

浙江师范大学 2011 年硕士研究生入学考试初试试题 (A 卷)

科目代码: 681 科目名称: 数学分析

适用专业: 基础数学、计算数学、应用数学、运筹学与控制论、系统理论。

提示:

- 1、请将所有答案写于答题纸上, 写在试题上的不给分;
- 2、请填写准考证号后 6 位: _____。

一、计算题: (共 5 小题, 每小题 8 分, 共 40 分)

1、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^t dt}{x^2 \sin 2x}$ 。

2、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!}$ 。

3、设 $z = (xy)^x$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

4、求积分 $\int \frac{\cos x \sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$ 。

5、计算曲线积分 $\int_L (\sin y + y) dx + x \cos y dy$, 其中 L 为: $y = x(\pi - x)$, 起点为 $A(0,0)$, 终点为 $B(\pi,0)$ 。

二、简答题: (共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

1、叙述下面定义:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;

(2) 当 $x \rightarrow a+0$ 时, $f(x)$ 不以 A 为极限。

2、讨论二元函数在一点可微与偏导数存在的关系, 并说明理由。

三、(12 分) 设 $0 < x_1 < 3$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$, ($n=1,2,\dots$)。证明 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限。

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x}, & x < 0, \\ A, & x = 0, \\ ax^2 + b, & x > 0. \end{cases}$$

四、(12分) 设 $f(x)$ 如上，其中 A, a, b 为常数。试问 A, a, b 为何值时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，为什么？并求 $f'(0)$ 。

五、(15分) 叙述 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不一致连续的定义。并证明：

如 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ ，则 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上非一致连续。

六、(12分) 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上二次连续可微，且有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 。证明：

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

七、(12分) 证明含参量反常积分 $I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-yx} dx$ 在

- (1) 闭区间 $[c, d]$ ($c > 0$) 上一致收敛；
- (2) 闭区间 $[0, d]$ 上不一致收敛。

八、(15分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n} x^{2n}$ 的收敛域及和函数。

九、(12分) 求积分 $\iiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$ ，其中 S 是单位球面

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的内侧。