北京航空航天大学

一九九八年

招收研究生　　　题单号:391

数学分析　试　题　　(共3页)

一、(本题共20分,每小题4分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\pi(\sqrt{n^2+n}-n)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[n]{x}-1)$,(其中 $x>0$)

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2n}\right]$

4. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-5x+6}$　　求 $y^{(n)}=?$

5. $f(x)=arc\ tgx$　　求 $f^{(n)}(0)=?$

二、(本题10分)

欲制造容积为 V_0 的无盖长方形水箱,问如何设计水箱尺寸,用料最省。

三、(本题10分)

已给恒稳流速场 $\vec{v}=(c,y,0)$,求单位时间内流出球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的流量。

四、(本题12分)

求曲面 $z=x^2+y^2+1$,在点 $M(1,-1,3)$处的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积。

五、(本题 12 分)

设 $A=\iint\limits_{D}\left|xy-\frac{1}{4}\right|dxdy$,其中 $D:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$

1. 计算 $A=$?

2. 设函数 $Z=f(x,y)$在 D 上连续,且满足以下两条件:

a) $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy=0$,

b) $\iint\limits_{D}xyf(x,y)dxdy=1$

则$\exists\ (\zeta,\eta)\in D,s.t.\ |f(\zeta,\eta)|\geqslant\frac{1}{A}$。

六、(本题 12 分,每小题各 6 分)

设 $f(x)$在$[a,b]$上可积,求证

1. $\int_{a}^{x}f(t)dt$ 在$[a,b]$上连续。

2. $\exists\ \zeta\in(a,b),s.t.\ \int_{a}^{\zeta}f(x)dx=\int_{\zeta}^{b}f(x)dx$。

七、(本题 12 分,每小题各 6 分)

1. 已知数列 x_n,若存在常数 $r\in(0,1)$满足:$|x_{n+1}-x_n|\leqslant r|x_n-x_{n-1}|$,$(n=1,2,\cdots)$

则数列 x_n 为收敛列。

2. 已知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$发散,$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$也发散。

八、(本题 12 分,每小题各 6 分)

1. 已给$[a,b]$上函数 $f(x)$及函数列 $f_n(x)$,$(n=1,2,\cdots)$,叙述函

数列 $f_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$ 的定义。

2. 已知 $f_0(x) \in C[0,a]$，其中 $a>0$；

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(x)dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

则函数列 $f_n(x)$ 在 $[0,a]$ 上一致收敛到 $f(x) \equiv 0$。

北京航空航天大学

一九九九年
招收研究生　　题单号:391

数学分析　试题　（共2页）

一、(本题共12分，每小题6分)计算极限

1. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$　　$(a,b,c>0)$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

二、(本题12分)

$W=f(x,y,u)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，$u=u(x,y)$ 由方程 $u^5-5xy+5u=1$ 所确定，求 $\dfrac{\partial W}{\partial x},\dfrac{\partial W}{\partial y},\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}$。

三、(本题10分)

将函数 $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$ 展成 x 的幂级数，并求其收敛域。

四、(本题12分)用两种方法计算

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy,\text{其中}\sum\text{为}\begin{cases}x^2+y^2=z\\0\leqslant z\leqslant h\end{cases}\text{外侧。}$$

五、(本题10分)

计算球面 $x^2+y^2+z^2=1$，位于柱体 $x^2+y^2\leqslant x$ 之内的面积。

六、(本题 12 分)

求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$的收敛域及和函数。

七、(本题 10 分)

设 $f(x)$在 $x\geqslant 1$ 非负、单减，求证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f(n)-\int_n^{n+1}f(x)dx\right]$收敛。

八、(本题 10 分)

设 $f(x)\in C[0,a]$，$\begin{cases}f_1(x)=f(x)\\ f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt,\end{cases}$ $n=1,2,3,\cdots,x\in[0,a]$，求证函数列$\{f_n(x)\}$在$[0,a]$上一致收敛。

九、(本题 12 分)

证明函数 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$在每个区间 $J_1=\{x|-1<x<0\}$及 $J_2=\{x|0<x<1\}$内一致连续，但在 $J_1+J_2=\{x|0<|x|<1\}$非一致连续。

北京航空航天大学 二〇〇〇年招收研究生

题单号:391

数学分析 试题 (共2页)

一、计算(共20分,每小题5分)

1. $u=\ln(ax+by)$,求$\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=?$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{10}\cdot e^{-x}dx=?$

3. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=?$

4. $\displaystyle\iint_D(x+y)sgn(x-y)dxdy=?$其中$D:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$。

二、(本题10分)

1. 叙述数列收敛的柯西原理。

2. 证明数列$x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{2^k}$ $(n=1,2,\cdots)$为收敛列。

三、(本题共10分)

用数学语言叙述:

1. 函数项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(a,b)$非一致收敛。

2. 函数序列$\{f_n(x)\}$在(c,d)不是一致有界的。

四、(本题 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$ 的收敛域及其和函数。

五、(本题共 10 分)求证:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^{\pi/2}(1-\sin x)^n dx = 0$, 其中 $a\in(0,1)$;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}(1-\sin x)^n dx = 0$。

六、(本题 10 分)

证明函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot e^{-nx}$ 在 $x>0$ 连续。

七、(本题 10 分)

在曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上求点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,且 $x_0\geqslant 0$, $y_0\geqslant 0$, $z_0\geqslant 0$,使该点处曲面的切平面与三坐标面围成的四面体体积最小。

八、(本题 10 分)

已知 $b_n>0 \quad (n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right]=l>0$,求证级数:$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 收敛。

九、(本题 10 分)

已知园柱壳 $V:\begin{cases}4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9\\ 0\leqslant z\leqslant 4\end{cases}$ 密度均匀为 μ,求它对位于原点处质量为 m 的质点的引力。

北京航空航天大学　二〇〇一年 招收研究生　题单号:391

数学分析　试题　（共2页）

（共十题，每题10分）

一、设 $f(x)$ 连续，$\forall x>0, f(x)>0$，且 $\forall x\geqslant 0$ 有 $f(x)=\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$，求 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=$？

二、求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n}x^{2n}$ 的收敛域及和函数。

三、计算

$$J=\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 Σ 为圆柱面，$x^2+y^2=1$ 被 $z=0, z=3$ 所截部分的外侧。

四、求均匀半球壳对位于球心处质量为 m 的质点的引力。

五、抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 所截成一椭圆，求原点至该椭圆的最近、最远距离。

六、设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

求证：在 $(0,0)$ 处，$f(x,y)$ 连续但不可微。

七、设 L 为不经过点 $(a,0)$ 的光滑闭曲线，逆时针方向。

求：$I=\oint_L \dfrac{y}{(x-a)^2+y^2}\mathrm{d}x-\dfrac{x-a}{(x-a)^2+y^2}\mathrm{d}y=$？

八、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$f_1(x)=f(x)$

$$f_{n+1}(x)=\int_x^1 f_n(t)\mathrm{d}t, \forall\ x\in[0,1], n=1,2,3,\cdots$$

求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 一致收敛。

九、若 $f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 时连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续。

十、若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且 $f'(a)<f'(b)$，则对 $\forall\ \mu\in(f'(a),f'(b))$，必有 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\mu$。

北京航空航天大学

二00二年硕士生试题 题单号：391

数学分析 （共3页）

一、（本题16分，每小题8分）

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言，叙述函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非一致连续的定义.

2. 证明 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续.

二、（本题12分）

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续函数，且对任意 $x\in[0,1]$ 有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. 求证：存在 $t\in[0,1]$ 满足 $f(t)=\sin(t\pi/2)$.

三、（本题18分，每小题6分）

已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，令

$$I(c)=\int_0^1 (f(x)-c)^2dx.$$

1. 求 $\min\{I(c):\ -\infty<c<+\infty\}$.

2. 证明 $\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)dx$.

3. 证明在上述不等式中，等号成立的充要条件为 $f(x)\equiv$常数， $x\in[0,1]$.

四、(本题 16 分，每小题 8 分)

给定函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} xe^{-nx}, \qquad x\in[0,\infty).$$

1. 证明该函数项级数在 $[0,+\infty)$ 逐点收敛.

2. 证明该函数项级数在 $[0,+\infty)$ 非一致收敛.

五、(本题 12 分)

计算积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$$

六、(本题 10 分)

已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xf(x)dx=0$. 求证：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有两个零点.

七、(本题 16 分，每小题 8 分)

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续函数，$g(x)$ 是以 1 为周期的黎曼可积函数，证明：

1. 对任意 $n\geqslant 1$ 和 $0\leqslant k\leqslant n-1$，存在 $x_{n,k}\in[k/n,(k+1)/n]$ 满足

$$\int_0^1 f(x)\,|\,g(nx)\,|\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k})\int_0^1 |\,g(x)\,|\,dx.$$

2.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\,|\,g(nx)\,|\,dx = \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 |\,g(x)\,|\,dx.$$

北京航空航天大学

二OO三年硕士试题 题单号:391

数学分析 （共 3 页）

考生注意：所有答题务必书写在考场提供的答题纸上，写在本试题单上的答题一律无效(本题单不参与阅卷)。

一、（本题 10 分）

求函数 $f(x)=\cos^2 x$ 的第 2003 阶导数

$$(\cos^2 x)^{(2003)}.$$

二、（本题 10 分）

求定积分

$$\int_0^{\pi}[x\sin x/(1+\cos^2 x)]dx.$$

三、（本题 10 分）

求函数 $f(x)=2\tan x-\tan^2 x$ 在区间 $[-\pi/3,\pi/3]$ 上的最大值与最小值.

四、（本题 10 分）

求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n,\qquad |x|<1$$

的和函数.

五、（本题 10 分）

设 $0<\delta<\pi$，证明函数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[x\sin(nx)]/n$$

在 $[\delta,\pi]$ 上一致收敛.

六、(本题 15 分)

求证:

1. $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\,dx = 0$.

2. $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = 0$.

七、(本题 10 分)

求第二类曲面积分

$$\iint_\Sigma x(y^2-z^2)dx+y(z^2-x^2)dy+z(x^2-y^2)dz,$$

其中Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧.

八、(本题 10 分)

设α, β是常数, 且 $0 < \alpha < \beta$. 试证明

$$\int_0^{+\infty} [(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x})\sin x/x]dx = \mathrm{arctg}\beta-\mathrm{arctg}\alpha.$$

九、(本题 10 分)

设 S 是非空有界实数集合, $\xi = \inf S$. 试证明, 若 $\xi \notin S$, 则必存在 S 中一个严格单调减少数列 $\{x_n\}$, 使 $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.

十、(本题 15 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内可导, 且 $f'(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内有界. 试证明 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内一致连续.

2. 证明函数 $y = \ln x$ 在 $(0, 1)$ 内非一致连续.

十一、(本题 10 分)

证明不等式

$$x - x^3/6 < \sin x, \quad x > 0.$$

十二、(本题 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二次可微, 且 $f''(x)>0, x\in(a, b)$. 试证明$\forall x\in(a, b)$, $\forall h > 0$, 且 $(x-h, x+h)\subset(a, b)$ 都有

$$f(x) \le (1/2)[f(x-h) + f(x+h)].$$

十二、（本题 20 分）

1. 试证明，对每个正整数 n，方程

$$x + x^2 + \ldots + x^n = 1 \qquad (*)$$

在[0, 1]内都存在唯一的解.

2. 用 x_n 表示方程(*)在[0, 1]内的解. 试证明，数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

2004年北京航空航天大学数学分析考研试题

1．设$f(x)$在(a,b)上可微，$f'(x)$在(a,b)上单调，求证$f'(x)$在(a,b)上连续。

2．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$\forall x\in[a,b]$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f(x))^n$收敛，求证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f(x))^n$在$[a,b]$上一致收敛。

3．设$f(x)$在圆盘$x^2+y^2\le 1$上有连续的偏导数，且$f(x)$在其边界上为0，求证：

$f(0,0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}-\dfrac{1}{2\pi}\iint_{S_\varepsilon}\dfrac{f_x x+f_y y}{x^2+y^2}dxdy$，其中$S_\varepsilon=\{(x,y)\mid \varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1\}$。

4．设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微，且$f(x)=o(x^n)$ $(n\to+\infty)$，求证当$k\ge n+1$时，$\exists x$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0$。

5．设$f(x)=\int_0^x \sin^n t\,dt$，求证：当$n$为奇数时，$f(x)$是以$2\pi$为周期的周期函数；当$n$为偶数时$f(x)$是一线性函数与一以$2\pi$为周期的周期函数之和。

6．设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微；$f(0)f'(0)\ge 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)=0$，求证：

$\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\forall n$，$0\le x_n\le x_{n+1}$，使$f^{(n)}(x_n)=0$。

7．设$f(x)$在$(a,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(f(x))=1$，求证$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在。

北京航空航天大学2005年
硕士研究生入学考试试题　科目代码：391

数学分析　(共2页)

考生注意：所有答题务必书写在考场提供的答题纸上，写在本试题单上的答题一律无效（本题单不参与阅卷）。

一、（本题20分，每小题各10分）

(1) 已知 $f(0)=f'(0)=1$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin f(x)-\sin 1}{\sin\frac{x}{2}}$.

(2) 计算 $\int_0^1 \dfrac{x^a-x^b}{\ln x}dx$, 其中 $0<b<a$.

二、（本题10分）

设 $r>1$. 令

$$x_n=(1-\frac{1}{r})(1-\frac{1}{r^2})\cdots(1-\frac{1}{r^n}),\qquad n=1,2,\ldots.$$

试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

三、（本题15分）

设 $p>0$. 求直线 $x=\dfrac{p}{2}$ 和抛物线 $y^2=2px$ 所包围图形绕直线 $y=p$ 旋转而成的旋转体的体积.

四、（本题15分）

计算曲线积分 $\int_C xy^2dy-x^2ydx$, 其中 C 表示圆周 $x^2+y^2=1$, 方向为逆时针方向.

五、（本题15分）

设 f 在 $[0,\infty)$ 连续， $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. 证明

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=0.$$

六、（本题 15 分）

设函数 f 在 $[0,\infty)$ 有界、可微，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=a$. 求证 $a=0$.

七、（本题 15 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 有连续导函数，$f(0)=f(1)=0$. 试证明对任何 $\xi\in(0,1)$ 都有 1

$$|f(\xi)|^2\le\frac{1}{4}\int_0^1|f'(x)|^2dx.$$

八、（本题 15 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$f(a)=f(b)=A$, 且 $f'_+(a)f'_-(b)>0$. 试证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=A$.

九、（本题 15 分）

研究定义在数轴 $\mathbf{R}$ 的函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin^2 x, & x\in Q,\\ 0, & x\notin Q,\end{cases}$$

的不连续点类型，其中 Q 为有理数集合，并回答 f 在哪些点可导.

十、（本题 15 分）

设函数 f,g 满足：

(a) f,g 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导；(b) $f(0)=g(0)=0$, $g(1)=1$;

(c) $\forall x\in(0,1), 0<f'(x)<g'(x)$.

证明：

(i) 对任何 $x\in[0,1]$, 存在唯一 $y\in[0,1]$ 使得 $g(y)=f(x)$;

(ii) 任取 $x_0\in[0,1]$, 由下述递推公式确定数列 $\{x_n\}$

$$g(x_n)=f(x_{n-1}),\qquad n=1,2,\ldots.$$

那么 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

北京航空航天大学2006年
硕士研究生入学考试试题　科目代码：391

数学分析　（共2页）

考生注意：所有答题务必书写在考场提供的答题纸上，写在本试题单上的答题一律无效（本题单不参与阅卷）。

一、(本题 15 分)

已知 $0 < x_1 < \sqrt{3}$，令

$$x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n},\ n = 1, 2, \ldots.$$

证明数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

二、（本题 15 分）

设 $y = \dfrac{1}{1-x^2}$. 求 n 阶导数 $y^{(n)}$.

三、（本题 15 分）

设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，证明，

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

四、（本题 15 分）

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = a$. 证明，对任何正数 T,

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x+T) - f(x)] = aT.$$

五、（本题 15 分）

计算双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 所围平面图形的面积，

六、（本题 15 分）

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内二阶可导，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x^2}=0.$$

求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

七、（本题 15 分）

设 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在实轴 R 上连续．证明，$f'(x)$ 在 R 上单调上升的充要条件是，对任何正数 h, 函数 $f(x+h)-f(x)$ 在 R 上单调上升．

八、（本题 15 分）

设幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的收敛半径 $R=+\infty$, 且记其和函数为 $f(x)$. 令 $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. 证明，对任何常数 $a<b$, 函数序列 $\{f(f_n(x))\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(f(x))$.

九、（本题 20 分）

求函数 $f(x,y)=\cos x\cos y\cos(x+y)$ 在闭正方形 $R=\{(x,y)|0\le x\le \pi, 0\le y\le\pi\}$ 上的最大值和最小值．

十、（本题 10 分）

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=f'(0)=1$. 求 $\lim_{x\to 0}(f(x))^{\frac{1}{x}}$.

北京航空航天大学2007年
硕士研究生入学考试试题

科目代码：791

数学分析

(共 2 页)

考生注意：所有答题务必书写在考场提供的答题纸上，写在本试题单上的答题一律无效（本题单不参与阅卷）。

一、(本题 15 分)

设有界数列 $\{x_n\}$ 只有有限个聚点. 证明：存在有限个数 $a_1,\ldots,a_k$，使得

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-a_1)\ldots(x_n-a_k)=0.$$

二、(本题 15 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 连续. 证明，如果对任何 $x\in(-\infty,\infty)$ 都有 $f(x)=f(2x)$，则 f 必是常值函数. 请举例说明，若没有 f 连续的条件，结论未必成立.

三、(本题 15 分)

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 可导，函数 $|f'(x)|$ 在 (a,b) 连续，证明 $f'(x)$ 在 (a,b) 连续.

四、(本题 15 分)

利用函数 e^x 的泰勒展开式计算 $\sqrt{e}$，使得误差不超过 10^{-2}.

五、(本题 15 分)

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

六、（本题 15 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数，且 $f(a)=0$. 证明

$$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

七、（本题 20 分）

设 a_n 满足 $\ln\ln n \le a_n \le \ln n, n=2,3,\cdots$. 研究函数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 的收敛性、一致收敛性以及和函数的连续性、可导性.

八、（本题 15 分）

设函数 $f(x,y)$ 定义在 $D=\{(x,y)|\ x^2+y^2<1\}$ 上. 假设在 D 内任何一点下述条件成立：

(i) $f(x,y)$ 关于变量 x 连续；

(ii) $f(x,y)$ 关于变量 y 可偏导，且 $|f'_y(x,y)| \le 1$.

证明 $f(x,y)$ 在 D 内连续.

九、（本题 10 分）

记 $D_R=\{(x,y)|\ |x|\le R, |y|\le R\}$. 证明

$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{D_R}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\pi.$$

十、（本题 15 分）

计算曲线积分

$$\int_{AO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy,$$

其中 AO 为由点 $A(a,0)$ 至原点 $O(0,0)$ 的上半圆周：$x^2+y^2=ax$.

北京航空航天大学2008年
硕士研究生入学考试试题 科目代码：791
数学分析

考生注意：所有答题务必书写在考场提供的答题纸上，写在本试题单上的答题一律无效（本题单不参与阅卷）。

一、（本题 10 分）

设 $f(x) = x^2 \sin x$. 求 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的第 2008 阶导数.

二、（本题 15 分）

证明：当 $x > 0$ 时， $\ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

三、（本题 15 分）

设函数

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$$

在 $(0, \infty)$ 内有一阶连续导数，求出 a, b 之值.

四、（本题 15 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并且单调增加．证明：对任意的 $a \in (0,1)$ 都有

$$\int_0^a f(x)dx \leq a \int_0^1 f(x)dx.$$

五、（本题 15 分）

求由曲线 $y^2 = 2px + p^2$ 与 $y^2 = -2qx + q^2$ 所围成的图形的面积，这里 p, q 为正常数.

北京航空航天大学 2009 年
硕士研究生入学考试试题

科目代码：360

数学专业基础课

（共 2 页）

考生注意：所有题目均为必答题，所有答题务必书写在考场提供的答题纸上，写在本试题单上的答题一律无效（本题单不参与阅卷）。

一 、计算（本题 10 分）

将函数 $f(x)=x\arccos x$ 在 $x_0=0$ 处展开成 Taylor 级数，并计算 $f^{(2009)}(0)$ 。

二、计算（本题 10 分）

计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 是锥面 $x=\sqrt{y^2+z^2}$ 介于 $0\le x\le h$ 部分的后侧，即法向量指向 x 轴负向的那一侧。

三、证明（本题 14 分，其中每小题各 7 分）

（1） $\varsigma(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,\infty)$ 内不一致收敛；

（2） $\varsigma(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,\infty)$ 内可微。

四、（本题 14 分，其中每小题各 7 分）

设 $f(x)=2x-x^2$, 对任意给定的实数 x_0 定义数列 $\{x_n\}$ 如下： $x_{n+1}=f(x_n)$, $n=0,1,2,\cdots$ 。

（1）证明：当 $x=\frac{1}{2}$ 时，数列 $\{x_n\}$ 收敛，并计算它的极限值。

（2）记（1）中的极限值为 α ，试找出所有的实数 x_0，使得由 $x_{n+1}=f(x_n)$ 构造的数列收敛到 α 。

五、（本题 12 分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上可微，并且 $f(a)f'_-(a)<0$，以及 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$。证明：至少存在一个 $\xi\in(-\infty, a)$ 使得 $f'(\xi)=0$。

六、（本题 15 分，其中第（1）小题 6 分，第（2）小题 9 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续。

（1）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx$；　（2）若 $f(1)=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx=0$。

七、计算（本题 10 分）

求多项式 $f(x)=x^3-2x^2+2x-1$ 与 $g(x)=x^4-x^3+2x^2-x+1$ 的最大公因式 $(f(x), g(x))$。

八、证明（本题 10 分）

设 A 是数域 F 上 n 阶不可逆方阵，则 $\left|A^*\right|=0$，A^* 指 A 的伴随阵。

九、证明（本题 15 分，第（1）小题 7 分，第（2）小题 8 分）

设 A 是数域 F 上 n 阶方阵。证明：

（1）存在自然数 m，使得：秩（A^m）= 秩（A^{m+1}）。

（2）存在 F 上 n 阶方阵 B，使得：$A^m=A^{m+1}B$。

十、计算（本题 20 分，每小题 10 分）

设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2-4x_1x_3-4x_2x_3$ 为实二次型。

（1）用正交的线性替换化 f 为标准形。（2）求一个 3 维向量 α 使得 $f(\alpha)=0$。

十一、证明（本题 10 分）

设欧氏空间 V 的维数 $\dim(V)\geq 2$。V 上的线性变换 σ 把任两个相互正交的非 0 向量仍变为相互正交的非 0 向量，则 σ 必是一个数乘变换与一个正交变换的乘积。

十二、计算（本题 10 分）

求两个 2 阶实方阵 A、B 使得：A、B、$A+B$ 均可逆，且 $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$。

北京航空航天大学2010年
硕士研究生入学考试试题 科目代码：360

数学专业基础课 （共2页）

考生注意：所有答题务必书写在考场提供的答题纸上，写在本试题单上的答题一律无效（本题单不参与阅卷）。

一、 （本题16分，每小题各8分）计算

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^{2x}-1}\int_0^x (\cos t)^{\frac{1}{t^2}}dt$，　　（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+\tan^{2010}x}dx$。

二、 （本题12分）计算积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x^3dydz+y^2dzdx+xzdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

其中Σ是上半球面$x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$的下侧。

三、 （本题13分）讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}\ (p>\dfrac{1}{2})$的绝对敛散性与条件敛散性。

四、 （本题12分）设 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$在$(-\infty,\ +\infty)$内一致连续，$f_n(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$内一致收敛于$f(x)$，证明：$f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$内一致连续。

五、 （本题12分）设$f(x)$在$[0,1]$上可微，并且$f(0)=0,\ f(x)\neq 0,\ \forall x\in(0,1)$.证明：对任意的正整数$n,m$，均存在$\xi=\xi_{n,m}\in(0,1)$使得

$$n\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=m\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}。$$

六、 （本题10分）设非负数列$\{x_n\}$满足

$$x_{n+1}\leq x_n+\frac{1}{n^2},n=1,2,3\cdots$$

证明：数列$\{x_n\}$收敛。

七、　（本题 12 分）设 A 为 n 阶方阵，X 为 n 维列向量，多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式为1。证明：若 $f(A)X=0, g(A)X=0$，则 $X=0$。

八、　（本题 12 分）设 A 为实对称阵，并且 $A^2=0$，证明：$A=0$。

九、　（本题 10 分）设 σ 是线性空间 V 上的可逆的线性变换，W 是 σ 的不变子空间，证明：W 也是 σ^{-1} 的不变子空间。

十、　（本题 14 分）设线性空间 V 上的线性变换 σ 以所有非零向量为特征向量，证明：σ 必是数乘变换。

十一、（本题 15 分）设 σ 是线性空间 V 上的线性变换，证明：

$$\dim(\operatorname{Im}\sigma)-\dim(\operatorname{Im}\sigma^2)=\dim(\ker\sigma\bigcap\operatorname{Im}\sigma)。$$

十二、（本题 12 分）设 A 是实正定阵，S 是实反对称阵，证明：$|A+S|>0$。

北京航空航天大学2011年
硕士研究生入学考试试题 科目代码：609

数学专业基础课 （共2页）

考生注意：所有答题务必书写在考场提供的答题纸上，写在本试题单上的答题一律无效（本题单不参与阅卷）。

一、 **（本题20分，每小题各10分）**计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x\ln(1+2x)}}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\int_0^{n\pi} x|\sin x|\,dx$

二、 **（本题 12 分）**计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 为锥面 $y^2+z^2=x^2$ 位于 $0\le x\le h$ 部分的前侧（即法向量与 x 轴正向成锐角的一侧）。

三、 **（本题12分）**讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ 的连续性与可微性，其中 $\mathbb{Q}$ 表示有理数集，$\mathbb{R}$ 表示实数集。

四、 **（本题12分）**设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，并且 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\dfrac{1}{2}f(1)$。证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$。

五、 **（本题11分）**讨论级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}x^2(1-x)^n$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛性。

六、 **（本题 8 分）**设 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可导，并且 $f(a)=f(b)=0$，$f_+'(a)>0$ 以及 $f_-'(b)>0$。证明：至少存在一点 $c\in(a,\ b)$，使得 $f(c)=0$ 并且 $f'(c)\le 0$。

七、 **（本题 12 分）**设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)$ 为数域 F 上的一元多项式，A 为数域 F 上的 n 阶方阵，X 为数域 F 上的 n 维列向量。若 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)$ 的最大公因式为1，证明：当 $f_i(A)X=0, i=1,2,\cdots,m$ 时，必有 $X=0$。

八、　（**本题 12 分**）设复数域上m个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，问$\lambda$取什么复数值时，$\alpha_1-\lambda\alpha_2,\alpha_2-\lambda\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}-\lambda\alpha_m,\alpha_m-\lambda\alpha_1$线性无关？

九、　（**本题 12 分**）设复数域上n维线性空间V的一组基为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$。现将$V$看作实数域上的线性空间（加法、数乘均按原定义，仅将数乘的数域限制在实数域上），求它的一组基，并证明所得的是一组基。

十、　（**本题 13 分**）设A为复数域上的n阶方阵，且$A^2\neq 0, A^3=0$。问A是否相似于对角阵？证明你的结论。

十一、（**本题 13 分**）设$A=\begin{pmatrix}1&6&6\\6&1&6\\6&6&1\end{pmatrix}$，求正交阵$Q$使得$Q^{-1}AQ$为对角阵。

十二、（**本题 13 分**）设A为数域F上的n阶方阵，A的秩$r(A)=1$，且$A^k=0,k>2$。证明：$A^2=0$。