

# 水星轨道异常：几种引力理论之比较

汤克云<sup>1,2</sup>

1 中国科学院地质与地球物理研究所

2 清华大学天体物理中心

## 摘要

牛顿引力定律极好地解释了太阳系行星的运动轨道。对水星轨道作 100 年的观测，仅有微小的 43" 无法用牛顿理论去解释，偏差率只有  $8 \times 10^{-8}$ 。除牛顿引力，本文还考察了 3 种引力理论对水星轨道的解释，包括史瓦西轨道方程、后牛顿近似和推迟引力。结论是，史瓦西轨道无法解释水星轨道异常，后牛顿近似的合理性有待深入研究；迄今为止，考虑了引力源相对于观测者的速度及加速度的推迟引力可能对水星轨道异常作出了物理图像最清楚、最合理、最完整的解释。

关键词：水星轨道异常， 牛顿引力， 史瓦西轨道方程，后牛顿近似，  
推迟引力

**Mercury's orbit anomaly: a comparison on  
several kind of gravitational theories**

Keyun Tang <sup>1,2</sup>

1 Institute of Geology and Geophysics, CAS

2 Center for Astrophysics, Tsinghua University

## Abstract

Newton's law of gravity offers an excellent explanation on planet orbits in the solar system. For 100 years, only a tiny part of Mercury's orbit can't be well explained by Newton's gravitation, the deviation rate is only  $8 \times 10^{-8}$ . In addition to Newton's explanation, this paper also examines explanations on Mercury's orbit by three kind of gravitational theories, including Schwarzschild orbit equation, PPN approximation and retarded gravitation. The conclusion is that the Schwarzschild metric cannot well explain anomaly on Mercury's orbit anomaly, the rationality of the PPN approximation should be further studied. So far, the retarded gravitational theory, considering the contribution of relative velocity and acceleration between the gravitational source and observer, may give a most reasonable and complete explanation on the anomaly of Mercury's orbit with a most clear physical picture.

Key words: Mercury's orbit anomaly, Newton's law of gravity , Schwarzschild orbit equation, PPN approximation, Schwarzschild orbit equation

## 前言

天才牛顿发现的牛顿引力定律极好地解释了太阳系行星的运动轨道：水星绕太阳转动 100 年，共转过 416 周，按牛顿--开普勒标准椭圆计算，应转过  $149760^\circ$ ，即  $5.39136'' \times 10^8$ ；Le Verrier 等的观测值为  $5.39136'' \times 10^8 + 5600''$ ，消除了牛顿岁差  $5025''$  和牛顿摄动  $532''$ ，仅剩微小的  $43''$  无法用牛顿理论去解释，准确度已高达 99.999,992%，偏差率只有  $8 \times 10^{-8}$ 。要解释这剩余的微小偏差，当然要找到一种比牛顿引力更准确的引力理论。

在绝大多数广义相对论教科书和关于水星轨道异常的相关文献中，关于水星轨道异常的表述皆为：‘Le Verrier 等观测到水星近日点在 100 年内进动了 43 角秒’，这种表述不符合事实，给出了一幅错误的物理图像。

本文分别考察了 4 种引力理论对水星轨道的解释，包括牛顿引力、史瓦西轨道方程、后牛顿近似和推迟引力。结论是，平直时空中的牛顿引力的精度已极高。史瓦西度规在无穷远处才与牛顿引力等价，在有限距离处，史瓦西度规与牛顿引力有偏差，距离越近，偏差越大。仔细的研究发现，史瓦西轨道方程无法解释岁差和摄动，无法最终解释水星轨道异常。如何用后牛顿近似解释岁差和摄动，其合理

性有待深入研究。推迟引力包括三部分：经典牛顿引力，由相对速度引起的径向附加引力和由相对加速度引起的角向附加引力。推迟引力与牛顿引力的差别完全由引力源与观测者（如水星）之间的相对速度和相对加速度决定；用推迟引力中的牛顿引力部分圆满解释了水星的基本转动  $5.39136'' \times 10^8$  和牛顿岁差  $5025''$  及行星摄动  $532''$ ，用径向附加引力和角向附加引力则合理解释了剩余的偏差  $43''$ 。

## 一、温伯格的三点提醒或警告

（S. 温伯格：引力论和宇宙论，邹振隆等译，第 226-228 页）

第一，Le Verrier 观测到的水星轨道偏差是每百年  $5600''$ 。在这  $5600''$  中，包括岁差  $5025''$  和行星摄动  $532''$ ，这两项都是牛顿扰动。这  $\Delta\varphi = 43''$  是 Le Verrier 观测到的水星轨道偏差与牛顿理论值之差，即

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{obs} - \Delta\varphi_{NT} \quad (8.6.13)$$

（本文注：遗憾的是，在几乎所有关于‘水星进动’的文献和教科书中，绘出的‘水星进动’的图像都是错误的。在这些错误的图像中，将水星近日点画成每周进动了  $0.103''$ ，100 年，水星绕太阳转了 416 圈，水星近日点共进动了  $0.103'' \times 416 = 43''$ 。100 多年来，正是这样的错误图像和巧合误导了一代又一代的大、小物理学家。错误的根子来源于‘Le Verrier 观测到水星近日点每百年进动了  $43''$ ’这样的错误表述，符合实际的正确表述应是‘Le Verrier 观测到水星轨道异常，比按牛顿理论值每百年多转了  $43''$ ’。）

第二，还可能存在其它未知的那怕非常小的非牛顿扰动，都会影响水星的运动。

（本文注：在史瓦西轨道方程中的右侧第二项，即被 Ohanian, 俞允强教授，刘辽--赵峥教授，吴时敏教授等略去了的线性扰动项，正是温伯格所担心的一种非牛顿扰动。此项是一个极小的常数，对牛顿轨道的影响仅仅是使牛顿轨道的半径稍稍小了一点，不改变牛顿轨道的形状，不改变近日点的方位，也就是说，[此项的略去对水星轨道近日点的确没有任何影响！](#) 但是，由于此项附加引力仍沿径向，仍是保守力，[角动量仍守恒，则必然导致水星的角速度增快](#)，这当然是不可忽略的一项非牛顿扰动！）

第三，如果 Dicke 和 Goldnberg（认为太阳扁率的影响可达每百年 3.4"），那么 Einstein 的预言和观测到的剩余进动之间精确到 1% 的符合就纯属偶然了。

（本文注：Ohanian 等从共有 4 项的史瓦西轨道方程中单挑出正好等于 43" 的一项，不合理地忽略了线性扰动项的贡献（86"）；更不可理解是，Einstein 理论完全没有理会巨大的岁差和摄动（5557"），居然声称史瓦西轨道方程与 Le Verrier 的观测符合得极好！这似乎背离了物理学中的物理二字：‘物’者，观测事实也，‘理’者，逻辑道理也。既不管主要的观测事实，计算中又任意取舍，凑出一个‘理论与观测符合’的答案，难以接受！不可理喻的‘纯属偶然’！）

## 二、吴大猷先生的提醒和质疑

（吴大猷：理论物理（第四册），相对论，科学出版社，第 162 页）

在水星之情形，观测的结果，需先作许多校正（如受其他行星之干扰等），这些校正总值达 5100" 之巨，[剩余 43" 实不及总值的百分之一](#)。故理论与观测结果之吻合，似不易遽作定论。

（本文注：[吴先生的认识是清醒的，没有理由假定所有的主流物理学家都没有读过吴先生的这段话](#)）

但按专家们的意见，则以为观测是支持爱因斯坦的理论的。

（本文注：[吴先生这句话，应理解为是对广义相对论主流专家们的质疑](#)）

### 三、解释水星轨道异常的几种引力理论之比较

#### 解释水星轨道异常的几种引力理论

(表中各值, 皆按百年计算)

	牛顿岁差	行星之 牛顿摄动	非牛顿偏 差	理论偏差 与观测偏 差的符合 程度 (注1)	理论总角度 与观测总角 度的符合程 度 (注2)
	5025"	532"	43"		
牛顿万有 引力	5025" (注3)	532" (注4)	0"	99.2%	99.999,992%
史瓦西 轨道方程	X (注5)	X (注6)	129" (注7)	?	?
后牛顿 近似	? (注8)	? (注9)	43"	?	?
推迟引力	5025"	532"	43" (注10)	~100%	~100%

注:

- 水星轨道偏差之定义** 理论偏差指用牛顿理论计算出的偏差:  
包括岁差+行星摄动, 共5557"; 观测偏差: 指 Le Verrier 等通过  
观测水星近日点的方位, 发现水星近日点方位移动了5600";
- 理论总角度与观测总角度** 理论总角度指水星按牛顿--开普勒

椭圆运行 100 年转过的角度，**观测总角度**指水星沿真实轨道运行 100 年转过的角度；

3. **用牛顿引力求解岁差** 岁差是由非球对称的地球受到日、月引力之力矩作用引起，可根据牛顿引力理论作虽复杂、但概念清楚的精确计算；
4. **用牛顿引力求解行星摄动** 在计算金星、地球、火星、木星、土星对水星的摄动时，金星、地球、火星、木星、土星以及水星的基本轨道都是根据牛顿引力理论计算的，可分别计算单颗行星对水星的摄动作用，最后作矢量叠加。摄动计算非常复杂，但概念清楚，可达到很高的精度。
5. **用史瓦西度规求解岁差的困难** 在史瓦西度规中，引力已化为几何，也不再有力矩的概念，难于计算太阳引力对地球极轴的影响，同时由日、月的史瓦西度规计算地球极轴的进动则更加困难，未见用史瓦西度规具体计算岁差的文献；
6. **用史瓦西度规求解行星摄动的困难** 类似于注 4。在史瓦西度规中，引力已化为几何，难于计算行星引力对水星的摄动作用。如空间只有一颗太阳，勉强可用史瓦西度规表示太阳周围的时空；现在，空间有太阳和多颗行星，如何用史瓦西度规表示多星体的弯曲时空？摄动过程本已十分复杂，加上这尚不明确的多星体度规，我对用史瓦西度规求解多体摄动问题的可靠性表示怀疑。未见用史瓦西度规具体计算行星摄动的文献；
7. **史瓦西轨道方程的完全解及适用范围** 在 Ohanian, 俞允强教



授，赵峥教授，吴时敏教授等的教科书中，史瓦西轨道方程是从史瓦西度规出发，用微扰方法导出的（参见吴时敏：广义相对论教程），

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3G^3M^3}{h^2}(1+e^2) + \frac{3G^3M^3}{h^2}e\cos\varphi + \frac{3G^3M^3}{2h^2}e^2\cos 2\varphi \quad (1)$$

该方程右侧第 1 项（黑色项， $\frac{GM}{h^2}$ ）是一个常数，等于牛顿--开普勒椭圆的半正焦弦倒数( $\frac{1}{P} = \frac{GM}{h^2}$ )，对应的是牛顿引力；第 2 项（红色项）是一个极小的常数，此项的出现，不改变牛顿--开普勒椭圆的形状（偏心率不变，近日点与远日点方位不变），但使牛顿--开普勒椭圆的半径稍稍变小。由角动量守恒，必然导致水星的角速度稍稍变快。这当然是不可忽略的一项非牛顿扰动；第 3 项（蓝色项）是一个非线性扰动项，此项使水星椭圆轨道的近日点发生每百年 43 角秒的进动。

史瓦西轨道方程的解为（参见吴时敏：广义相对论教程）

$$u = u_0 + \Delta u \quad (2)$$

其中通解（基本椭圆）为

$$u_0 = \left[ \frac{GM}{h^2} + \frac{3G^3M^3}{h^4} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right) \right] (1 + e\cos\varphi) \quad (3)$$

特解（微扰项）为

$$\Delta u = \frac{3G^3M^3e}{h^4}(\varphi\cos\varphi) - \frac{G^3M^3}{2h^4}e\cos 2\varphi \quad (4)$$

Ohanian, 俞允强教授等都明确指出：史瓦西轨道方程中的线性扰动项（第二项）使轨道半径微微变小（见公式 3 中之红色项），但

他们武断地认为：轨道半径的这一变小没有观测意义。不幸的是，只要承认水星轨道半径变小一点点，根据角动量守恒，必然有角速度增加！经简单计算，这部分的贡献是 86 角秒；

我们还想强调一点，史瓦西轨道方程是用微扰方法导出的，既然是微扰方法，必须满足微扰条件，即扰动成分必须永远甚小于基本成分，即

$$\left| \frac{\Delta u}{u_0} \right| \ll 1$$

也即

$$\frac{\frac{3G^3 M^3 e}{h^4} \varphi}{\frac{GM}{h^2}} = \frac{3G^2 M^2 e}{h^2} \varphi \ll 1$$

得

$$\varphi \ll \frac{h^2}{3G^2 M^2 e} \approx \frac{10^7}{3e} \approx 10^7 \quad (5)$$

折算到年，为

$$years \ll 10^7 / (4 \times 2\pi) \approx 20,000。$$

这就是说，假如我们的时空确是如史瓦西度规所描述的弯曲时空，则从水星第 1 次围绕太阳公转开始，弯曲时空就应当开始影响水星的轨道。仅当水星的年龄甚小于 2 万年时，由微扰方法获得的解（无论是 43 角秒还是 129 角秒）才有意义。现在，水星已绕太阳转过 46 亿年，不满足微扰条件，由微扰方法获得的解（无论是 43 角秒还是 129 角秒）都没有意义！

总之，不能用 Ohanian 等教科书中的微扰轨道方法求解水星轨道

## 异常问题!

8. **关于后牛顿近似方法的精确度**      用牛顿力学解释水星轨道之偏差，精度已高达99.999,992%。 如果再要解释剩下0.000,008%之偏差，当然要找到一种准确度更高的引力理论。然而，后牛顿近似的依据是维里定理，即认为水星的势能平均值 $\frac{GM}{\bar{r}}$ 与动能平均值 $\frac{1}{2}\bar{v}^2$ 同量级，然后直接按 $\frac{GM}{\bar{r}c^2} \sim \frac{\bar{v}^2}{c^2}$ 作参数展开，也没有理会动能的系数( $\frac{1}{2}$ )。 我们知道：水星的偏心率约0.2，则平均势能与瞬时势能之差大到20%的量级；且由能量守恒知，势能（绝对值）最大时动能应最小，考虑以上这三种因素，按维里定理对水星运动作近似实在是一个太粗略的近似。居然解释了牛顿力学无法解释的0.000,008%，不可思议；用后牛顿近似计算球对称、无转动太阳的度规已十分复杂，月球距地球更近，相对转动速度更快，对地球极轴进动的影响更大，如何求太阳和月球同时存在的时空之度规？未见用后牛顿近似具体计算岁差的文献；
9. **关于用后牛顿近似方法求解行星摄动的疑虑**      平直时空用牛顿引力求行星摄动已经十分复杂，在弯曲时空中必将更加复杂。如何求多星体弯曲时空的度规？未见用多星体弯曲时空度规求具体摄动的文献。我对用后牛顿近似求解多体摄动问题的准确性难以置信；
10. **关于用推迟引力求解水星轨道异常的合理性**      推迟引力公式包括三部分引力：

$$\vec{g} = \vec{g}_{NT} + \Delta\vec{g}_r + \Delta\vec{g}_\theta \quad (6)$$

其中右侧第 1 项为经典牛顿引力：

$$\vec{g}_{NT} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r} \quad (7)$$

第 2 项为径向附加引力：

$$\Delta\vec{g}_r = -\frac{GM}{r^2}\left(\frac{v^2}{2c^2}\right)\hat{r} \quad (8)$$

第 3 项为角向附加引力：

$$\Delta\vec{g}_\theta \approx -\frac{GM}{r^3}\left(\frac{-\vec{a}_\theta \cdot \vec{r}}{c^2}\right) \approx \frac{GM}{r^2}\left(\frac{a_\theta}{c^2}r\right)\hat{\theta} = \frac{GM}{r}\left(\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{c^2}\right)\hat{\theta} \quad (9)$$

以上公式中， $\hat{r}, \hat{\theta}$  依次为径向和角向单位矢量，定义由太阳指向水星的方向为 $\hat{r}$ 的正方向，水星绕太阳转动的方向为 $\hat{\theta}$ 的正方向。第 1 项为经典牛顿引力；第 2 项为径向附加引力，等于经典牛顿引力乘以 $\left(\frac{v^2}{2c^2}\right)$ ，仍指向太阳，这就是说，前两项之和即径向总引力（绝对值）略强于牛顿引力（绝对值），所以，真实水星的轨道半径略小于经典牛顿轨道的半径！第 3 项为相对加速度引起的角向附加引力，它等于经典牛顿引力乘以 $\left(-\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{c^2}r\right)$ ， $a_\theta$  为水星的角向加速度，此项角向附加引力十分重要而特别，是牛顿引力理论、广义相对论及其它引力理论中都没有的引力项。

推迟引力的第一项（牛顿引力）圆满解释了岁差和行星摄动，第二项（径向附加引力）使水星轨道稍稍变小，使水星的角速度稍稍加快，使水星每周比牛顿轨道多转了 $\frac{2\pi GM}{a(1-\varepsilon^2)c^2}$ ，或每百年比牛顿轨道多转了 14.3 角秒；第三项（角向附加引力）使水星的角速度加快，

使水星每周比牛顿轨道多转了  $\frac{4\pi GM}{a(1-\varepsilon^2)c^2}$ ，或每百年比牛顿轨道多转

了 28.7 角秒，后两项之和使水星每周比牛顿轨道多转了  $\frac{6\pi GM}{a(1-\varepsilon^2)c^2}$ ，

或每百年比牛顿轨道多转了 43 角秒。显然，推迟引力公式中每一项的来源和对水星轨道的影响都有清楚而合理的交代，真正极好地符合 Le Verrier 等的观测。

1946 年，爱因斯坦在他的自述中提出了判断理论正确性的两条标准：第一，不用人为的补充假设而与实验相符；第二，理论自身相洽且优美。什么是优美的理论？爱因斯坦说，简单的东西是最美的。因此，我们不妨将爱因斯坦的两条标准概括为三原则，即‘自然’，‘自洽’和‘简单’，所谓自然，就是理论自然地与实验符合，而不是靠人为凑成的假设使理论与实验符合。

用推迟引力解释水星轨道异常符合爱因斯坦三原则，‘自然’，‘自洽’，‘简单’。第一，我仅在乎直时空中的牛顿力学的基础上，考虑了牛顿引力未曾考虑的日--星相对运动，未增加任何人为的假设，是自然的；第二，对任何距离，任何时刻（只要源观相对速度和相对加速度极小），推迟引力都趋于牛顿引力，而不是如史瓦西度规，只在无穷远处才趋于牛顿引力极限。对任何距离，任何时刻，推迟引力公式既包括了瞬时相对距离对引力的贡献（势能），也包括了瞬时相对速度对引力的贡献（动能），甚至还包括了瞬时相对加速度对引力的贡献（引力辐射），逻辑上是完备的。第三，在用推迟引力求解

水星轨道异常的过程中，未使用能量和角动量守恒的假定，最后计算出水星轨道的偏差，逻辑上是自洽的。相比而言，在用史瓦西轨道求解水星进动的几乎所有文献及教科书（从爱因斯坦到 Ohanian, Weinberg, 到吴大猷等），都用到了两个不变积分，即角动量守恒和能量守恒。从逻辑上讲，角动量和能量都守恒，则不应有水星进动；反之，水星有进动，说明角动量不守恒。所以，严格说来，用史瓦西轨道求解水星进动的过程在逻辑上不自洽。第四，推迟引力是在平直时空中求解，未用到黎曼几何，基于推迟引力的轨道方程是线性方程，当然又是最简单的！