南京航空航天大学

2011 年硕士研究生入学考试初试试题（ A 卷 ）

科目代码: 601
科目名称: 数学分析
满分: 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

1. （12 分）求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n+2}$.

2. （13 分）设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数，满足 $f(a)\ge a$， $f(b)\le b$. 在以下两种情况下证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$.

   （1） $f(x)$ 是连续函数；

   （2） $f(x)$ 是递增函数，但未必连续.

3. （12 分）设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 I 内有定义，证明：导数 $f'(x_0)$ 存在的充分必要条件是存在 I 上的函数 $g(x)$，满足：$g(x)$ 在 x_0 在点连续，且

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)g(x),\quad x\in I.$$

此外还有 $f'(x_0)=g(x_0)$.

4. （13 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2} & x\in(0,1] \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

   （1） 求 $f'(x)$；

   （2） 讨论 $f'(x)$ 的连续性；

   （3） 讨论 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上的定积分是否存在.

5. （12 分）若在区间$[a,b]$上，函数 $f(x)$ 连续，函数 $g(x)$ 连续可微且单调. 证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$.

6. （13 分）计算积分 $\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{1+e^x}dx$.

7. （13 分）讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{x+\frac{1}{n}}}$ 的绝对收敛性、条件收敛性和一致收敛性，并指出函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{x+\frac{1}{n}}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上的连续性.

8. （12 分）设 $u(x,y,z)=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 在 $R^3\setminus\{(0,0,0)\}$ 上二次连续可微，若 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，求 f 满足的方程及函数 $u(x,y,z)$.

9. （12 分）求两曲面 $x+2y=1$ 和 $x^2+2y^2+z^2=1$ 的交线上距离原点最近的点.

10. （13 分）计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x^2\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$，其中 Ω 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=x^2+y^2$ 围成的有界区域.

11. （13 分）计算积分 $\oint_L 3zdx+5xdy-2ydz$，其中 L 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=y+3$ 的交线，从 x 轴的正向看去，呈逆时针方向.

（12 分）设 $f(x)$ 是周期为 2π 的连续函数，在 $[-\pi,\pi]$ 上分段光滑. 证明 $f(x)$ 的 Fourier 级数一致收敛于 $f(x)$.