福建师范大学2006年硕士研究生入学考试
《数学分析》试卷

一、选择题（本题共4小题，每小题4分，满分16分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的。要求把答案填在答题纸上）

1. 把$x \longrightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan\sqrt{t}dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来， 使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是

（A）α, β, γ; （B）α, γ, β; （C）β, α, γ; （D）β, γ, α

2. 设函数$f(x)$ 连续，且$f'(0) > 0$， 则存在$\delta > 0$， 使得

（A）$f(x)$ 在$(0, \delta)$ 内单调增加;

（B）$f(x)$ 在$(-\delta, 0)$ 内单调减少;

（C） 对任意的$x \in (0, \delta)$， 有$f(x) > f(0)$;

（D） 对任意的$x \in (-\delta, 0)$， 有$f(x) > f(0)$

3. 设$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$均为实数列，且$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \lim_{n\to\infty} b_n = 1, \lim_{n\to\infty} c_n = \infty$, 则必 有

（A） $a_n < b_n$对任意n 成立;

（B）$b_n < c_n$ 对任意n 成立;

（C） $\{a_n c_n\}$存在有限的极限;

（D）$\{b_n c_n\}$ 不存在有限的极限

4.设可微函数$f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 取得极小值，则下列结论正确的是

(A) $f(x_0, y)$在$y = y_0$ 处的导数等于零;

(B) $f(x_0, y)$在$y = y_0$处的导数大于零;

(C) $f(x_0, y)$在$y = y_0$处的导数小于零;

(D) $f(x_0, y)$在$y = y_0$ 处的导数不存在

二、填空题（本题共8小题，每小题3分，满分24分.要求把答案填在答题纸上）

1. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/\ln(1+x^2)} = (\qquad)$

2.曲面$z = x^2 + y^2$ 与平面$2x + 4y - z = 0$ 平行的切平面的方程是(　　　)

3.若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛且级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 条件收敛， 则级数$\sum_{k=100}^{\infty}(a_k - |b_k|)$ 的敛散性是(　　　)

4.已知$f'(e^x) = xe^{-x}$，且$f(1) = 0$，则$f(x) = (\qquad)$

5.设L为正向圆周$x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分$\int_L xdy-2ydx$ 的值为(　　)

6.幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x-3)^n/\sqrt{n}$ 的收敛域为(　　) (要考虑端点情况)

7. 设$a>0$, $f(x)=g(x)=\begin{cases} a, & 0\le x\le 1 \\ 0, & x\notin[0,1] \end{cases}$, D表示全平面, 则 $I=\iint_D f(x)g(y-x)dxdy=$(　　)

8. 设函数$y(x)$ 由参数方程$\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y=y(x)$向上凸的x 取值范围为(　　)

三、（15分）设 $u=f(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 若u 满足方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$,试求出函数$u$.

四、（15分）设函数$f(x)$ 在$(-\infty,\infty)$ 上连续且恒大于零， $F(t)=\dfrac{\iiint_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)dV}{\iint_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma}$, $G(t)=\dfrac{\iint_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-t}^{t}f(x^2)dx}$, 其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le t^2\}$, $D(t)=\{(x,y)|x^2+y^2\le t^2\}$.

（1） 讨论$F(t)$ 在区间$(0,+\infty)$ 内的单调性;

（2） 证明当$t>0$ 时，$F(t)>(2/\pi)G(t)$.

五、（15分）设有方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数，证明此方程存在唯一正实根 x_n，并证明当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

六、（15分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$. 若极限 $\lim_{x\to a^+}f(2x-a)/(x-a)$ 存在. 证明：

(1) 在 (a,b) 内 $f(x)>0$;

(2) 在 (a,b) 内存在点 ξ，使 $(b^2-a^2)/\int_a^b f(x)dx=(2\xi)/f(\xi)$;

(3) 在(a,b) 内存在与(2)中 ξ 不同的点 η，使 $f'(\eta)(b^2-a^2)=((2\xi)/(\xi-a))\int_a^b f(x)dx$.

七、（15分）设 $a>0$, $x_1>0$, $x_{n+1}=(1/4)(3x_n+a/x_n^3)$, $(n=1,2,\cdots)$， 证明数列 x_n 存在极限， 并求极限$\lim_{n\to\infty}x_n$.

八、（15分）设 $I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-yx}(\sin x/x)dx$, 其中 $0\le y\le b$.

(1)证明$I(y)$ 在$[0,b]$ 上一致收敛;

(2)求$I(y)$ 及$I(0)$ 的值.

九、（10分）设 $\{S_n(x)\}$ 是函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ 的前 n 项部分和函数列， 每个 $S_n(x)$ 在$[a,b]$ 上连续， 且 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$. 又 $\{x_n\}\subset[a,b]$ 且 $x_n\longrightarrow x_0$ $(n\longrightarrow\infty)$. 证明 $\lim_{n\to\infty}S_n(x_n)=S(x_0)$.

十、（10分）设$f(x)$, $g(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，且满足$\int_a^x f(t)dt\ge\int_a^x g(t)dt$, $x\in[a,b)$.

(1)问：这时对任意 $x\in[a,b)$ 是否都成立 $f(x)>g(x)$? 请证明或举例说明你的结论.

(2)若还满足 $\int_a^b f(t)dt=\int_a^b g(t)dt$, 试证： $\int_a^b xf(x)dx\le\int_a^b xg(x)dx$.