

第三章 习题课

填空题

1. 有记忆信道的当前输出不仅与_____输入有关, 还与_____输入有关。
2. 既代表_____, 又代表_____, 因此, 通常把 $H(X|Y)$ 称为信道的_____或_____。
3. 如果信道给定, 那么 $I(P_X, P_{Y|X})$ 是输入概率 P_X 的_____凸函数。如果信源给定, 那么 $I(P_X, P_{Y|X})$ 是转移概率 $P_{Y|X}$ 的_____凸函数。
4. 衡量一个信息传递系统的好坏, 有两个主要指标。其一, _____; 其二, _____。
5. 使得给定信道_____的输入分布, 称为最佳输入(概率分布, 记为 P_X^*)。

判断题

1. 信道容量 C 不仅与信道转移概率有关，也与信道的输入分布有关。（ ）
2. 噪声熵为 0 的信道称为确定信道。（ ）
3. 离散对称信道输入等概率分布时，输出未必也等概率分布。（ ）
4. 一般 DMC 达到信道容量的充要条件为信源符号的偏互信息均等于信道容量。（ ）
5. 信道是 DMC 的充要条件是序列符号对之间的转移概率等于各个时刻单个符号对转移概率之连乘。（ ）

选择题

- 若信道和信源均无记忆，
以下结论不成立的是_____

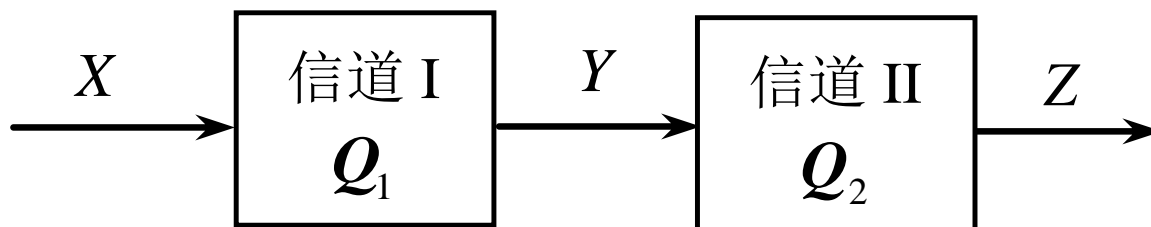
A.
$$I(\bar{X}; \bar{Y}) = \sum_{k=1}^N I(X_k; Y_k)$$

B.
$$I(\bar{X}; \bar{Y}) = NI(X; Y)$$

C.
$$I(\bar{X}; \bar{Y}) < \sum_{k=1}^N I(X_k; Y_k)$$

D.
$$C^N = NC$$

● 关于两个独立信道 Q_1 、 Q_2 串联, 下列说法不正确的是_____



- A. 串联信道的信道容量与组成串联信道的各分信道的信道容量存在精确的定量关系
- B. 数据处理过程中, 随着数据的不断处理, 从处理后的数据中所得的原始信息会愈来愈少
- C. 串联信道的转移概率矩阵是各单元信道的转移概率矩阵之积
- D. XYZ 组成一个马尔可夫链

- 信源的输出与信道的输入匹配的目的不包括_____
 - A. 符号匹配; B. 信息匹配;
 - C. 功率匹配; D. 降低信道剩余度
- 以下关于连续信道的说法中, 不正确的是_____
 - A. 连续信道是时间离散、幅值连续的信道
 - B. 连续信道的统计特性由转移概率分布函数描述
 - C. 加性噪声信道的转移概率密度函数等于噪声的概率密度函数
 - D. 对于无记忆加性噪声信道, 若输入信号服从高斯分布, 且噪声的平均功率受限, 则服从高斯分布的噪声使信道平均互信息量达到最小

● 已知香农公式 $C(P_s) = B \log \left(1 + \frac{P_s}{N_0 B} \right)$ ，不能得出的结论是

- A. 在信噪比不变的前提下，增大频带，可增大信道容量
- B. 频带不变时，增大信噪比即可增大信道容量 C
- C. 在 P_s 增大很多之后，继续增大信号功率来实现信道容量的增大是一个有效途径
- D. 用扩频方法来增大信道容量，其作用是有限的

3、 设二元对称信道的转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(1) 若 $P(0) = 3/4$, $P(1) = 1/4$, 求 $H(X)$,

$H(X | Y)$, $H(Y | X)$ 和 $I(X; Y)$;

(2) 求该信道的信道容量及其达到信道容量时的最佳输入概率分布。

3、解：（1）已知二元对称信道的传递矩阵，又已知输入的概率分布 $P(0) = \frac{3}{4}$, $P(1) = \frac{1}{4}$ ，就可以计算得出 Y 的概率分布如下：

$$\begin{aligned} P(y = 0) &= \sum_x P(x)P(y = 0 | x) \\ &= P(x = 0)P(y = 0 | x = 0) + P(x = 1)P(y = 0 | x = 1) \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

$$P(y = 1) = 1 - P(y = 0) = \frac{5}{12}$$

后验概率计算如下：

$$P(x = 0 | y = 0) = \frac{P(x = 0)P(y = 0 | x = 0)}{P(y = 0)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{12}} = \frac{6}{7}$$

$$P(x = 1 | y = 0) = 1 - P(x = 0 | y = 0) = \frac{1}{7}$$

$$P(x = 0 | y = 1) = \frac{P(x = 0)P(y = 1 | x = 0)}{P(y = 1)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$$

$$P(x = 1 | y = 1) = 1 - P(x = 0 | y = 1) = \frac{2}{5}$$

输入信源熵为

$$H(X) = H\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \approx 0.811 \quad \text{比特/符号}$$

损失熵为

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= -\sum_X \sum_Y P(x)P(y|x) \log P(x|y) \\ &= P(y=0)H\left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right) + P(y=1)H\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) \approx 0.7497 \quad \text{比特/符号} \end{aligned}$$

因为该信道为离散对称信道，故

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= H\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} \log \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \log \frac{1}{3} \\ &\approx 0.390 + 0.528 \approx 0.918 \quad \text{比特/符号} \end{aligned}$$

所以 $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \approx 0.062$ 比特/符号

(2) 此信道为二元对称信道，所以信道容量

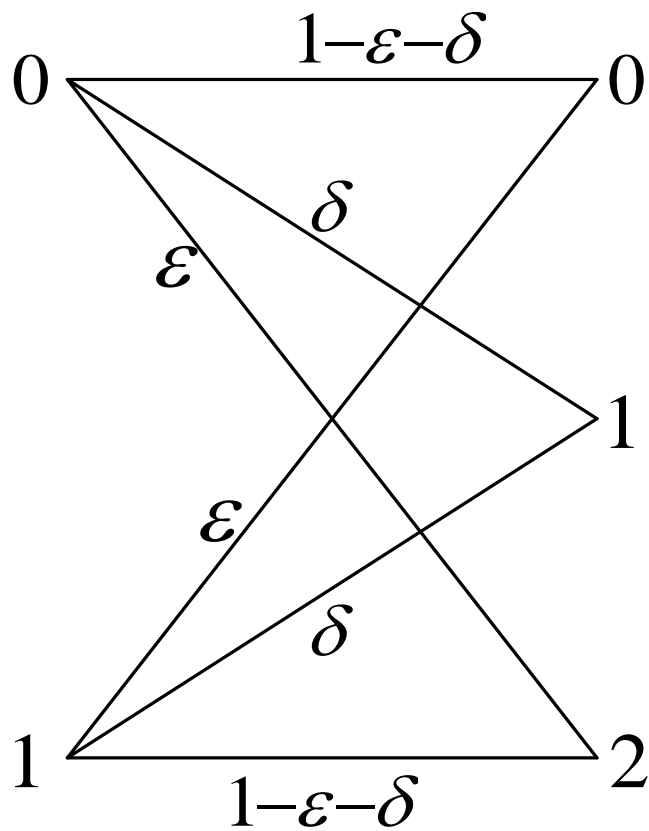
$$C = 1 - H(p) = 1 - H\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \approx 0.082 \text{ bit/符号}$$

根据二元对称信道的性质可知，输入符号为等

概率分布（即 $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$ ）时信道的信息

传输率可以达到这个信道容量值。

- 判断下图中各个信道是否对称，如对称，求出其信道容量。



(a)

解

(a) 图，由信道线图可得转移概率矩阵如下：

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon - \delta & \delta & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta & 1 - \varepsilon - \delta \end{bmatrix}$$

该矩阵为行列排列阵，信道为准对称信道，可以把按列分成两个子矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 1 - \varepsilon - \delta & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon - \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \delta \end{bmatrix}$$

则

$$r = 2; \quad n = 2; \quad M_1 = 1 - \delta; \quad M_2 = 2\delta; \quad s_1 = 2; \quad s_2 = 1$$

$$C = -\sum_{k=1}^n s_k \left(\frac{M_k}{r} \right) \log \left(\frac{M_k}{r} \right) - H(p'_1, p'_2, \dots, p'_s)$$

$$= -2 \times \frac{1-\delta}{2} \times \log \frac{1-\delta}{2} - \frac{2\delta}{2} \times \log \frac{2\delta}{2} - H(1-\delta, \delta, \varepsilon)$$

$$= -(1-\delta) \log \frac{1-\delta}{2} - \delta \log \delta - H(1-\delta, \delta, \varepsilon)$$

•设在平均功率受限高斯可加波形信道中，信道带宽为**3kHz**，又设（信号功率+噪声功率）/噪声功率=**20 dB**。

（1）试计算该信道传送的最大信息率（单位时间） **19.93×10^3 (bit/s)**。

（2）若功率信噪比降为**5dB**，要达到相同的最大信息传输率，信道带宽应是多少(**12KHz**)。

解：（1）平均功率受限高斯可加波形信道，其 $W = 3\text{kHz}$ ，
由题意可知

$$10 \log_{10} \left(1 + \frac{P_S}{P_N} \right) = 20$$

得到

$$1 + \frac{P_S}{P_N} = 100$$

信道传送的最大信息速率

$$C_t = W \log \left(1 + \frac{P_S}{P_N} \right) = 3 \times 10^3 \log_2 100 \approx 19.93 \times 10^3 \text{ bit/s}$$

(1) 信道不变, C_t 仍应为 19.93×10^3 (比特/秒), 而

$$10 \log_{10} \left(1 + \frac{P_S}{P_N} \right) = 5 \text{ dB}$$

可得

$$1 + \frac{P_S}{P_N} = 3.16$$

所以

$$19.93 \times 10^3 = W \log_2 3.16$$

得到

$$W = 12 \text{ KHz}$$

由此可知, 在传输相同的信息传输速率下, 降低信噪比就需要增加带宽。