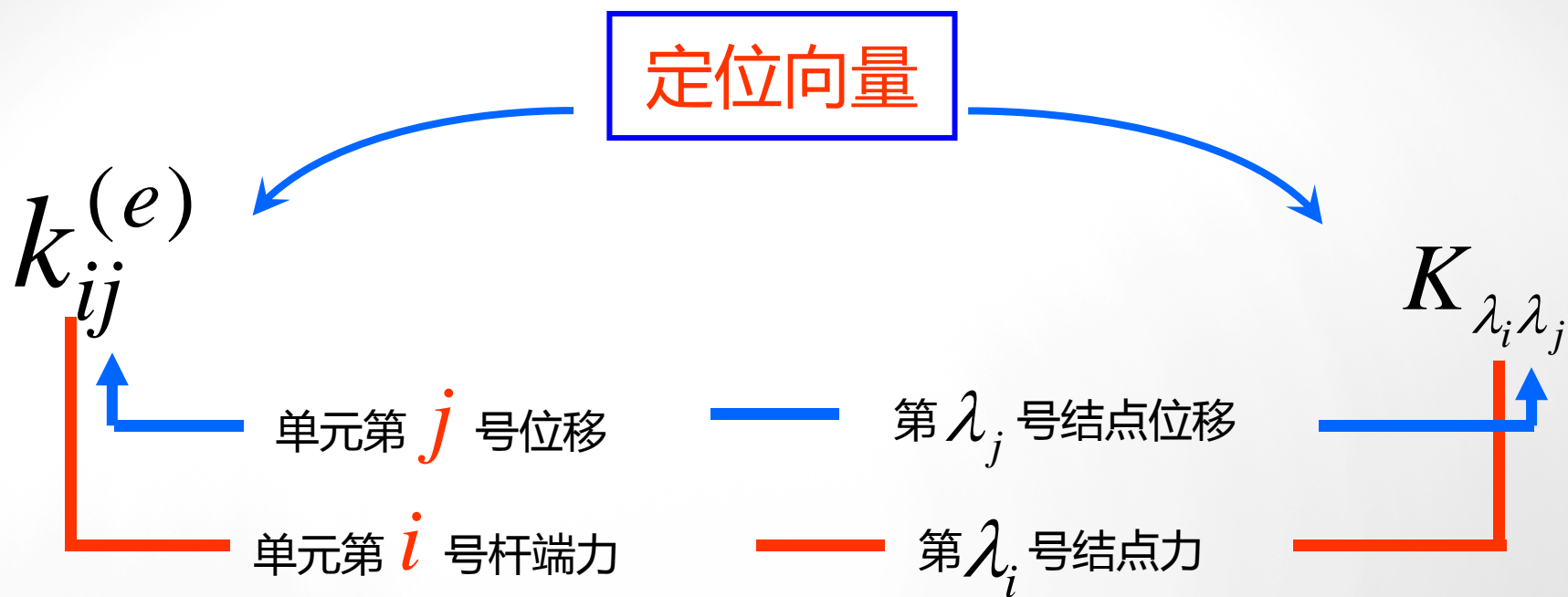


回顾

一个工具：单元定位向量

一个方法：对号入座

一个成果：整体刚阵矩阵



9-5 刚架的整体刚度矩阵

教学目标：

- 掌握刚架的整体刚度矩阵的计算。

教学内容：

- 刚架的特点
- 单元定位向量
- 刚架的整体刚度矩阵
- 铰结点的处理

1. 刚架的特点

关键点：

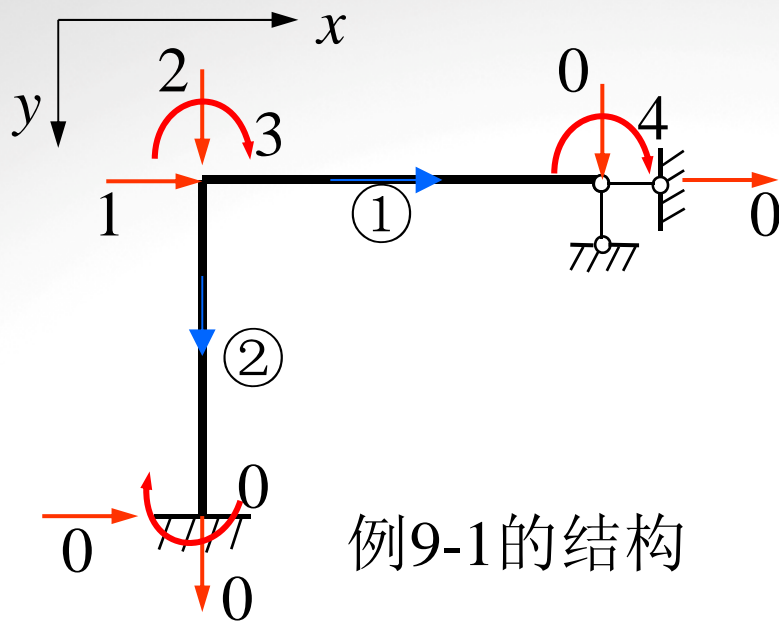
1. 用单元集成法形成刚架的整体刚度矩阵 $[K]$ ；
2. 由 $[\bar{k}]^e$ 通过坐标变换得到 $[k]^e$ ， $[K]$ 由 $[k]^e$ 直接集成；
3. 换码依据定位向量进行。

复杂性：

1. 刚架中每个结点的位移分量增加到 3 个，
每个单元的杆端位移分量可达 6 个；
2. 各杆单元的方向不一致，2 种坐标系，坐标变换；
3. 刚架中含有铰节点时，增加了处理的复杂性。

1. 刚架的特点

结点位移分量的统一编码——总码、局部码



对于已知为零的结点位移分量，其总码均编为零

例9-1的结构

$$\{\Delta\} = [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \quad \Delta_4]^T$$

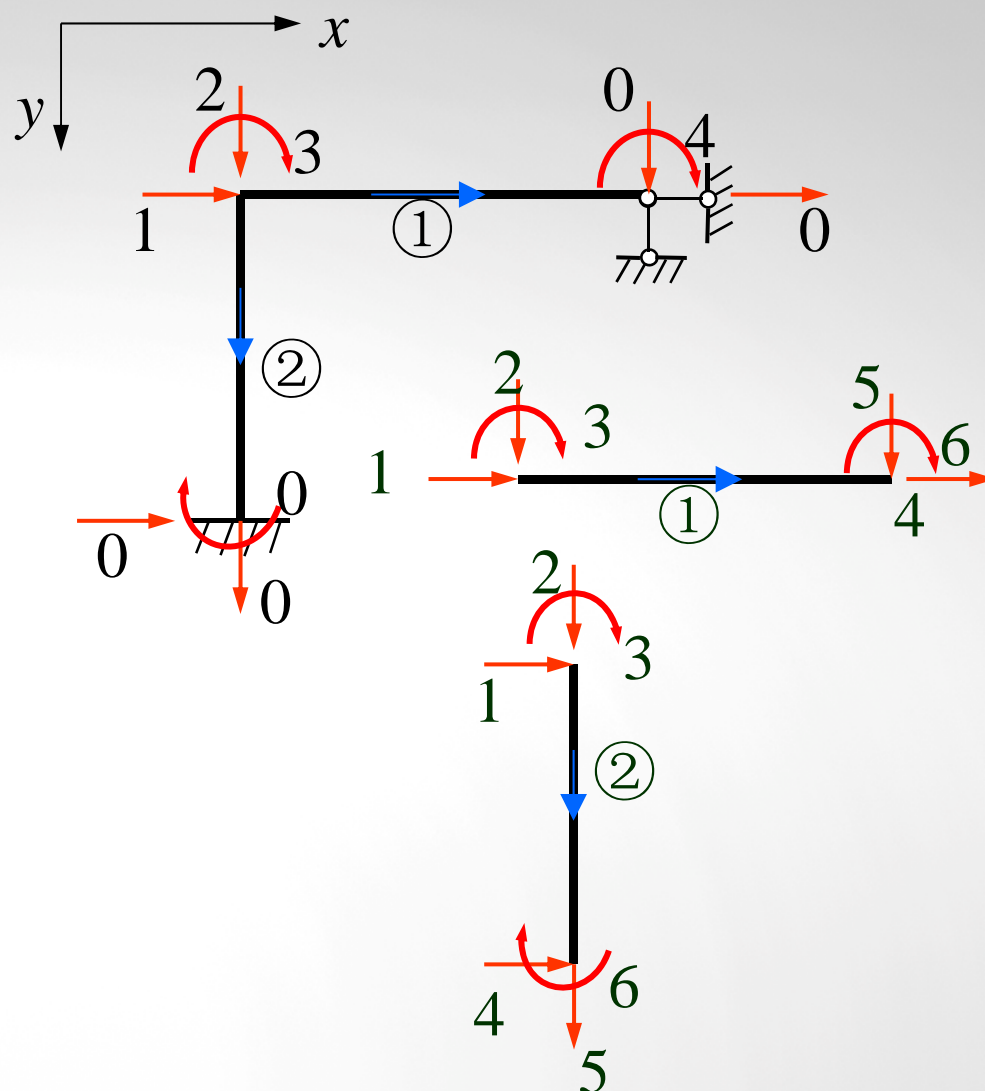
$$\{F\} = [F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4]^T$$

2. 单元单位向量

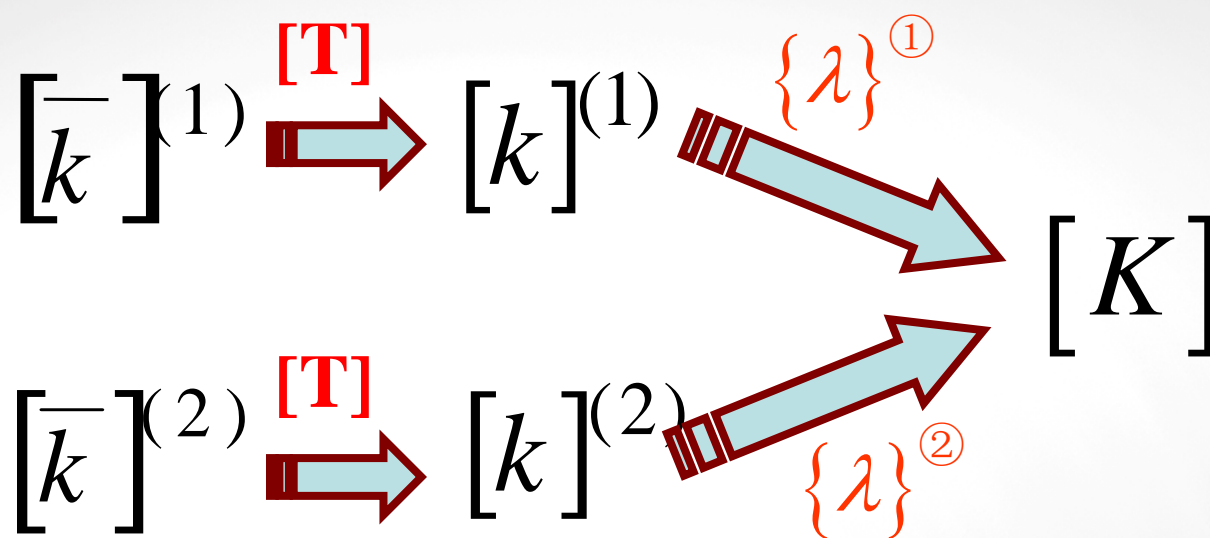
	①		②		
(1)	→	1	(1)	→	1
(2)	→	2	(2)	→	2
(3)	→	3	(3)	→	3
(4)	→	0	(4)	→	0
(5)	→	0	(5)	→	0
(6)	→	4	(6)	→	0

$\{\lambda\}^{\textcircled{1}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix}$

$\{\lambda\}^{\textcircled{2}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$



3. 刚架的整体刚度矩阵



3. 刚架的整体刚度矩阵

单元①的集成

$$\{\lambda\}^{\textcircled{1}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$$[K] =$$

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{4} \\
 \begin{bmatrix}
 K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\
 K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\
 K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\
 K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44}
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$[k]^{\textcircled{1}} = \begin{array}{c}
 \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \end{matrix} \\
 \begin{bmatrix}
 300 & 0 & 0 & -300 & 0 & 0 \\
 0 & 12 & 30 & 0 & -12 & 30 \\
 0 & 30 & 100 & 0 & -30 & 50 \\
 -300 & 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\
 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\
 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100
 \end{bmatrix} \times 10^4
 \end{array}$$

3. 刚架的整体刚度矩阵

单元①的集成

$$[k]^{①} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 & -300 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 0 & -12 & 30 \\ 0 & 30 & 100 & 0 & -30 & 50 \\ -300 & 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\ 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100 \end{bmatrix} \end{matrix} \times 10^4$$

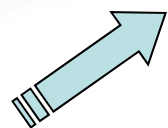
$$[K]^{①} = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 30 \\ 0 & 30 & 100 & 50 \\ 0 & 30 & 50 & 100 \end{bmatrix} \times 10^4$$

3. 刚架的整体刚度矩阵

单元②的集成

$$\{\lambda\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[K] =$$



$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}$$

$$[k]^{(2)} = \begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & 12 & 0 & -30 & -12 & 0 & -30 \\ (2) & 0 & 300 & 0 & 0 & -300 & 0 \\ (3) & -30 & 0 & 100 & 30 & 0 & 50 \\ (4) & -12 & 0 & 30 & 12 & 0 & 30 \\ (5) & 0 & -300 & 0 & 0 & 300 & 0 \\ (6) & 30 & 0 & 50 & 30 & 0 & 100 \end{bmatrix} \times 10^4$$

3. 刚架的整体刚度矩阵

单元②的集成

$$[k]^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 12 & 0 & -30 & -12 & 0 & -30 \\ 0 & 300 & 0 & 0 & -300 & 0 \\ -30 & 0 & 100 & 30 & 0 & 50 \\ -12 & 0 & 30 & 12 & 0 & 30 \\ 0 & -300 & 0 & 0 & 300 & 0 \\ 30 & 0 & 50 & 30 & 0 & 100 \end{bmatrix} \end{matrix} \times 10^4$$

$$[K]^{(2)} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -30 \\ 0 & 300 & 0 \\ -30 & 0 & 100 \end{bmatrix} \times 10^4$$

3. 刚架的整体刚度矩阵

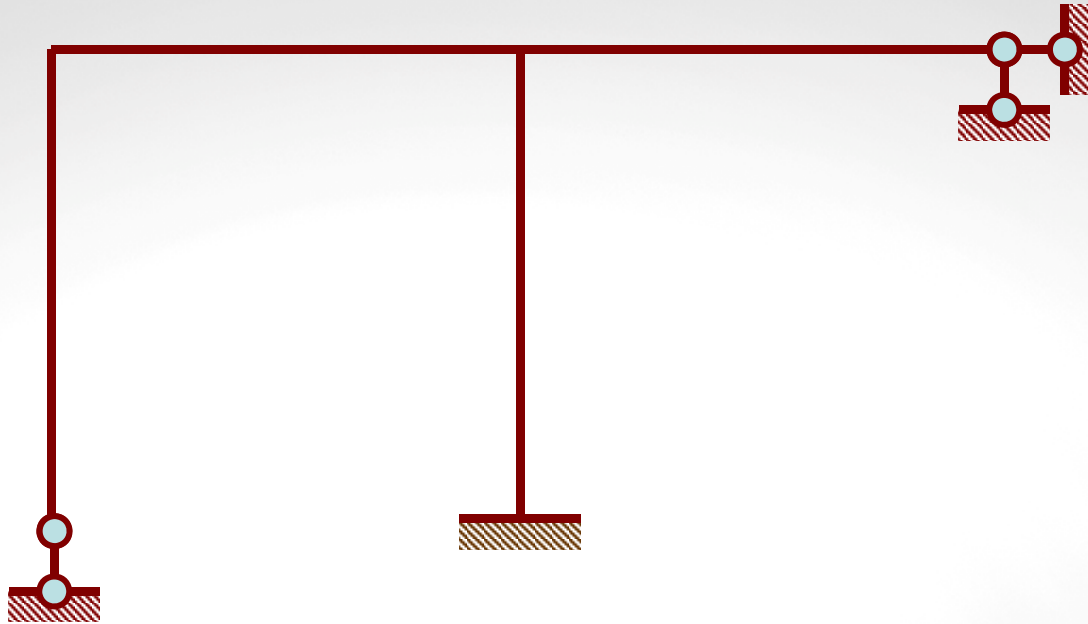
$$[K]^{①} = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 30 \\ 0 & 30 & 100 & 50 \\ 0 & 30 & 50 & 100 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad [K]^{②} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -30 & 0 \\ 0 & 300 & 0 & 0 \\ -30 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^4$$

整体刚度矩阵

$$[K] = \begin{bmatrix} 312 & 0 & -30 & 0 \\ 0 & 312 & 30 & 30 \\ -30 & 30 & 200 & 50 \\ 0 & 30 & 50 & 100 \end{bmatrix} \times 10^4$$

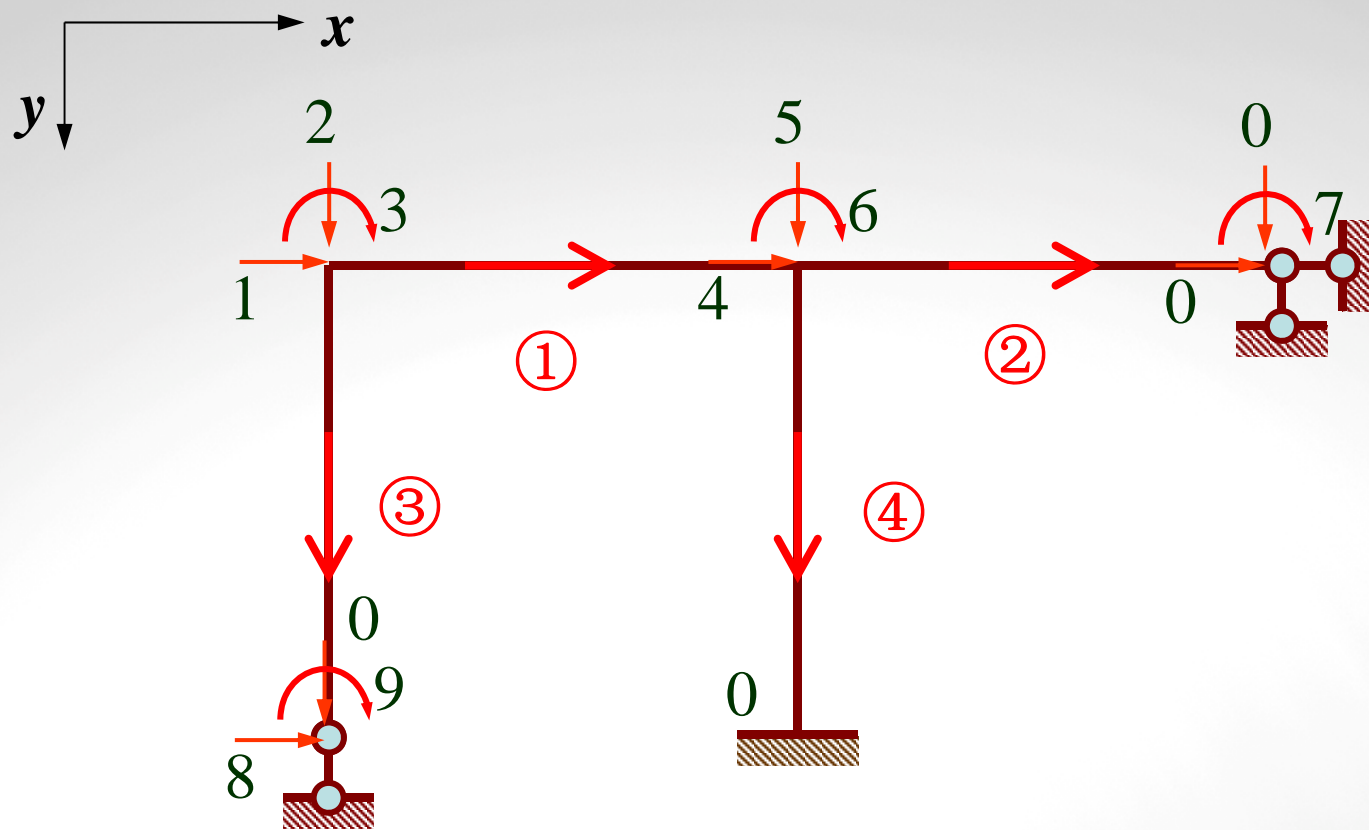
3. 刚架的整体刚度矩阵 ■ 课堂练习

单元集成法生成整体刚度矩阵 $[K]$, 参数同例9-1。



- ➔ 编码（总码、局部码）
- ➔ 单元刚度矩阵
- ➔ 单元定位向量
- ➔ 整体刚度矩阵（总刚）

3. 刚架的整体刚度矩阵 ■ 课堂练习-提示



$$\{\lambda\}^{(1)} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]^T \quad \{\lambda\}^{(3)} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 8 \quad 0 \quad 9]^T$$

$$\{\lambda\}^{(2)} = [4 \quad 5 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad \{\lambda\}^{(4)} = [4 \quad 5 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

3. 刚架的整体刚度矩阵 ■ 课堂练习-提示

$$[k]^{(2)} = [k]^{(1)} = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 & -300 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 0 & -12 & 30 \\ 0 & 30 & 100 & 0 & -30 & 50 \\ -300 & 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\ 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100 \end{bmatrix} \times 10^4$$

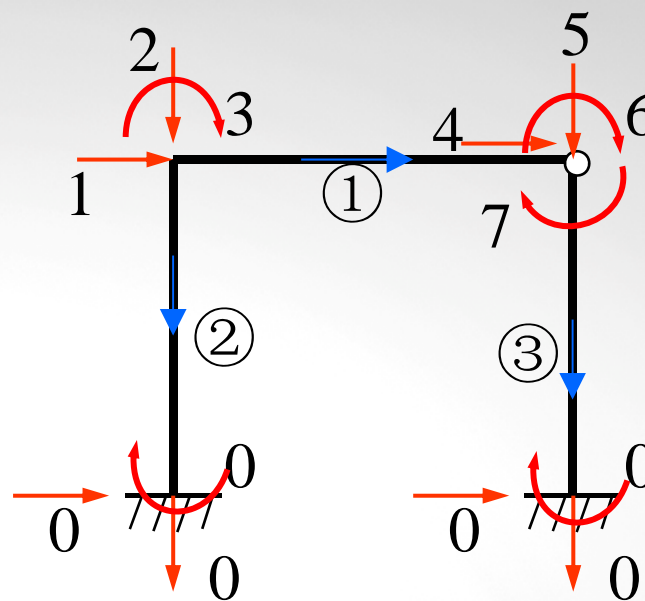
$$[k]^{(3)} = [k]^{(4)} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -30 & -12 & 0 & -30 \\ 0 & 300 & 0 & 0 & -300 & 0 \\ -30 & 0 & 100 & 30 & 0 & 50 \\ -12 & 0 & 30 & 12 & 0 & 30 \\ 0 & -300 & 0 & 0 & 300 & 0 \\ 30 & 0 & 50 & 30 & 0 & 100 \end{bmatrix} \times 10^4$$

4. 铰结点的处理

铰结点处有 2个线位移。

另有2个角位移分别与

2个杆端相联系



结构的整体刚度矩阵为7阶。

定位向量

$$\{\lambda\}^{(1)} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]^T$$

$$\{\lambda\}^{(2)} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\{\lambda\}^{(3)} = [4 \quad 5 \quad 7 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

5. 小结

■ 计算的关键点

1. 用单元集成法形成刚架的整体刚度矩阵 $[K]$;
2. 由 $[k]^e$ 通过坐标变换得到 $[k]^e$, $[K]$ 由 $[k]^e$ 直接集成 ;
3. 换码依据定位向量进行。

■ 计算的步骤

1. 编码 (总码、局部码)
2. 单元刚度矩阵
3. 单元定位向量
4. 整体刚度矩阵 (总刚)

■ 铰结点的处理

注意结点线位移的相关性。

作业

写出刚架的整体刚度矩阵:

习题 P428 : 9-5a (考虑轴向变形)

➤ 下一节课内容

9-6 等效结点荷载

要点：固端约束力、等效结点荷载