\times\frac{9}{49}+\frac{3}{5}\times\frac{20}{49}=\frac{19}{49}=\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

二、选择题

（1）二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\0,\qquad (x,y)=(0,0)\end{cases}$，在点 $(0,0)$ 处

（A）连续，偏导数存在.　　　　　　　　（B）连续，偏导数不存在.

（C）不连续，偏导数存在.　　　　　　　(D) 不连续，偏导数不存在.

【 】

【答】　应选（C）.

【详解】　由偏导数的定义知

$$f'_x(0,0)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(0+\triangle x,0)-f(0,0)}{\triangle x}=0,$$

而当 $y=kx$, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

当 k 不同时，$\frac{k}{1+k^2}$ 不同，故极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在，因而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，可见，应选（C）.

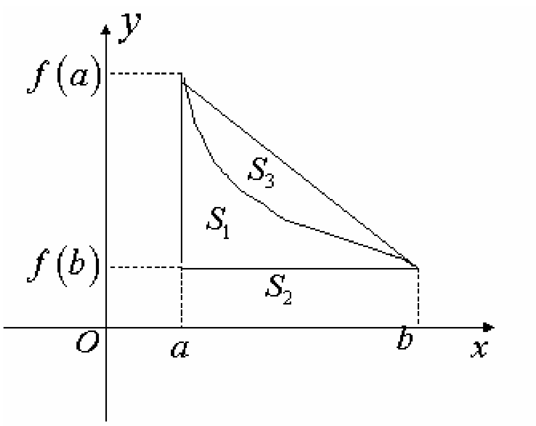
(2)设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0$，令 $S_1=\int_a^b f(x)dx$,
$S_2=f(b)(b-a), S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则

（A） $S_1<S_2<S_3.$　　　　　　　　(B) $S_2<S_1<S_3.$

(C) $S_3<S_1<S_2.$　　　　　　　　(D) $S_2<S_3<S_1.$

【 】

【答】　应选（B）.



【详解】

由 $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0$ 知，曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少且是凹曲线弧，于是有 $f(x)>f(b)$,

$$f\left(x\right)< f\left(a\right)+\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}\left(x-a\right), a<x<b.$$

从而

$$S_1=\int_a^b f\left(x\right)dx> f\left(b\right)\left(b-a\right)=S_2,$$

$$S_1=\int_a^b f\left(x\right)dx<\int_a^b\left[f\left(a\right)+\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}\left(x-a\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[f\left(a\right)+f\left(b\right)\right]\left(b-a\right)=S_3.$$

即 $S_2<S_1<S_3$,故应选（B）.

(3)设 $F\left(x\right)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t dt$, 则 $F\left(x\right)$

（A） 为正常数. （B）为负常数.

（C）恒为零. （D）不为常数.

【 】

【答】 应选（A）.

【详解】 由于 $e^{\sin t}\sin t$ 是以 2π 为周期的，因此

$$F\left(x\right)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t dt=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t dt$$

$$=-\int_0^{2\pi}e^{\sin t}d\cos t$$

$$=0+\int_0^{2\pi}\cos^2 t\cdot e^{\sin t}dt>0.$$

故应选（A）.

（4）设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$, 则三条直线

$a_1x+b_1y+c_1=0, a_2x+b_2y+c_2=0, a_3x+b_3y+c_3=0$（其中 $a_i^2+b_i^2\neq 0, i=1,2,3$）交于一点的充要条件是

（A） $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关. （B） $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

（C）秩 $r\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$＝秩 $r\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$ （D） $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关， α_1,α_2 线性无关.

【 】

【答】 应选(D).

【详解】 由题设，三条直线相交于一点，即线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$$

有唯一解，其充要条件为秩秩 $r\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=$秩 $r\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=2$.

（A）、（C）必要但非充分；（B）既非充分又非必要；只有（D）为充要条件，故应选（D）.

（5）设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2，则随机变量 $3X-2Y$ 的方差是

（A）8.　　（B）16.　　（C）28.　　（D）44.

【 】

【答】 应选（D）.

【详解】 $D\left(3X-2Y\right)=3^2D\left(X\right)+2^2D\left(Y\right)=9\times4+4\times2=44.$

三、（1）计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dV$, 其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域.

【详解】 利用柱面坐标，积分区域可表示为

$$\Omega=\left\{\left(\theta,r,z\right)|\,0\le\theta\le2\pi,0\le r\le4,\frac{r^2}{2}\le z\le8\right\},$$

于是

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^8 r^2dz=2\pi\int_0^4 r^3\left(8-\frac{r^2}{2}\right)dr$$

$$=\frac{1024\pi}{3}.$$

（2）计算曲线积分 $\oint\limits_C\left(z-y\right)dx+\left(x-z\right)dy+\left(x-y\right)dz$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$, 从 z 轴正向往 z 轴负向看，C 的方向是顺时针的.

【详解 1】

令 $x=\cos\theta,y=\sin\theta$, 则　$z=2-x+y=2-\cos\theta+\sin\theta$

由于曲线 C 是顺时针方向，其起点和终点所对应 θ 值分别为 $\theta=2\pi,\theta=0$.

于是

$$\oint\limits_C\left(z-y\right)dx+\left(x-z\right)dy+\left(x-y\right)dz$$

$$=\int_{2\pi}^0-\left[2\left(\sin\theta+\cos\theta\right)-2\cos2\theta-1\right]d\theta$$

$$=-\left[2\left(\cos\theta+\sin\theta\right)-\sin 2\theta-\theta\right]\Big|_{2\pi}^{0}$$
$$=-2\pi.$$

【详解 2】

设 $\sum$ 是平面 $x-y+z=2$ 以 C 为边界的有限部分，其法向量与 Z 轴负向一致，D_{xy} 为 $\sum$ 在 xOy 面上的投影区域.

记 $F=\left(z-y\right)i+\left(x-z\right)j+\left(x-y\right)k,$

则 $$rotF\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & x-y \end{vmatrix}=2k.$$

根据斯托克斯公式知

$$\oint_C\left(z-y\right)dx+\left(x-z\right)dy+\left(x-y\right)dz=\iint_{\Sigma} rotFdS$$
$$=\iint_{\Sigma}2dxdy=-\iint_{D_{xy}}2dxdy$$
$$=-2\pi.$$

(3) 在某一人群中推广新技术是通过其中掌握新技术的人进行的，设该人群的总人数为 N,在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0,在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x\left(t\right)$（将 $x\left(t\right)$ 视为连续可微变量)，其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比，比例常数 $k>0$, 求 $x\left(t\right)$.

【详解】 由题设，有 $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=kx\left(N-x\right)\\ x\left(0\right)=x_0\end{cases},$$

原方程可化为 $$\frac{dx}{x\left(N-x\right)}=kdt,$$

积分，得 $$x=\frac{NCe^{kNt}}{1+Ce^{kNt}},$$

代入初始条件，得 $$x=\frac{Nx_0e^{kNt}}{N-x_0+x_0e^{kNt}}$$

四、（1）设直线 $l:\begin{cases}x+y+b=0\\ x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点

$(1,-2,5)$，求 a、b 之值.

【详解 1】

令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$，则 $F'_x=2x, F'_y=2y, F'_z=-1$. 在点 $(1,-2,5)$ 处曲面得法向量为

$n=\{2,-4,-1\}$，于是切平面方程为

$$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0,$$

即

$$2x-4y-z-5=0.$$

由 $l:\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$，

得 $\quad x-b, z=x-3+a(-x-b)$

代入平面 π 方程，得

$2x+4x+4b-x+3+ax+ab-5=0,$

有 $\quad 5+a=0, 4b+ab-2=0.$

由此解得 $\quad a=-5, b=-2$

【详解 2】

由方法一知，平面 π 方程为 $2\pi-4y-z-5=0.$

过直线 $l:\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 的平面束为

$$x+y+b+\kappa(x+ay-z-3)=0,$$

即 $\quad (1+\lambda)x+(1+a\lambda)y-\lambda z+b-3\lambda=0.$

其与平面 π 重合，要求

$$\frac{1+\lambda}{2}=\frac{1+a\lambda}{-4}=\frac{-\lambda}{-1}=\frac{b-3\lambda}{-5},$$

解得 $\quad \lambda=1,\ a=-5, b=-2$

（2）设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，而 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$, 求 $f(u)$.

【详解】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\sin y,\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)e^x\cos y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f'(u)e^x\sin y+f''(u)e^{2x}\sin^2 y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-f'(u)e^x\sin y+f''(u)e^{2x}\cos^2 y,$$

代入方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$,得 $f''(u)-f(u)=0.$

解此方程得

$f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}$（其中C_1,C_2为任意常数）.

五、设$f(x)$连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$,且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$（$A$为常数），求$\varphi'(x)$并讨论$\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性.

【详解】 由题设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$知，$f(0)=0,f'(0)=A,$且有$\varphi(0)=0.$

又 $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt\underline{\underline{u=xt}}\frac{\int_0^x f(u)du}{x}(x\neq 0),$

于是 $\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}(x\neq 0)$

由导数定义，有

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}.$$

而

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}$$
$$=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0)$$

可见，$\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性.

六、设$a_1=2,a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),(n=1,2,\cdots)$,证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在；

（2）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

【详解】

（1）因为

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-a_n=\frac{1-a_n^{\ 2}}{2a_n},$$

而 $$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\ge\sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}}=1,$$

于是有 $a_{n+1}-a_n\le 0,$ 故数列 $\{a_n\}$ 单调递减且有下界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

(2)方法一：

由（1）知 $0\le\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\le a_n-a_{n+1}.$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 的部分和数列 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，由比较判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 也收敛.

方法二：

令 $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}-1$，利用递推公式，有

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{a_n^{\ 2}+1}{a_{n+1}^{\ \ 2}+1}\cdot\frac{a_n^{\ 2}-1}{a_n^{\ 2}}=0<1,$$

由比值判别法知　　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 也收敛.

七、（1）设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵，$\alpha_1=(1,1,2,3)^T,\alpha_2=(-1,1,4,-1)^T,\alpha_3=(5,-1,-8,9)^T$ 是齐次方程组 $Bx=0$ 的解向量，求 $Bx=0$ 的解空间的一个标准正交基.

【详解】　因秩 $r(B)=2,$ 故解空间的维数为：$4-r(B)=4-2=2,$

又 α_1,α_2 线性无关，可见 α_1,α_2 是解空间的基.

先将其正交化，令：

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix},\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{2}{3}\\\frac{10}{3}\\-2\end{bmatrix}$$

再将其单位化，令：

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix},\eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\sqrt{\frac{1}{39}}\begin{bmatrix}-2\\1\\5\\-3\end{bmatrix}$$

即为所求的一个标准正交基.

(2)已知 $\zeta=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$是矩阵$A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$的一个特征向量.

(I) 试确定参数a,b及特征向量ζ所对应的特征值；

(II) 问A能否相似于对角阵？说明理由.

【详解】 (I) 由题设，有$A\zeta=\lambda_0\zeta$,即

$$\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\lambda_0\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},$$

也即 $\begin{cases}2-1-2=\lambda_0\\5+a-3=\lambda_0\\-1+b+2=-\lambda_0\end{cases}$

解得 $a=-3,b=0,\lambda=-1.$

(II) 由

$A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$，知 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3,$

可见$\lambda=-1$为A的三重根，但秩$r(-E-A)=2,$从而$\lambda=-1$对应的线性无关特征向量只有$3-r(-E-A)=1$个，故A不可对角化.

八、设A是n阶可逆方阵，将A的第i行和第j行对换后得到的矩阵为$B.$

（1） 证明 B 可逆;

（2） 求 AB^{-1}.

【详解】

（1） 记 $E(i,j)$ 是由 n 阶单位矩阵的第 i 行和第 j 行对换后得到的初等矩阵，则

$B=E(i,j)A$，于是有 $|B|=|E(i,j)||A|=-|A|\neq 0$. 故 B 可逆

（2） $AB^{-1}=A\left[E(ij)A\right]^{-1}=AA^{-1}E^{-1}(i,j)=E^{-1}(i,j)=E(i,j)$.

九、从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗，假设再各个交通岗遇到红灯的事件是象话独立的，并且概率都是 $\frac{2}{5}$, 设 X 为途中遇到红灯的次数，求随机变量 X 的分布律、分布函数和数学期望.

【详解】 X 服从二项分布 $B\left(3,\frac{2}{5}\right)$，其分布律为

$$P\{X=k\}=C_3^{\,k}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^k\cdot\left(1-\frac{2}{5}\right)^{3-k},k=0,1,2,3.$$

因此， X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\leq x\}=\begin{cases}0,x<0\\ \frac{7}{125},0\leq x<1\\ \frac{81}{125},1\leq x<2\\ \frac{117}{125},2\leq x<3\end{cases}$$

X 的数学期望为 $E(X)=3\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$.

十、设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta},0<x<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

其中 $\theta>-1$ 是未知参数， $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，分别用矩估计法和极大似然估计法求 θ 的估计值.

【详解】 总体 X 的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}.$$

令 $\frac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$，得参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一组观测值，则似然函数为

$$L=\begin{cases}(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta}, 0<x_i<1(i=1,2,3,\cdots,n) \\ 0 \qquad \text{其他.}\end{cases}$$

当 $0<x_i<1(i=1,2,3,\cdots,n)$ 时，$L>0$ 且

$$\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令 $\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$

得 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

从而 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$