

近日点進動与升交点西移

梁彬彬 著

邮箱: xhzjzs@sina.com 55340885@qq.com

2013年2月11日

前 言

受刘岳泉网友帖子^[1]的影响，本人也开始尝试着推导轨道方程。该贴发布时间是 2010 年 5 月 12 日，本人于当年 5 月底开始推导，二体部分较容易。推导受摄轨道的时候，开始还不清楚的近日点进动的成因，刘岳泉那贴的 58 楼给了我一个提示。

在摄动处理时，碰到了复杂角度的处理，困难只是暂时的，本人看到西北工业大学的航天器控制资料里的旋转变换矩阵能解决这种问题，不消几天就慢慢掌握了这一数学工具。另外，本人以前碰到过较复杂的积分，科学网求教过程中某网友的一句：“用 Matlab 一个命令就搞定了”。在这句话的震惊下，本人不消几天就掌握了用 Matlab 处理像积分这样的简单问题。后来也就慢慢学会了 Matlab 其他的一些功能。由于数值计算有一定步长，没有插值的数据图提取的近日点数据不理想。人工求解进动值发现很难处理。请教了几位教授，但是他们也不会。后来看资料发现利用三次样条插值，能提取出较为精确的近日点数据。至此基本实现了轨道方程应用于近日点进动与升交点西移方面的分析与研究。

本文是以牛顿引力为基础。轨道参量除了距离与速度两个参量外，其他都是角度参数。根据速度增量与速度的矢量合成能直接求解角度的偏转量。二体轨道通过人工推导，得出的结论跟一般轨道理论一致。受摄相对轨道微分方程组(2.12)比较复杂，可通过数值计算进行处理。月球的模拟结果：100 儒略年西移量为 33.730632 弧度，比实际慢 0.1503%；100 儒略年进动 11.312066 圈，比实际快 0.1162%；平均速度约 1023m/s；月地距离最大范围 35.64014 到 40.67171 万公里；黄白交角变化范围 $4.987^\circ \sim 5.303^\circ$ 。模拟得到行星近日点进动(括号外)与升交点西移(括号内)的一组数据为：水星 525.288(526.933)；金星 1187.421(997.605)；地月 1208.195(11154.941)；火星 1771.823(1018.053)；木星 870.009(-671.087)；土星 2080.737(955.419)；天王星 311.457(-329.611)；海王星 55.322(26.324)，单位角秒/世纪，近日点向东进动为正，升交点向西移动为正。通过几个以牛顿引力为基础的摄动方程，如：本人的，Gauss 型受摄运动方程、Lagrange 行星运动方程，刘岳泉的。跟观测值的对比可发现，其他行星的异常进动值跟广相拼凑值相差十萬八千里。结合先锋号异常，不难发现，广相是一个拼凑的投机倒把性质的糊弄人的谬论。

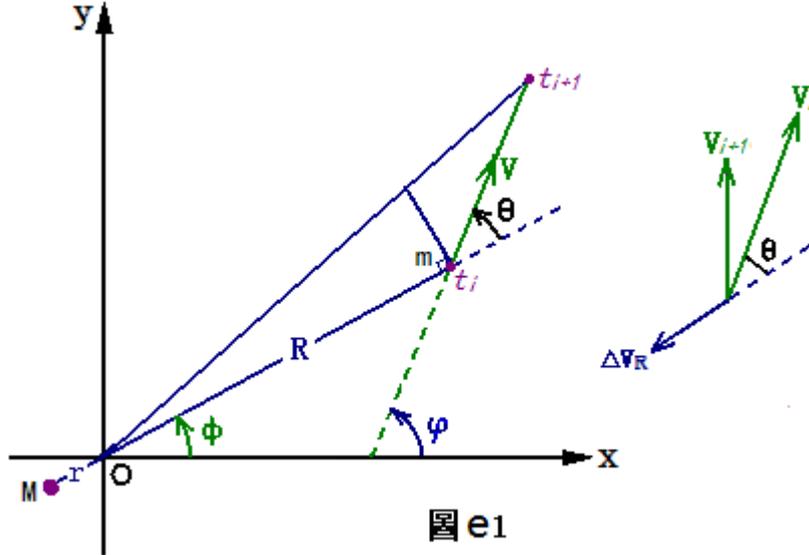
本方程除了可用于分析近日点进动和升交点西移外，还可用于引力理论的研究、类轨道现象的处理，等等。

梁彬彬

2013 年 2 月 11 日

第一章. 二体軌道方程

1.1 極坐标軌道方程推导



如圖 e1，兩天體質量分別為 M 和 m ，其質心為質心慣性系 $O-xy$ 的原點 O 。伴星 m 的速度為 V ，距原點為 R 。時刻 t_i 到 t_{i+1} 的時間間隔為 Δt 。當 Δt 趨於無窮小時各參數的變化量為無窮小，作系數時可當常數對待。矢量合成遵從平行四邊形法則，因此：

$$\begin{cases} \Delta\phi = \arctan(\Delta V_R \sin\theta_i / V_i) \\ \Delta\phi = \arctan(V_i \sin\theta_i \Delta t / R_i) \\ \Delta V = \sqrt{V_i^2 - 2 \cos\theta_i \Delta V_R V_i + (\Delta V_R)^2} - V_i \\ \Delta\theta = \Delta\phi - \Delta\phi \\ \Delta R = \sqrt{R_i^2 + 2 \cos\theta_i V_i \Delta t R_i + (V_i \Delta t)^2} - R_i \end{cases} \quad \dots \quad (1.1)$$

引力產生的速度增量為 ΔV_R ，根據牛頓理論： $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_R}{\Delta t} = \frac{GM}{(R+r)^2} = \frac{GM}{\eta_m^2 R^2}$ 。泰勒展開上式舍去比 $\Delta t (\Delta t \rightarrow 0)$ 高階的無窮小量，可求得導數。得到二體軌道微分方程組：

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = \frac{GM \sin\theta}{\eta_m^2 R^2 V} = \frac{A_R}{V} \sin\theta \\ \frac{d\phi}{dt} = \frac{V \sin\theta}{R} \\ \frac{dV}{dt} = -\frac{GM}{\eta_m^2 R^2} \cos\theta \\ \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{GM}{\eta_m^2 R^2} - \frac{V^2}{R} \right) \frac{\sin\theta}{V} \\ \frac{dR}{dt} = V \cos\theta \end{cases} \quad \dots \quad (1.2)$$

1.2 二体轨道人工求解

在质心惯性系中，M 与 m 必然以相等的角速度在旋转。两者的各轨道参数同步且等幅度地变化，这种运动可称为对映运动。令 M 速度为 v ，距原点为 r 。能够得到：

$$\frac{v}{V} = \frac{r}{R} = \frac{m}{M} \Rightarrow \eta_m = 1 + \frac{m}{M} \quad \dots\dots (1.3)$$

(1.2) 隐含着角动量守恒，直接得出开普勒第二定律，不需要依靠假设引入角动量守恒。不过，在摄动力作用下角动量会发生波动，不再保持恒定。

$$\frac{d}{dt}(V \sin \theta R) = -\frac{GM}{\eta_m^2 R} \cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta \left(\frac{GM}{\eta_m^2 R} - V^2 \right) + V^2 \cos \theta \sin \theta = 0$$

令 $V \sin \theta R = V_\phi R = h_m$ ； $u = 1/R$ 。根据 (1.2) 得到：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) &= \frac{dV}{dt} \cos \theta - V \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{h_m^2}{R^3} - \frac{GM}{\eta_m^2 R^2} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) &= \frac{h_m}{R^2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{h_m}{R^2} \frac{dR}{d\phi} \right) = -\frac{h_m^2}{R^2} \frac{d^2 u}{d\phi^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{\eta_m^2 h_m^2} \quad \dots\dots (1.4)$$

$$\text{结合初值：} u(0) = \frac{1}{R_{90}} \left[\theta = 90^\circ \text{ 时的 } R \text{ 为 } R_{90} \right]； \frac{du}{d\phi}(0) = -\frac{1}{h_m} \frac{dR}{dt}(0) = 0$$

$$\text{令 } \varepsilon = \frac{\eta_m^2 h_m^2}{GM R_{90}} - 1, \text{ 得到：} R = \frac{1}{u} = \frac{\eta_m^2 h_m^2}{GM(1 + \varepsilon \cos \phi)} \quad \dots\dots (1.5)$$

当 $|\varepsilon| < 1$ 且 $\varepsilon \neq 0$ 时，轨道为椭圆。 R_{90} 为轨道长半径时， $-1 < \varepsilon < 0$ ； R_{90} 为轨道短半径时， $0 < \varepsilon < 1$ 。设椭圆半长轴为 a ，半短轴为 b ，焦距为 c ， $b^2 + c^2 = a^2$ 。偏心率 $e = c/a = |\varepsilon|$ 。轨道长半径 = $a(1+e)$ ，短半径 = $a(1-e)$ 。轨道周期为 T 。椭圆面积 $S = \pi ab$ ，得到：

$$\pi ab = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 d\phi = \frac{1}{2} \int_0^T h_m dt = \frac{1}{2} h_m T \quad \dots\dots (1.6)$$

$$e = \frac{\eta_m^2 h_m^2}{GM a(1-e)} - 1 \Rightarrow \eta_m^2 h_m^2 = GM a(1-e^2) \Rightarrow R = \frac{a(1-e^2)}{1 + \varepsilon \cos \phi} \quad \dots\dots (1.7)$$

$$T = \frac{2\pi ab}{h_m} = \frac{2\pi \eta_m a^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{GM a(1-e^2)}} = 2\pi \eta_m \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \eta_m^2}{GM} \quad \dots\dots (1.8)$$

得到开普勒第三定律：周期 T 平方与椭圆半长轴 a 立方之比为恒量。

轨道速度是径向速度与切向速度的矢量和，利用 (1.5) (1.7) 等能够求得：

$$V^2 = \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \left(R \frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \left\{ \frac{\eta_m^2 h_m^2}{GM} \left[\frac{-\varepsilon (-\sin \phi) h_m / R^2}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^2} \right] \right\}^2 + \frac{h_m^2}{R^2} = \frac{GM}{\eta_m^2} \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right) \quad \dots\dots (1.9)$$

(1.2) 中令 $\theta = \pi/2$ 或者 (1.9) 中令 $a = R$ ，质点做匀速圆周运动。得到第一宇宙速度：

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow d\theta = 0 \Rightarrow \frac{GM}{\eta_m^2 R^2} = \frac{V^2}{R} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{GM}{\eta_m^2 R}} \quad \dots\dots (1.10)$$

1.3 相对参数和真实参数

把(1.2)中 V, R, M 替换成 v, r, m 就是 M 的轨道。相应的 $\eta_M = \eta_m M / m$; $h_M = h_m m^2 / M^2$; $\varepsilon_M = \eta_M^2 h_M^2 / Gm r_{90} - 1 = \varepsilon$ 。初值发生变化: $u(\pi) = 1/r_{90}$; $du/d\phi(\pi) = 0$ 。得到:

$$r = \frac{\eta_M^2 h_M^2}{Gm[1 + \varepsilon_M \cos(\phi + \pi)]} = \frac{\eta_m^2 h_m^2}{GM(1 - \varepsilon \cos \phi)} \frac{m}{M} \quad \dots\dots (1.11)$$

这是能保持对映运动的轨道方程。如果求解的是相对另一个天体的轨道方程。各轨道参数将是相对另一天体而言的。引力也是相对的, 即把 $GM/(R+r)^2$ 替换成 $G(M+m)/L^2$, $L = R+r$ 。相应的 $h = \eta_m^2 h_m$; $\varepsilon_X = h^2 / G(M+m)L_{90} - 1 = \varepsilon$ 。得到相对轨道方程:

$$L = \frac{h^2}{G(M+m)(1 + \varepsilon_X \cos \phi)} = \frac{\eta_m^3 h_m^2}{GM(1 + \varepsilon \cos \phi)} \quad \dots\dots (1.12)$$

与质心惯性系的描述等价, 因为两者的离心力与引力比值相等。两种体系中相关物理量跟选取的参考系有关不具备唯一性, 是相对参数。实际上, 引力正比于源的质量, 是真实唯一的。其对应的 V 也将具有真实唯一性。这就是真实参数, 隶属于相对参数。

1.4 数值计算

我们以水星为例, 用四阶五级 Runge-Kutta-Fehlberg 法计算相对轨道方程, 并在极坐标中画图。其中 $G(M+m) = 1.32712464131 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$, 得到轨迹图:

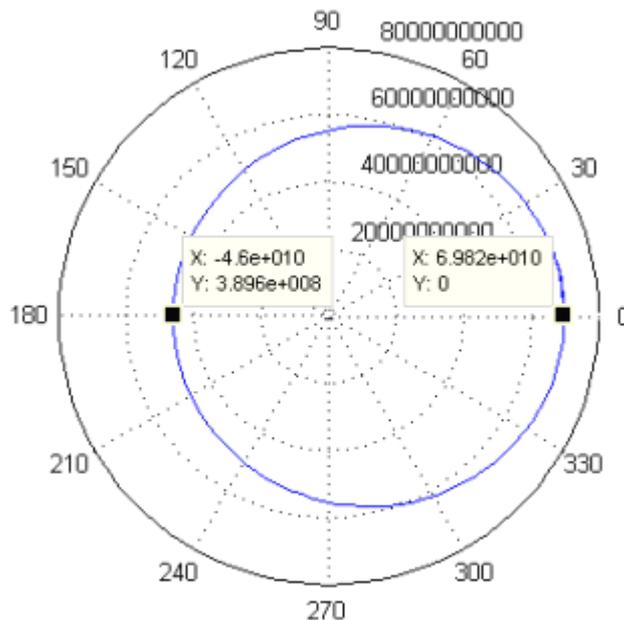
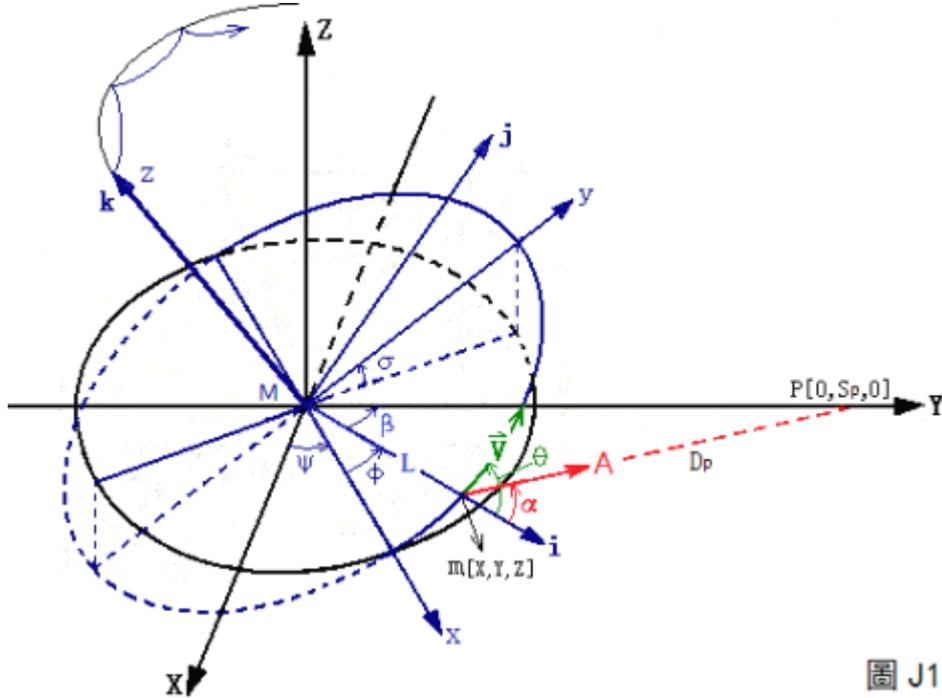


图 1 水星相对太阳的轨迹图。长度单位米。初值为: $\phi(0) = 0$; $V(0) = 38858 \text{ 米/秒}$; $\theta(0) = \pi/2$; $R(0) = 6.98174 \times 10^{10} \text{ 米}$

第二章. 近日点進動与升交点西移

2.1 引潮攝動加速度



先考虑P位于Y轴情形。M为惯性系M-XYZ的坐标原点， $L=R+r$ 。k始终垂直V和R。加速度A分解为三个分量：平行k轴的 A_k ；平行V的 A_v ；以及垂直k和V的 A_{\perp} 。同样的，攝動体P对M的加速度 A^M 也在這三个方向上分解为 A_k^M ； A_v^M ； A_{\perp}^M 。 $A_k - A_k^M$ 引起V绕L轴偏转，引发升交点西移和軌道倾角变化。 $A_v - A_v^M$ 改变速度； $A_{\perp} - A_{\perp}^M$ 改变 θ ，兩者引发近日[地]点進動。

平面 MmP 跟 Mij 的夹角为 γ 。 $A_k = A \sin \alpha \sin \gamma$ ， $D_p \sin \alpha = S_p \sin \beta$ 。 $\sin \beta$ 、 $\sin \gamma$ 可通過坐标变换求出。坐标系 M-XYZ 通過绕 Z 轴逆[時針]旋 ψ 角，绕[旋转后]X 轴逆旋 σ 角，绕 Z 轴逆旋 ϕ 角转换到坐标系 M-ijk。3-1-3 旋转顺序，相关的变换关系为：

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \sigma & \sin \sigma \\ 0 & -\sin \sigma & \cos \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \text{ Matab 求得:}$$

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \phi \cos \sigma \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \sigma \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \sigma \\ -\cos \phi \cos \sigma \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \sigma \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \sigma \\ \sin \sigma \sin \psi & -\sin \sigma \cos \psi & \cos \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

代入 P 在 M-XYZ 坐标值 $[0, S_p, 0]$ ，得到其在 M-ijk 坐标系的坐标值 $[i_p, j_p, k_p]$ ，设中心天体质量为 M，伴星质量为 m，攝動星质量为 m_p 。分析可得：

$$A_k = \frac{Gm_p S_p}{D_p^3} \sin \beta \sin \gamma = \frac{Gm_p S_p}{D_p^3} \frac{\sqrt{j_p^2 + k_p^2}}{S_p} \frac{k_p}{\sqrt{j_p^2 + k_p^2}} = \frac{Gm_p k_p}{(S_p^2 - 2i_p L + L^2)^{3/2}}$$

$$A_k^M = A^M \frac{k_p}{S_p} = \frac{Gm_p}{S_p^3} k_p; \text{ 得到: } A_k - A_k^M = Gm_p \left(\frac{k_p}{D_p^3} - \frac{k_p}{S_p^3} \right) \quad \dots \quad (2.2)$$

$$A_V = A \cos \alpha \cos \theta + A \sin \alpha \cos \gamma \sin \theta = \frac{Gm_p}{D_p^2} \left(\frac{i_p - L}{D_p} \cos \theta + \frac{j_p}{D_p} \sin \theta \right)$$

$$A_V^M = A^M \cos \beta \cos \theta + A^M \sin \beta \cos \gamma \sin \theta = \frac{Gm_p}{S_p^2} \left(\frac{i_p}{S_p} \cos \theta + \frac{j_p}{S_p} \sin \theta \right)$$

$$\text{得到: } A_V - A_V^M = Gm_p \left[\left(\frac{i_p - L}{D_p^3} - \frac{i_p}{S_p^3} \right) \cos \theta + \left(\frac{j_p}{D_p^3} - \frac{j_p}{S_p^3} \right) \sin \theta \right] \quad \dots \quad (2.3)$$

$$A_{\perp} = A \cos \alpha \sin \theta - A \sin \alpha \cos \gamma \cos \theta = \frac{Gm_p}{D_p^2} \left(\frac{i_p - L}{D_p} \sin \theta - \frac{j_p}{D_p} \cos \theta \right)$$

$$A_{\perp}^M = A^M \cos \beta \sin \theta - A^M \sin \beta \cos \gamma \cos \theta = \frac{Gm_p}{S_p^2} \left(\frac{i_p}{S_p} \sin \theta - \frac{j_p}{S_p} \cos \theta \right)$$

$$\text{得到: } A_{\perp} - A_{\perp}^M = Gm_p \left[\left(\frac{i_p - L}{D_p^3} - \frac{i_p}{S_p^3} \right) \sin \theta - \left(\frac{j_p}{D_p^3} - \frac{j_p}{S_p^3} \right) \cos \theta \right] \quad \dots \quad (2.4)$$

更一般的情形。P 以角速度 ω_p 在旋转，位于 M-PQW 坐标[角度参数为 ψ_p, σ_p, ϕ_p]中的 P 轴，其中 $\phi_p = \phi_p(0) + \omega_p t$ 。分析不难发现：只需用新变换关系改变 i_p, j_p, k_p 表达式即可，后续计算和关系式不变。M-PQW 坐标通过五次旋转：①W 轴顺旋 ϕ_p ；②P 轴顺旋 σ_p ；③W 轴逆旋 $\Theta_p = \psi - \psi_p$ ；④P 轴逆旋 σ ；⑤W 轴逆旋 ϕ ，转换到 M-ijk 坐标。利用 Matlab 可求得：

$$\begin{aligned} i_p &= S_p \{ \cos \phi_p (\cos \Theta_p \cos \phi - \sin \Theta_p \sin \phi \cos \sigma) \\ &\quad + \sin \phi_p [\cos \sigma_p (\sin \Theta_p \cos \phi + \cos \Theta_p \cos \sigma \sin \phi) + \sin \phi \sin \sigma \sin \sigma_p] \} \\ j_p &= -S_p \{ \cos \phi_p (\cos \Theta_p \sin \phi + \sin \Theta_p \cos \phi \cos \sigma) \\ &\quad + \sin \phi_p [\cos \sigma_p (\sin \Theta_p \sin \phi - \cos \Theta_p \cos \sigma \cos \phi) - \cos \phi \sin \sigma \sin \sigma_p] \} \\ k_p &= S_p [\sin \phi_p (\cos \sigma \sin \sigma_p - \cos \Theta_p \cos \sigma_p \sin \sigma) + \sin \Theta_p \cos \phi_p \sin \sigma] \end{aligned} \quad \dots \quad (2.5)$$

当 $\psi_p = 90^\circ; \sigma_p = 0^\circ; \phi_p = 0^\circ$ 时，转换到 P 在 Y 轴时的 i_p, j_p, k_p 表达式。

2.2 其他摄动加速度

除引潮摄动外，有时还需考虑诸如形状摄动、太阳辐射压，大气阻尼等影响。

引力源的非均匀球体产生了形状摄动。如图 J2 左令 $\zeta\zeta$ 为赤道面，将更具一般性，不会使引潮摄动表达式变得更为复杂。根据资料^[2-5]，一般通过三重积分得到以勒让德多项式表示的引力位函数，只保留主体项。其中 J_2 是二阶带谐项系数； a 为赤道平均半径； ϖ 为 i 轴的纬度，得到 L 方向及纬度 ϖ 方向的摄动加速度为[上标 X 表形状摄动]：

$$A_L^X = \frac{3}{2} J_2 \frac{GMa^2}{L^4} (3 \sin^2 \varpi - 1) \quad A_{\varpi}^X = -\frac{3}{2} J_2 \frac{GMa^2}{L^4} \sin 2\varpi \quad \dots \quad (2.6)$$

经转换能够得到 k, V, \perp 方向的攝動加速度，得到 (2.7)：

$$A_k^X = A_{\omega}^X \cos \Lambda \quad A_V^X = A_L^X \cos \theta + A_{\omega}^X \sin \Lambda \sin \theta \quad A_{\perp}^X = A_L^X \sin \theta - A_{\omega}^X \sin \Lambda \cos \theta$$

如圖 J2 左，赤道位置 ψ_c, σ_c 。令 $\Theta_c = \psi - \psi_c$ ，通過坐标变换不难求得：

$$\begin{aligned} \sin \varpi &= \cos \sigma_c \sin \phi \sin \sigma - \sin \sigma_c (\cos \phi \sin \Theta_c + \sin \phi \cos \Theta_c \cos \sigma) & \dots\dots & (2.8) \\ \sin \Lambda &= \cos \sigma_c \cos \phi \sin \sigma + \sin \sigma_c (\sin \phi \sin \Theta_c - \cos \phi \cos \Theta_c \cos \sigma) \end{aligned}$$

太陽輻射压公式，各资料^[2, 5, 6]有所差异，选用 NASA 的公式^[6]。其中 $f_{\odot} = 1367 \text{ W(AU)}^2 / \text{m}^2$ 为太陽輻射常數。 K 为輻射压系數，等于吸收系數+兩倍反射系數，先锋 10 号约 1.77^[6]。资料^[2]认为其不超過 1。 S 为迎光截面积。 \mathfrak{R} 为以 AU 表示的太陽到伴星距离。輻射压与太陽引力的比值反比于物体尺度，宏观天体輻射压可忽略。太陽风比太陽輻射压小 4 到 7 个量级^[2]，完全可忽略。 \odot 表太陽，輻射压的各个分量为：

$$\begin{aligned} A_k^F &= -\frac{KSf_{\odot}}{mC\mathfrak{R}^2} \frac{k_{\odot}}{D_{\odot}} \\ A_V^F &= \frac{KSf_{\odot}}{mC\mathfrak{R}^2} \left(\frac{L-i_{\odot}}{D_{\odot}} \cos \theta - \frac{j_{\odot}}{D_{\odot}} \sin \theta \right) & \dots\dots & (2.9) \\ A_{\perp}^F &= \frac{KSf_{\odot}}{mC\mathfrak{R}^2} \left(\frac{L-i_{\odot}}{D_{\odot}} \sin \theta + \frac{j_{\odot}}{D_{\odot}} \cos \theta \right) \end{aligned}$$

近地軌道，微小的大气阻尼会使軌道衰减。根据^[2]阻尼加速度为：

$$A^P = \frac{q\rho SV^2}{2m} \quad \dots\dots \quad (2.10)$$

其中 q 为气動系數，可近似取 1； ρ 为大气密度； S 为迎风面积。



圖 J2

2.3 多体受攝軌道方程组

根据速度增量与速度的矢量合成能直接计算角度的偏转量。如圖 J2 右，帶撇量是变化后的量。攝動加速度的 k 軸分量 A_k^S 將使 V 绕 i 軸偏转角度微元 $d\delta = A_k^S dt / V \sin \theta$ ，順時針旋转为正。這將引发 ϕ 角和 σ 角及 ψ 角的变化。根据球面三角与和差角公式不难求得：

$$d\phi = -\frac{\sin \phi}{\tan \sigma} d\delta \quad d\sigma = \cos \phi d\delta \quad d\psi = \frac{\sin \phi}{\sin \sigma} d\delta \quad \dots\dots \quad (2.11)$$

需注意的是，在处理近日点進動時，同一位置軌道倾角的变化不应引起 ϕ 角的变化，不然不合理。其他情形则需要考虑這種倾角变化引起的 ϕ 角变化。

以 M 为中心用相对軌道描述。转换为质心軌道時只需按比例缩放即可，攝動力也是。方

程可通過數值計算解決，攝動體[n個]再多也能處理。嚴格求解多體問題時，需列出每個天體相對中心天體的受攝軌道方程組，聯立求解。簡化處理時，每個攝動體的軌道用方程描述作為已知量，只需求解其中一組軌道方程組即可。形狀攝動只考慮較大 $J_2 a^2 / L^2$ 值的中心天體。令 $\mu = G(M+m)$ ， $\mu_p = Gm_p$ ，得到受攝相對軌道微分方程組(2.12)：

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{V \sin \theta}{L} - \left[\frac{(A_k^X + A_k^F)}{V \sin \theta} + \sum_{p=1}^n \frac{\mu_p}{V \sin \theta} \left(\frac{k_p}{D_p^3} - \frac{k_p}{S_p^3} \right) \right] \frac{\sin \phi}{\tan \sigma} \\ \frac{dV}{dt} &= -\frac{\mu}{L^2} \cos \theta + A_V^X + A_V^F + A^D + \sum_{p=1}^n \mu_p \left[\left(\frac{i_p - L}{D_p^3} - \frac{i_p}{S_p^3} \right) \cos \theta + \left(\frac{j_p}{D_p^3} - \frac{j_p}{S_p^3} \right) \sin \theta \right] \\ \frac{d\theta}{dt} &= \left(\frac{\mu}{L^2} - \frac{V^2}{L} \right) \frac{\sin \theta}{V} - \frac{A_1^X + A_1^F}{V} - \sum_{p=1}^n \frac{\mu_p}{V} \left[\left(\frac{i_p - L}{D_p^3} - \frac{i_p}{S_p^3} \right) \sin \theta - \left(\frac{j_p}{D_p^3} - \frac{j_p}{S_p^3} \right) \cos \theta \right] \\ \frac{dL}{dt} &= V \cos \theta \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \left[\frac{(A_k^X + A_k^F)}{V \sin \theta} + \sum_{p=1}^n \frac{\mu_p}{V \sin \theta} \left(\frac{k_p}{D_p^3} - \frac{k_p}{S_p^3} \right) \right] \cos \phi \\ \frac{d\psi}{dt} &= \left[\frac{(A_k^X + A_k^F)}{V \sin \theta} + \sum_{p=1}^n \frac{\mu_p}{V \sin \theta} \left(\frac{k_p}{D_p^3} - \frac{k_p}{S_p^3} \right) \right] \frac{\sin \phi}{\sin \sigma} \end{aligned} \right.$$

計算平均升交點西移值時，引潮力部分可固定 σ 值， ψ 和 ϕ 按均勻變化。T 是 m 周期。 L_p 在 R/S_p 處泰勒展開，結果保留一項，借助 Matlab 得到 (2.13)：

$$\frac{d\psi}{dt} = \sum_{p=1}^n \frac{Gm_p}{LS_p^5} \frac{d\psi}{d\phi} \frac{\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} 3i_p L k_p \sin \phi d\phi}{\sin \sigma \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\phi} = \sum_{p=1}^n \frac{3Gm_p}{8\pi S_p^3} T \cos \sigma [3(\sin \phi_p \sin \sigma_p)^2 - 1]$$

以月球為例，代入數據^[7]，T=2360592 秒。太陽形成的西移值每 18.59953 儒略年為 6.015 弧度，比實際觀察值[周期 18.59953 儒略年]慢 4.27%。

2.4 Matlab 數值計算

採用高效的 Adams-Bashforth-Moulton PECE 法計算。以月球相對軌道為例。初值為： $\phi(0) = 0$ ； $V(0) = 966.5 \text{ m/s}$ ； $\theta(0) = \pi/2$ ； $L(0) = 4.0412 \times 10^8 \text{ m}$ ； $\sigma(0) = 0.08825 \text{ rad}$ ； $\psi(0) = 0$ 。只考慮太陽攝動，模擬結果如下。如圖 2，平均速度約 1023m/s，與觀測值極接近。

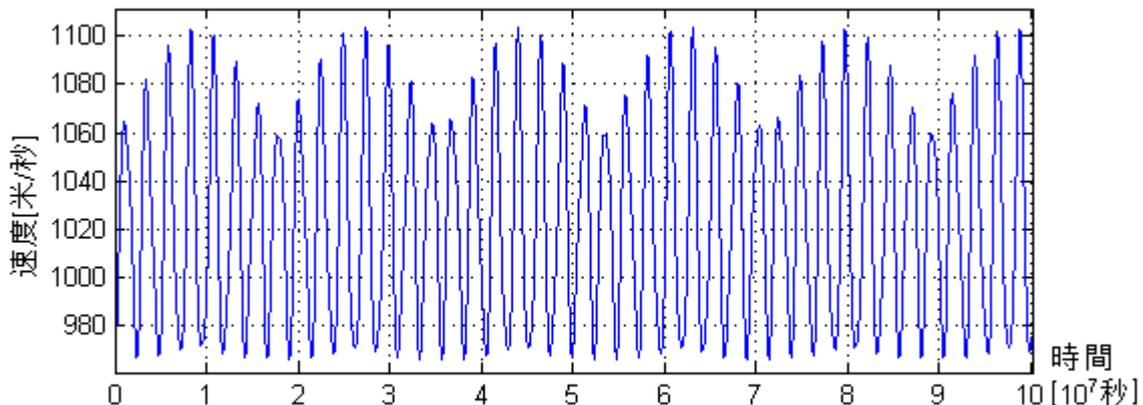


圖 2 月球相對地球軌道速度隨時間的變化圖

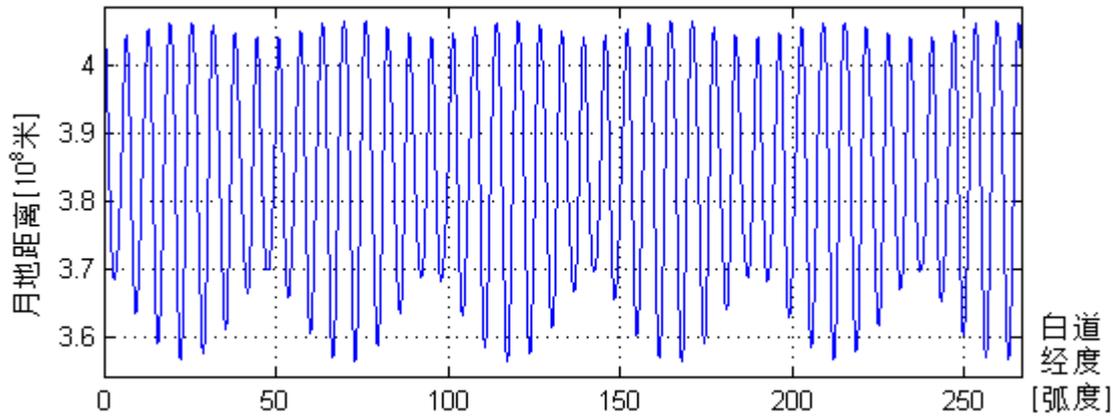


圖3 月地距离随白道经度值的变化圖

圖3放大后，100 儒略年進動 11.312066 圈，比实际[周期 8.85039 年]快 0.1162%。50 年则是快 1.497%。月地距离最大范围 35.64014 到 40.67171 萬千米。

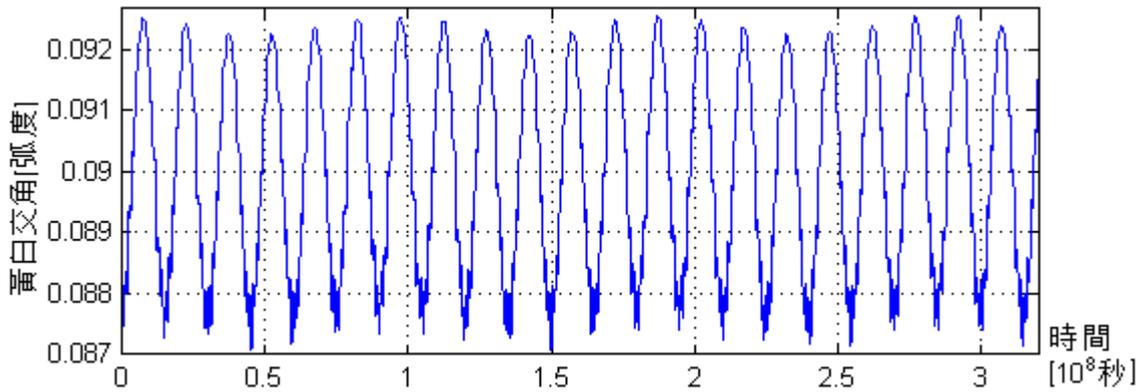


圖4 黃白交角随時間的变化圖

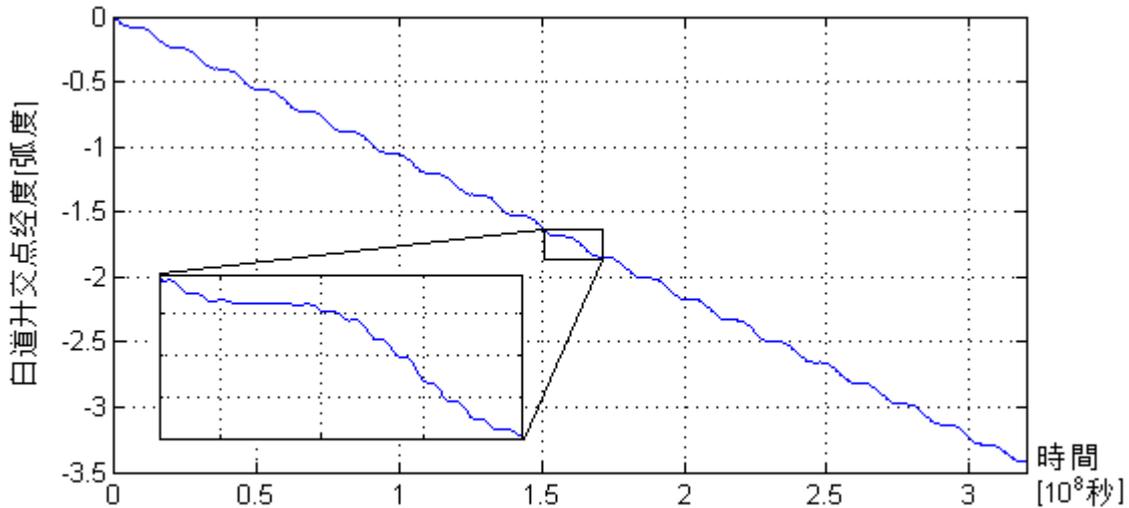


圖5 白道升交点黄经随時間的变化圖

黃白交角在 $4.987^\circ \sim 5.303^\circ$ 間变化。圖中显示三个周期变化：① $\cos \phi$ 跟恒星月有关的周期。②跟食年有关的周期。升交点相对太陽旋转一周[食年]， $k_p/D_p^3 - k_p/S_p^3$ 变化两个周期。③L 变化引起的 D_p 变化，跟近地点進動 8.85039 年周期有关。

升交点的周期变化类似于倾角。圖5放大后观察，100 儒略年总西移量为 33.730632 弧度，比实际慢 0.1503%。50 年则是快 0.0453%。

行星的近日点進動值非常微小，數值计算有一定步長，在數據圖放大后会变成尖棱状。为了找近日点更精确，在第一和最后一个近日点附近進行三次样条插值。得到數據：

表格 1 受攝軌道微分方程组 (2.12) 的數值模拟结果。軌道初值来源于^[8]。未考虑小行星和柯依伯天体，未考虑太陽辐射压和形状攝動。地月即地月质心，其軌道倾角極小，造成升交点西移值较大且極不恒定。天王星海王星升交点波動幅度较大，取振幅中心。海王星軌道大波動叠加很明显的小波動，極不规则不好找近日点。

行星名称	模拟年數	近日点進動角秒/世纪	升交点西移角秒/世纪	模拟年數	近日点進動角秒/世纪	升交点西移角秒/世纪
水星	1000	525.096	528.215	2000	525.228	526.933
金星	2000	1211.412	997.605	5000	1187.421	1000.702
地月	1000	1208.195	11154.941	2000	1216.024	7024.937
火星	2000	1771.823	1018.053	5000	1779.487	1019.102
木星	2000	981.143	-671.087	5000	870.009	-689.379
土星	5000	2080.737	955.419	10000	2087.295	953.004
天王星	5000	311.457	-329.611	10000	696.462	-385.096
海王星	3000	-275.483	26.324	10000	55.322	27.681

除了本人軌道方程的结果外。根据刘岳泉的帖子^[1]，以牛顿引力为基础的还有 Gauss 型受攝運動方程与 Lagrange 行星運動方程，以及刘岳泉自己开发的軌道方程。這几个方程得到的结果与实际观测处理數據進行对比得到表格 2 和表格 3：

表格 2 行星近日点進動各观测值与牛顿引力各軌道方程的攝動值对比，單位角秒/世纪。其中[观测 1]来源于^[9]，[观测 2]来源于^[8]的表格 8.10.2，[观测 3]来源于^[8]的表格 8.10.3。[经典]是刘岳泉网友根据 Gauss 型受攝運動方程与 Lagrange 行星運動方程得到的相同结果，其中倾角完整展开、軌道半長径展开到 27 级、軌道扁心率展开到 15 级，详见^[1]。[刘岳泉]是其开发的軌道方程(未公布)得到结果^[1]。[梁彬彬]即根据本人开发的軌道方程(2.12)得到的结果，选取表格 1 中某个模拟结果進行对比。向東進動为正。

行星	观测 1	观测 2	观测 3	经典	刘岳泉	梁彬彬
水星	573.57	577.72	573.84	528.7725	623.4201	525.228
金星	-108.80	9.66	204.47	11.3200	1172.4517	1187.421
地月	1198.28	1163.79	1144.63	1142.8734	1258.7558	1208.195
火星	1560.78	1599.88	1628.05	1593.5987	1813.5890	1771.823
木星	839.93	765.10	655.17	643.0823	760.2012	870.009
土星	-1948.89	-1508.30	1950.46	1660.9232	1913.4863	2080.737
天王星	1312.56	1468.99	333.61	310.9472	282.2659	311.457
海王星	-844.43	-1160.69	36.36	71.0706	68.8574	55.322

根据以上结果，理论值普遍跟观测值相差较大，特别是金星、土星与天王星。[经典]略微符合一些。本人理论除水星外跟刘岳泉都比较近。上述几个理论值及观测值之间的差异成因并不明朗。不过有一点是肯定的，观测值与理论的差异不是广义相对论能解释的。水星的异常进动值^[1] $42.56'' \pm 0.5''$ 是建立在西蒙·纽康的6阶展开式^[2] 得到 $531.509''$ 牛顿理论摄动值的基础上的。这是一个不可靠的基础，依赖于观测与理论计算的双重正确，不难发现，其他行星的异常进动值跟广相拼凑值相差十萬八千里。另外先锋号的异常^[6] 至少表明了引力场方程是不对的。这一切都揭示了广相是一个拼凑的投机倒把性质的糊弄人的谬论。

表格 3 行星升交点西移各观测值与牛顿引力各轨道方程的摄动值对比，单位角秒/世纪。各列数据的来源性质同表格 2。刘岳泉网友没有处理这一数据。向西移动为正。

行星	观测 1	观测 2	观测 3	经典	梁彬彬
水星	446.30	451.23	439.71	451.4639	526.933
金星	996.89	999.70	981.87	1002.7690	997.605
地月	18228.25	-----	868.46	-21765214	11154.941
火星	1020.19	1503.26	966.69	825.7351	1018.053
木星	-1217.17	-736.89	-468.89	-646.8417	-671.087
土星	1591.05	1039.24	900.54	-899.5932	955.419
天王星	1681.40	-152.44	-200.63	210.4949	-329.611
海王星	151.25	18.31	21.83	-10.6995	26.324

从上述数据来看，除水星外，本人方程的模拟结果与观测值的符合程度远好于[经典]。地月系统的倾角 σ 较小，略微的改变都会引起极其巨大的升交点移动值。

致谢：感谢刘岳泉网友，他的帖子使我产生了推导轨道方程的热情。他的提示：近日点進的引潮力成因使我减小了摸索時間。而且提供了很多好资料。

参考文献：

- [1]刘岳泉 《历时近三年的专题研究 八大行星对水星轨道近日点進動的牛顿引力攝動值完整计算结果是每百年 528. 7725" 》 <http://club.xilu.com/hongbin/msgview-950451-220816-9.html>
- [2]周济林 周礼勇 《天体力学基础 第四章 受攝二体问题》 南京大学
- [3]《第六章 卫星轨道攝動理论》
- [4]HOWARD D, CURTIS 《ORBITAL MECHANICS FOR ENGINEERING STUDENTS》 Embry-Riddle Aeronautical University First published 2005 <http://books.elsevier.com>
- [5]《第二章 航天器轨道運動的攝動》 我下载网 <http://www.woxia.net>
- [6]Anderson J.D, Laing P. A. et al. 《Study of the anomalous acceleration of Pioneer 10 and 11》 2002 Phys. Rev. D 65 082004 <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0104064>
- [7]Brian Luzum, Nicole Capitaine, et al. 《The IAU 2009 system of astronomical constants》 Celest Mech Dyn Astr (2011) 110:293 - 304 DOI 10.1007/s10569-011-9352-4
- [8]E. Myles Standish and James G. Williams 《CHAPTER 8: Orbital Ephemerides of the Sun, Moon, and Planets》 JPL
- [9]《Planetary Orbital Elements》 <http://www.met.rdg.ac.uk/~ross/Astronomy/Planets.html>