625

华南理工大学
2010年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（请在答题纸上做答，试卷上做答无效，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：数学分析

适用专业：基础数学，计算数学，概率论与数理统计，应用数学，运筹学与控制论

一、求解下列各题（每小题10分，共60分）

1、确定α与β，使

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2+4n-2}-\alpha n-\beta\right)=0.$$

2、讨论函数 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性，其中

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\text{为无理数}\\ x, & x\text{为有理数}\end{cases}$$

和

$$g(x)=\begin{cases}-x^2, & x\text{为无理数}\\ x^2, & x\text{为有理数}\end{cases}.$$

3、已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足 $0\le f(x)\le x, x\in[0,+\infty)$.设

$a_1\ge 0, a_{n+1}=f(a_n), n=1,2,\cdots$，证明：

1) $\{a_n\}$收敛;

2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，则 $f(l)=l$.

4、判断下面级数的收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}, x\ge 0.$$

5、讨论函数

$$f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$$

的极大值和极小值.

6、计算

$$\iint_S x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3z^3 dxdy,$$

其中 S 为球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

的外侧.

二、（15 分）设 p 为正常数，函数 $f(x) = \cos(x^p)$，证明

当 $0 < p \le 1$ 时，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

三、（15 分）证明

$$\int_a^b e^{-xy} dy = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x},$$

并计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx,\ (b > a > 0).$$

四、（15 分）令

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

证明 $f(x,y)$ 在其定义域上是连续的.

五、（15 分）求积分

$$I = \iint_D \left(\sqrt{\frac{x-c}{a}} + \sqrt{\frac{y-c}{b}} \right) dxdy,$$

其中 D 由曲线 $\sqrt{\dfrac{x-c}{a}} + \sqrt{\dfrac{y-c}{b}} = 1$ 和 $x = c, y = c$ 所围成，且 $a,b,c > 0$.

六、（15 分）设 f 为定义在 $(a,+\infty)$ 上的函数，在每一有限区间 (a,b) 上有界，且

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=A,$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A.$$

七、（15 分）设 $f(x),g(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 连续，证明

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\theta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

其中 Δ 为 $\left[a,b\right]$ 的任一分割

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,\xi_i,\theta_i\in\left[x_i,x_{i+1}\right],$$

$i=1,2,\cdots,n,\Delta x_i=x_i-x_{i-1}.$