



# 第2章 通信信号分析

本章主要内容:

- 2.1 确知信号分析方法
- 2.2 随机信号分析方法
- 2.3 随机过程通过线性系统



## 2.1 确知信号分析方法

通信信号的**分类方法**:

1. 从信号在**时间和幅度**上连续或离散的特点，可以分为模拟信号和数字信号；

2. 从信号是否可以用明确的**表达式**表示，可以分为确知信号 (Deterministic Signal) 和随机信号 (Random Signal)。确知信号又可以分为周期信号和非周期信号。

3. 从信号中是否**携带有用信息**，可以分为有用信号和噪声信号。

## 2.1 确知信号分析方法

有意义的通信信号应具有**随机性**，但是其中也会存在确知信号。

（如表示每个数字符号的信号是确知的，另外传输中的有些信号如导频信号本身也是确知信号）。

**确知信号和随机信号分析都很必要。**

**确知信号**是指其取值在任何时间都是确定的和可预知的信号，通常可以用数学公式表示。

**随机信号**则无法用明确的数学式表示。



## 2.1 确知信号分析方法

信号的基本分析方法有**时域分析法**和**频域分析法**。

1. **时域分析法**具有直观体现信号波形的特点，**频域分析法**则更有利于揭示信号内在的频率特性，从而与通信中信号的**频谱、带宽、滤波、调制、频分复用**等概念相联系。

2. 在**频域分析法**中，**傅里叶变换**是重要的理论基础和数学工具。对于随机信号分析，还需要用到**概率论和数理统计**。

本节主要讨论信号的**频域分析**，包括**频谱密度、功率密度、能量谱密度**以及**希尔伯特变换**。



## 2.1.1 信号的频谱和频谱密度

### 1. 周期信号和非周期信号

周期信号和非周期信号、能量信号和功率信号。  
确知信号有周期的，也有非周期的。

随机信号通常是非周期的。

**周期信号**是指经过一定时间重复出现的信号。

$$f(t) = f(t + kT), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**非周期信号**不具有周而复始重复的特性。



## 2.1.1 信号的频谱和频谱密度

信号  $f(t)$  的能量  $E$  和功率  $P$ 。

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(t) dt$$

若信号能量有限，即  $0 < E < \infty$ ，此时  $P = 0$ ，  
则称此信号为**能量信号**。

若  $E \rightarrow \infty$ ，但信号功率有限，即  $0 < P < \infty$ ，  
则称此信号为**功率信号**。



## 2.1.1 信号的频谱和频谱密度

各类信号之间的关系：

确知的周期信号和随机信号是功率信号；

确知的非周期信号可能是功率信号，也可能是能量信号。

反过来说，功率信号可以是确知的周期、非周期信号或随机信号，能量信号是非周期信号。



## 2.1.1 信号的频谱和频谱密度

确知信号的频率特性由其各个频率分量的分布表示。

信号的**频率特性**具体分为：

频谱、频谱密度、功率谱密度、能量谱密度。

大多数功率信号是周期信号，以下分析功率信号时均假设为周期信号，频谱与傅里叶级数的系数有关。





# 2.1.1 信号的频谱和频谱密度

## 2. 傅里叶级数

任何周期为 $T$ 的周期数 $f(t)$ ，在满足狄里赫利条件时，可以由三角傅里叶级数表示。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \Omega t + \dots + a_n \cos n\Omega t + \dots + b_1 \sin \Omega t + \dots + b_n \sin n\Omega t \dots$$

式中  $a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt$  ,  $a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega t) dt$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega t) dt$$

## 2.1.1 信号的频谱和频谱密度

将式中同频率项合并，可写成

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \quad (2.1-5)$$

$$\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n = -\arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \end{cases}$$

还可以由**指数傅里叶级数**表示：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t}$$

$c_n$ —复振幅



## 2.1.1 信号的频谱和频谱密度

### 3. 功率信号的频谱

三角傅里叶级数和指数傅里叶级数都是将一个周期信号表示为直流分量和各次谐波分量之和。

将各分量的振幅  $A_n$  和相位  $\varphi_n$ ；或各分量的复振幅，绘成图就得到周期信号的**频谱图**。

具体包括**幅度谱、相位谱、复数振幅谱**。



## 2.1.1 信号的频谱和频谱密度

**例：**脉冲宽度为 $\tau$ ，周期为 $T$ ，幅度为 $E$ 的周期性矩形脉冲。信号在一个周期内的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} E & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{else } t \end{cases}$$

设  $T=5$ ,  $\tau=1$ ，用Matlab绘制出频谱图。



# 2.1.1 信号的频谱和频谱密度

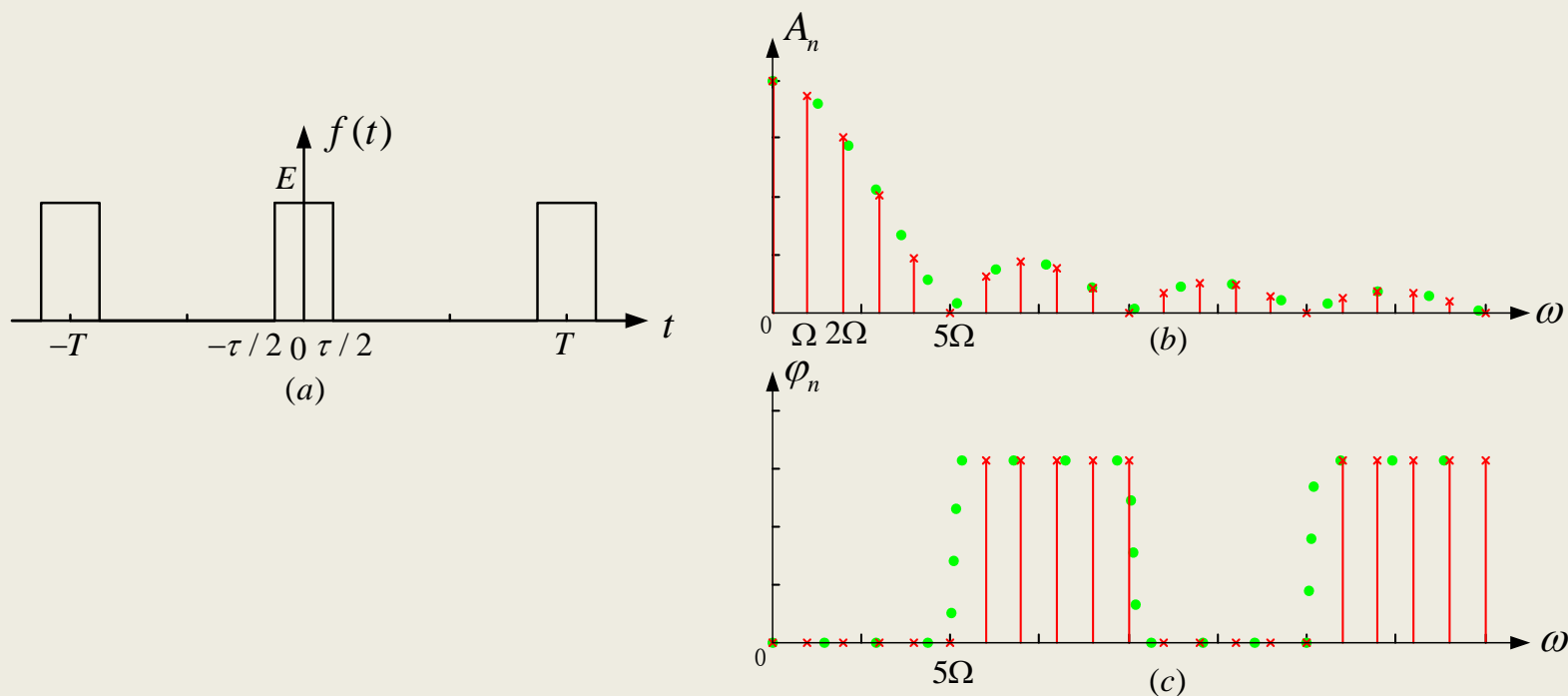


图2-1 周期信号的单边幅度谱和相位谱

(a) 周期性矩形脉冲信号； (b) 单边幅度谱； (c) 单边相位谱



# 2.1.1 信号的频谱和频谱密度

指数傅里叶级数表示式:

$$C_n = \frac{E\tau}{T} \cdot \frac{\sin(n\Omega t/2)}{n\Omega t/2} = \frac{E\tau}{T} Sa(n\Omega\tau/2)$$

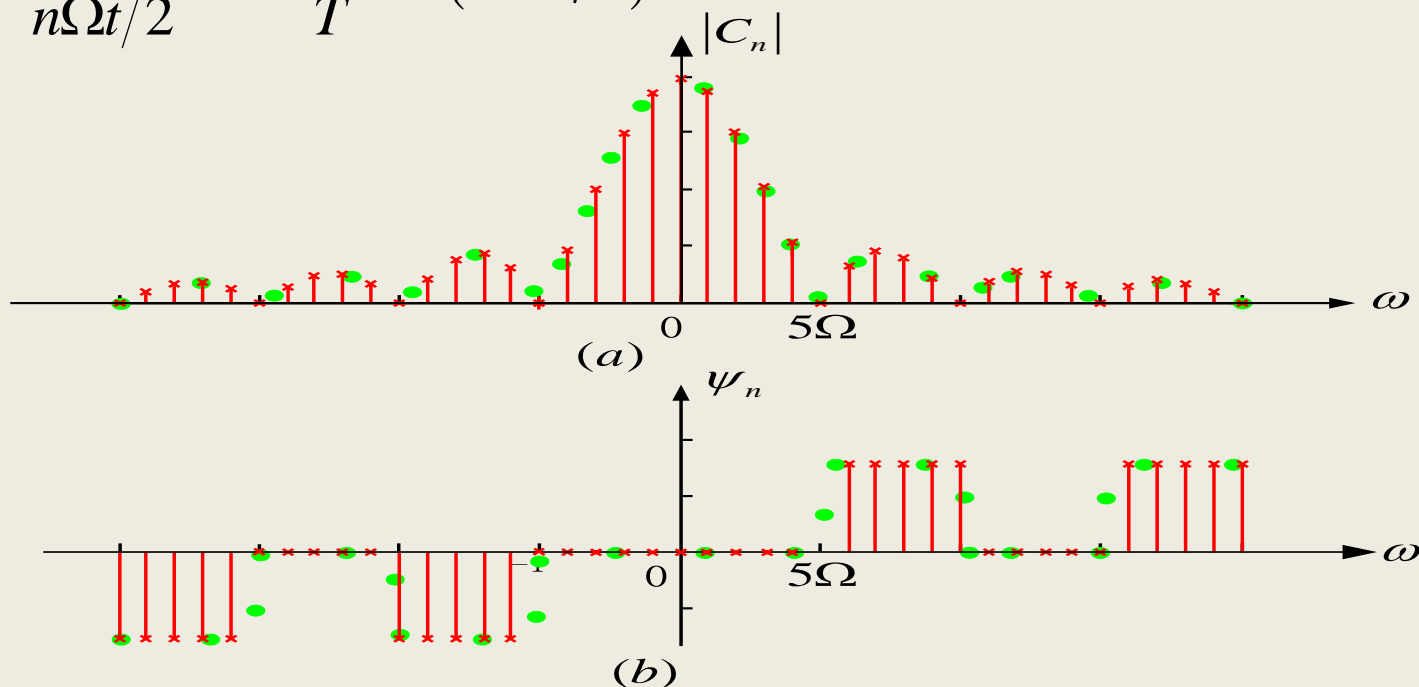


图2-2 周期信号的双边幅度谱和相位谱  
(a) 双边幅度谱; (b) 双边相位谱

# 2.1.1 信号的频谱和频谱密度

周期信号频谱具有**三个特点**：

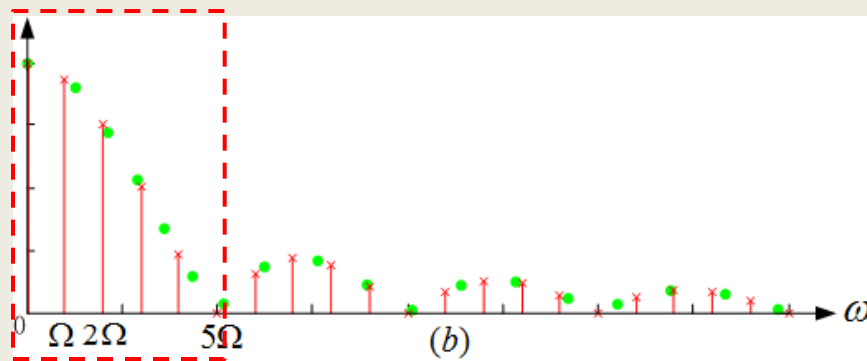
离散性、谐波性和收敛性。

周期信号由于谐波振幅具有收敛性，信号能量的**主要集中在**低频分量中。

可以将信号的**频带宽度**定义为：

从零频率开始到需保留的最高频率分量之间的频率范围。

第一零点带宽





## 2.1.1 信号的频谱和频谱密度

### 4. 能量信号的频谱密度

能量信号通常是非周期信号，非周期信号不能直接用傅里叶级数表示。

设能量信号  $f(t)$  的傅里叶变换为  $F(j\omega)$ 。

$$\begin{cases} F(j\omega) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ f(t) = F^{-1}[F(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{cases}$$

还可表示为  $F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$

$F(j\omega)$  — 频谱密度函数。

$|F(j\omega)|$  — 频谱函数的模，表示非周期信号中各频率分量幅值的**相对大小**。



# 2.1.1 信号的频谱和频谱密度

$|F(j\omega)| \square \omega$  非周期信号的**幅度谱**。

$\varphi(\omega) \square \omega$  非周期信号的**相位谱**。

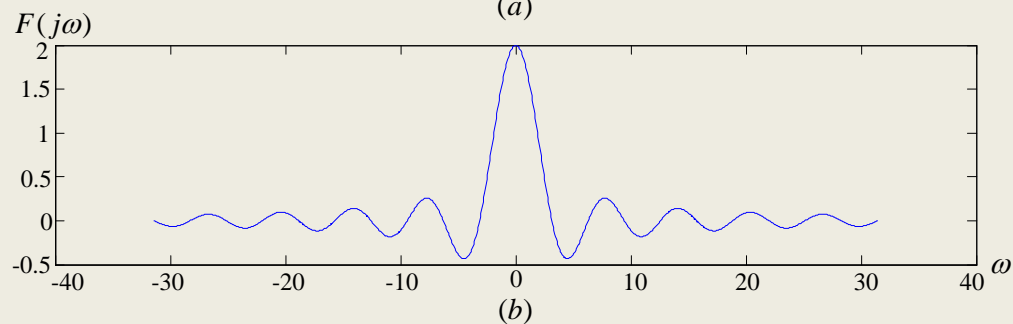
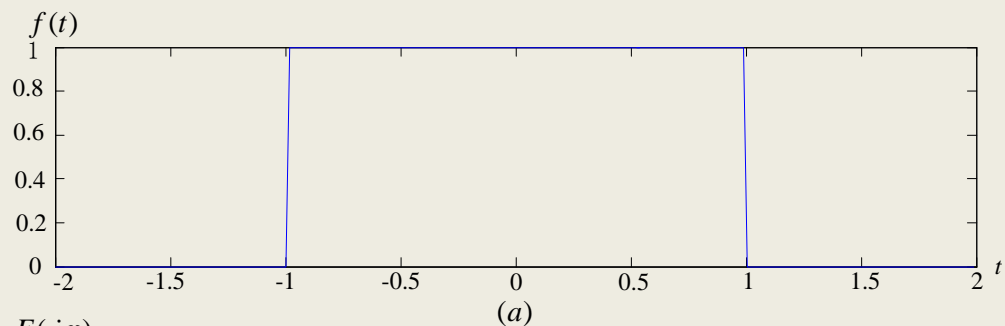
**例：**求单个矩形脉冲信号的频谱。

矩形脉冲信号表达式

$$f(t) = \begin{cases} E & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

频谱函数

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = E \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt \\ &= E\tau \frac{\sin \omega\tau / 2}{\omega\tau / 2} = E\tau \text{Sa}(\omega\tau / 2) \end{aligned}$$



## 2.1.1 信号的频谱和频谱密度

**例：**求单位冲激信号的频谱。

**解：**时域表达式  $f(t) = \delta(t)$

傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

单位冲激函数的  
频谱在整个频率区间  
是均匀的，这样的频  
谱常称为“**均匀谱**”  
或“**白色谱**”。

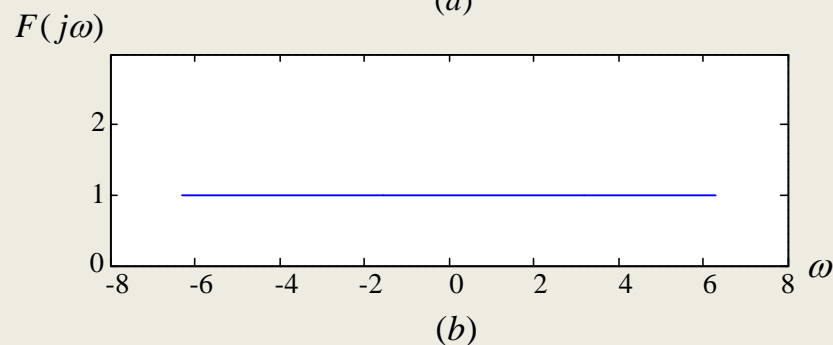
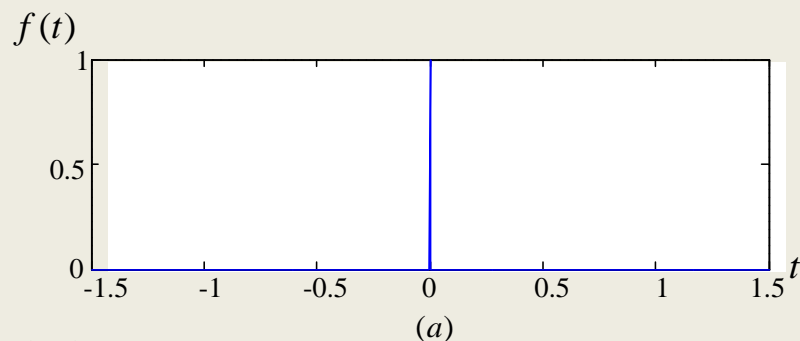


图2-4 冲激信号的频谱

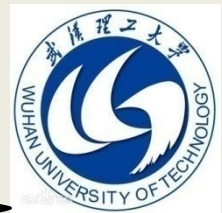
(a) 冲激信号时域波形；  
(b) 冲激信号频谱密度函数



## 2.1.1 信号的频谱和频谱密度

$F(j\omega)$  和  $C_n$  的主要区别有:

- (1)  $F(j\omega)$  是连续谱, 而  $C_n$  是离散谱;
- (2)  $F(j\omega)$  单位是幅度/频率, 而  $C_n$  单位是幅度;  
(这里都是指其频谱幅度);
- (3) 能量信号的频谱连续地分布在频率轴上, 每个频率点上的信号幅度是无穷小的。  
周期性功率信号的频谱只有在离散的频率点上有振幅, 表示了信号各频率分量的大小。



## 2.1.2 信号的功率谱密度和能量谱密度

### 1. 帕斯瓦尔 (Parseval) 定理

对于能量信号，在时域中计算的信号总能量，等于在频域中计算的信号总能量。即：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$|F(\omega)|^2$  称为**能量谱**，它是沿频率轴的能量分布密度。

对于周期性功率信号有

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

# 2.1.2 信号的功率谱密度和能量谱密度

## 2. 能量谱密度和功率谱密度

在频域引入“**密度函数**”的概念：

对密度函数积分就是总的能量或功率。

$$\begin{cases} E = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega \\ P = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega \end{cases}$$

**对比**

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 df$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

能量信号的**能量谱密度**为

$$G(\omega) = |F(\omega)|^2 \text{ (J/Hz)}$$

周期性功率信号的  
**功率谱密度**

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) \text{ (W/Hz)}$$



## 2.1.2 信号的功率谱密度和能量谱密度

对于**非周期功率信号**，采用截短函数求极限：

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T^2(t) dt$$

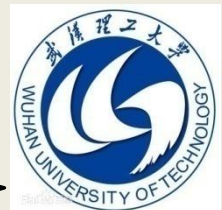
根据能量信号帕斯瓦尔定理得，非周期功率信号的功率谱密度：

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

$P(\omega)$  和  $G(\omega)$  可直接写成  $P(f)$  和  $G(f)$ ，区别只是在于横轴标记不同。

此外， $P(\omega)$  和  $G(\omega)$  既可以表示为**单边谱**，又可表示为**双边谱**。

单边谱和双边谱是**等价**的两种表示方法。



## 2.1.2 信号的功率谱密度和能量谱密度

**例：**求脉宽为  $\tau$  的单个矩形脉冲信号的能量谱密度。

**解：**单个矩形脉冲的频谱

$$E\tau Sa(\omega\tau / 2) = E\tau Sa(\pi f\tau)$$

能量谱密度定义：

$$G(f) = |F(f)|^2$$

单个矩形脉冲的能量谱密度为：

$$G(f) = |E\tau Sa(\pi f\tau)|^2 = (E\tau)^2 Sa^2(\pi f\tau)$$



## 2.1.2 信号的功率谱密度和能量谱密度

**例：**求周期为  $T$ 、脉宽为  $\tau$ 、幅度为  $E$  的周期性矩形脉冲的功率谱密度。

**解：**根据前面计算结果

$$C_n = \frac{E\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega\tau/2)}{n\Omega\tau/2}$$

得到周期性矩形脉冲的功率谱密度如下：

$$\begin{aligned} P(\omega) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(\omega - n\Omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{E\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega\tau/2)}{n\Omega\tau/2} \right|^2 \delta(\omega - n\Omega) \\ &= \left( \frac{2\pi E\tau}{T} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(n\Omega\tau/2)}{n\Omega\tau/2} \right|^2 \delta(\omega - n\Omega) = \left( \frac{2\pi E\tau}{T} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}^2(n\Omega\tau/2) \delta(\omega - n\Omega) \end{aligned}$$





## 2.1.3 希尔伯特变换 (Hilbert transform)

希尔伯特变换在通信领域有着非常广泛的应用，它是信号分析与处理的**重要工具**。

希尔伯特变换可以用于信号的调制与解调，用来统一描述各种模拟调制方式的原理，揭示这些方式之间的内在联系，简化理论分析。



## 2.1.3 希尔伯特变换 (Hilbert transform)

### 1. 希尔伯特变换的定义

设实值函数  $f(t)$ ，其中  $t \in (-\infty, \infty)$ ，它的希尔伯特变换定义为

常记为

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau$$

$$\hat{f}(t) = H[f(t)]$$

由于  $\hat{f}(t)$  是函数  $f(t)$  与  $\frac{1}{t\pi}$  的卷积积分，故可写成

$$\hat{f}(t) = f(t) * \frac{1}{t\pi}$$



## 2.1.3 希尔伯特变换 (Hilbert transform)

### 2. $2/\pi$ 移相

设  $\hat{F}(f) = F[\hat{f}(t)]$  , 由于  $\hat{f}(t) = f(t) * \frac{1}{t\pi}$  ,

因此  $\hat{F}(f) = F(f) \bullet F[1/t\pi]$  .

由 
$$F[1/\pi t] = -j \operatorname{sgn}(f) = \begin{cases} -j, & -90^\circ, f > 0 \\ j, & 90^\circ, f < 0 \end{cases}$$

得  $\hat{F}(f) = -[j \operatorname{sgn}(f)]F(f)$

所以  $\hat{F}(f)$  是一个  $\pi/2$  相移系统。

对正频率产生  $-\pi/2$  的相移。

对负频率产生  $\pi/2$  相移。

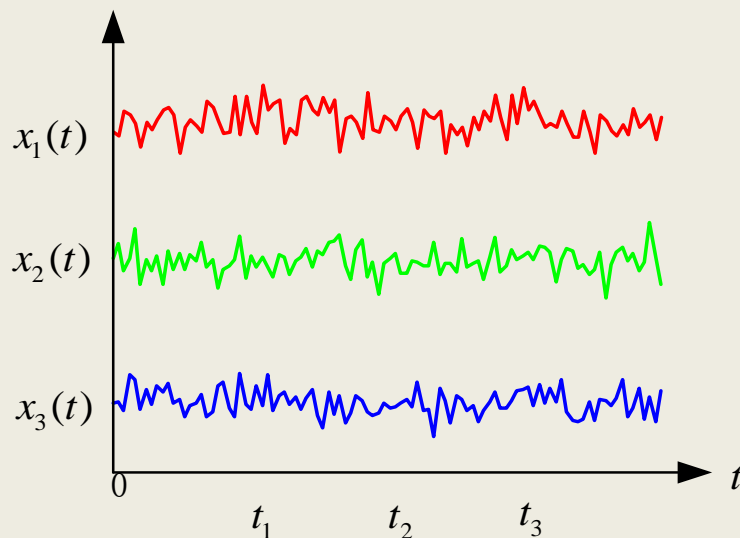
因此, 希尔伯特变换又称为  $\pi/2$  移相器。

## 2.2 随机信号分析方法

### 2.2.1 随机过程

#### 1. 随机过程的一般概念

**随机过程**可看成是一个由全部可能的实现构成的总体，每个实现都是一个确定的**时间函数**。



换个角度观察随机过程，它是时间 $t$ 的函数，在任一时刻观察到的值是一个**随机变量**。

## 2.2.1 随机过程

**定义：**随机过程是**样本函数的全体**，用 $\xi(t)$ 表示。

$$\xi(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots\}$$

其中  $x_i(t)$  是样本函数。

或随机过程是依赖于时间参量  $t$  变化的**随机变量的全体**。

$$\xi(t) = \{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n), \dots\}$$

其中  $X(t_i)$  是随机变量。

## 2.2.1 随机过程

### 2. 随机过程的统计特性描述

#### 1) 随机过程 $\xi(t)$ 的一维概率分布函数

$$F_1(x_1, t_1) = P\{\xi(t_1) \leq x_1\}$$

#### 2) 随机过程的一维概率密度函数

$$f_1(x_1, t_1) = \frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1}$$

#### 3) 随机过程的n维概率分布函数

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P[\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n]$$

#### 4) 随机过程的n维概率密度函数

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

## 2.2.1 随机过程

### 3. 随机过程的数字特征

#### 1) 数学期望

$$a(t) = E\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1; t) dx_1$$

随机过程的**数学期望**是时间  $t$  的函数。

$a^2(t)$  可以看成随机过程的**直流功率**。

#### 2) 方差 $D[\xi(t)] = E\{\xi(t) - E[\xi(t)]\}^2 = E[\xi^2(t)] - a^2(t)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x; t) dx = \sigma^2(t)$$

方差  $\sigma^2(t)$  可以看作随机过程的**交流功率**。

**平均功率**

$$E[\xi^2(t)] = a^2(t) + \sigma^2(t)$$

## 2.2.1 随机过程

### 3) 自协方差函数 $B(t_1, t_2)$ 与自相关函数 $R(t_1, t_2)$

自协方差函数定义为

$$\begin{aligned} B(t_1, t_2) &= E\left\{\left[\xi(t_1) - a(t_1)\right]\left[\xi(t_2) - a(t_2)\right]\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x_1 - a(t_1)\right]\left[x_2 - a(t_2)\right] f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

当  $B(t_1, t_2) = 0$ ，表示  $X(t_1)$  和  $X(t_2)$  线性不相关。

$$B(t_1, t_2) = E\left\{\xi(t_1)\xi(t_2)\right\} - a(t_1)a(t_2)$$

定义前一项为自相关函数  $R(t_1, t_2)$

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E\left[\xi(t_1)\xi(t_2)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$





## 2.2.2 平稳随机过程

### 1. 平稳随机过程概念

随机过程的平稳性分为严格平稳和广义平稳。

**严格平稳:**

任何 $n$ 维分布函数或概率密度函数与时间起点无关。

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta, \dots, t_n + \Delta)$$

严格平稳又称为**严平稳**或**狭义平稳**。

## 2.2.2 平稳随机过程

如果随机过程严格平稳，则

$$\text{对于一维有 } f_1(x_1; t_1) = f_1(x_1, t_1 + \Delta) = f_1(x_1)$$

与时间无关。

$$\text{对于二维有 } f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta) = f_2(x_1, x_2; \tau)$$

仅与时间间隔有关。其中  $\tau = t_1 - t_2$ 。

严格平稳随机过程的数字特征的特点：

$$\text{数学期望 } E\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1) dx = a, \text{ 常数。}$$

$$\text{方差 } D[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 f_1(x_1) dx = \sigma^2, \text{ 常数。}$$

$$\text{自相关函数 } R(t_1, t_1) = E\{\xi(t_1)\xi(t_1 + \tau)\} = R(\tau)$$

仅是时间间隔  $\tau$  的函数。

广义  
平稳

## 2.2.2 平稳随机过程

### 2. 各态历经的平稳随机过程

**各态历经性:**

平稳随机过程的一个样本函数在整个时间轴上的**时间平均值**可以用来代替其**统计平均值**。

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_1(t) dt = E[\xi(t)] = a \\ \overline{\sigma^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [x_1(t) - \bar{a}]^2 dt = D[\xi(t)] = \sigma^2 \\ \overline{R(\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_1(t) x_1(t + \tau) dt = R(\tau) \end{array} \right.$$



## 2.2.2 平稳随机过程

**例：**随机相位正弦波  $\xi(t) = \sin(\omega_c t + \theta)$ ，其中  $\theta$  是在  $(0 \sim 2\pi)$  内均匀分布的随机变量。求：

- (1)  $\xi(t)$  是否广义平稳？
- (2)  $\xi(t)$  是否具有各态历经性？

解：

$$\begin{aligned} a(t) &= E[\xi(t)] = E[\sin(\omega_c t + \theta)] = \int_0^{2\pi} \sin(\omega_c t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin \omega_c t \cos \theta + \cos \omega_c t \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} [\sin \omega_c t \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + \cos \omega_c t \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta] = 0 \end{aligned}$$

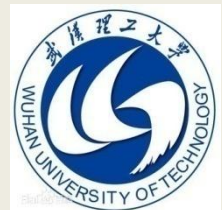


## 2.2.2 平稳随机过程

$$\begin{aligned}R(t, t + \tau) &= E[\xi(t)\xi(t + \tau)] \\&= E\{\sin(\omega_c t + \theta) \sin(\omega_c t + \omega_c \tau + \theta)\} \\&= E\{\sin(\omega_c t + \theta) \sin(\omega_c t + \theta) \cos(\omega_c \tau)\} + E\{\sin(\omega_c t + \theta) \cos(\omega_c t + \theta) \sin(\omega_c \tau)\} \\&= \cos(\omega_c \tau) E\{\sin^2(\omega_c t + \theta)\} + \sin(\omega_c \tau) E\{\sin 2(\omega_c t + \theta)\} \\&= \frac{1}{2} \cos(\omega_c \tau) \\&= R(\tau)\end{aligned}$$

$$D[\xi(t)] = E\{\xi^2(t)\} - E[\xi(t)]^2 = R(0) - a^2(t) = \frac{1}{2}$$

可见，随机相位正弦波满足广义平稳条件。



## 2.2.2 平稳随机过程

当T趋近于无穷时

$$\begin{aligned}\bar{a}(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega_c t + \theta) dt = a(t) = 0 \\ \therefore \overline{R(\tau)} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \{ \sin(\omega_c t + \theta) \sin(\omega_c t + \omega_0 \tau + \theta) \} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \{ \cos(2\omega_c t + \omega_0 \tau + 2\theta) - \cos(\omega_c \tau) \} dt \\ &= \frac{1}{2} \cos(\omega_c \tau) \\ &= R(\tau)\end{aligned}$$

所以，随机相位正弦波是一个各态历经的随机过程。

## 2.2.2 平稳随机过程

### 3. 平稳随机过程的自相关函数的性质

平稳随机过程的自相关函数和时间  $t$  无关，只与时间间隔  $\tau$  有关：

$$R(\tau) = E\{\xi(t)\xi(t+\tau)\}$$

性质：

- 1)  $R(0) = E\{\xi^2(t)\} = P$
- 2) 对偶性  $R(\tau) = R(-\tau)$
- 3)  $R(0) \geq |R(\tau)|$

证明：

$$\begin{aligned} &\because E\{[\xi(t) \pm \xi(t+\tau)]^2\} \geq 0 \\ &\therefore E\{\xi^2(t) \pm 2\xi(t)\xi(t+\tau) + \xi^2(t+\tau)\} \\ &= E\{\xi^2(t)\} \pm 2E\{\xi(t)\xi(t+\tau)\} + E\{\xi^2(t+\tau)\} \\ &= 2[R(0) \pm R(\tau)] \geq 0 \end{aligned}$$

因为  $R(0)$  非负

所以  $R(0) \geq |R(\tau)|$

## 2.2.2 平稳随机过程

$$4) \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} E\{\xi(t)\xi(t+\tau)\} = E\{\xi^2(t)\} = a^2$$

证明：当时间间隔很大时，可将  $\xi(t)$  和  $\xi(t+\tau)$  看成是统计独立的。

因此  $R(\infty) = a^2$

$$5) R(0) - R(\infty) = \sigma^2$$

平	直	交
均	接	流
功	功	功
率	率	率



## 2.2.2 平稳随机过程

### 4. 功率谱密度

非周期功率信号的功率谱公式

$$P_s(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

设随机过程一次实现的截断函数为  $\xi_T(t)$ ，它的傅里叶变换为  $F_T(\omega)$ ，则该样本函数的功率谱为：

$$P_{\xi_T}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

随机过程的平均功率谱为：

$$P_{\xi}(\omega) = E[P_{\xi_T}(\omega)] = E\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}\right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|F_T(\omega)|^2]}{T}$$

$$\text{平均功率为: } P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_T}(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} P_{\xi_T}(\omega) d\omega$$

## 2.2.2 平稳随机过程

### 5. 维纳—辛钦定理

维纳—辛钦定理给出平稳随机过程的自相关函数与功率谱密度的关系。

它们互为**傅里叶变换对**，即：

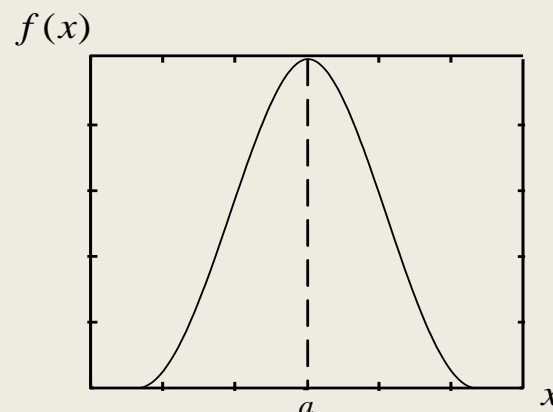
$$\begin{cases} F[R(\tau)] = P(\omega) \\ F^{-1}[P(\omega)] = R(\tau) \end{cases}$$

## 2.2.3 高斯随机过程

### 1. 高斯分布

**高斯分布**是最常见和最重要的一种分布，一维概率密度函数如下：

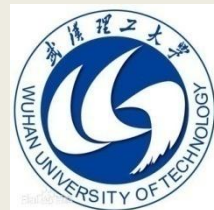
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$



求解误码率时，经常用到以下函数。

误差函数：
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-z^2) dz$$

补余误差函数：
$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-z^2) dz$$



## 2.2.3 高斯随机过程

**高斯过程**是指任意维分布都服从高斯分布的随机过程。

1) 高斯过程的 $n$ 维概率密度函数

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n |B|^{1/2}} \times \exp\left[-\frac{1}{2|B|} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |B_{jk}| \left(\frac{x_j - a_j}{\sigma_j}\right) \left(\frac{x_k - a_k}{\sigma_k}\right)\right]$$

$a_k$  — 第 $k$ 个时刻的均值

$\sigma_k^2$  — 第 $k$ 个时刻的方差

$b_{jk}$  — 第 $j$ 个时刻和第 $k$ 个时刻的归一化协方差函数



## 2.2.3 高斯随机过程

2) 若高斯过程广义平稳，必将严格平稳。

若广义平稳，则均值和方差是常数，只与时间间隔有关，即维概率密度函数与时间起点无关，所以严格平稳。

3) 如果高斯过程中的各随机变量之间是互不相关，必将统计独立。

若在不同时刻取值不相关，则  $b_{jk} = 0(j \neq k); b_{jk} = 1(j = k)$

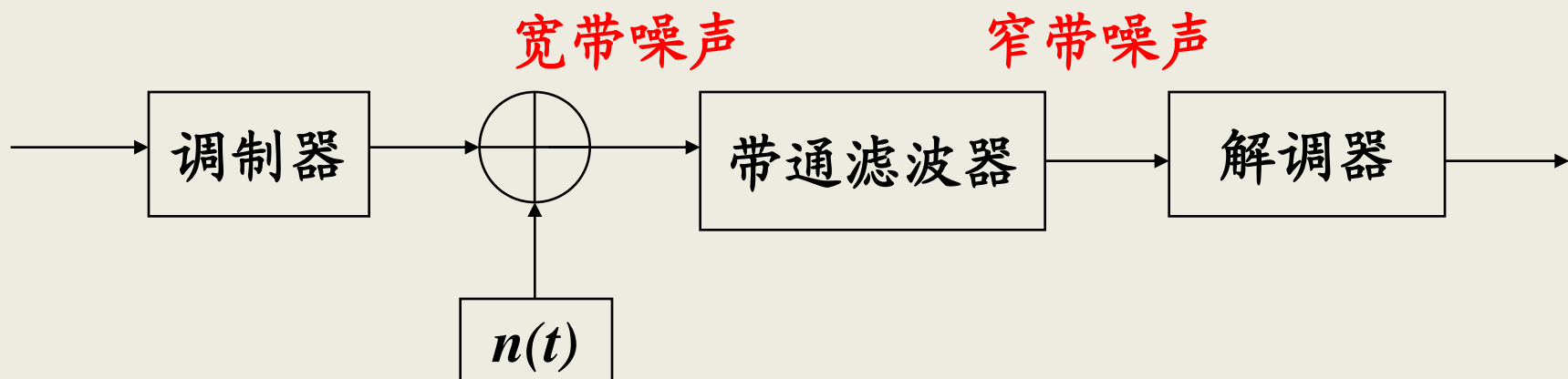
$$\begin{aligned} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= f(x_1, t_1) f(x_2, t_2) \dots f(x_n, t_n) \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp\left[-\frac{(x - a_j)^2}{2\sigma_j^2}\right] \end{aligned}$$

## 2.2.4 窄带高斯噪声

### 1. 窄带随机过程

窄带随机过程满足：

中心频率为载频  $f_c$ ，带宽为  $\Delta f$ ，且  $\Delta f \ll f_c$ 。



## 2.2.4 窄带高斯噪声

### 2. 窄带过程的数学表示

窄带过程的数学表示方法有**两种**。

**第一种**用包络和相位表示。

$$\xi(t) = \alpha_{\xi}(t) \cos[\omega_c t + \varphi_{\xi}(t)]$$

$\alpha_{\xi}(t)$  随机包络； $\varphi_{\xi}(t)$  随机相位。

**第二种**用包络和相位表示。

$$\begin{aligned}\xi(t) &= a_{\xi}(t) \cos \omega_c t \cos \varphi_{\xi}(t) - a_{\xi}(t) \sin \omega_c t \sin \varphi_{\xi}(t) \\ &= \xi_c(t) \cos \omega_c t - \xi_s(t) \sin \omega_c t\end{aligned}$$

$\xi_c(t)$  同相分量； $\xi_s(t)$  正交分量。

## 2.2.4 窄带高斯噪声

### 3. 白噪声

白噪声的功率谱密度

$$P_n(\omega) = n_0 / 2, \quad n_0 \text{ — 单边功率谱密度}$$

白噪声的自相关函数

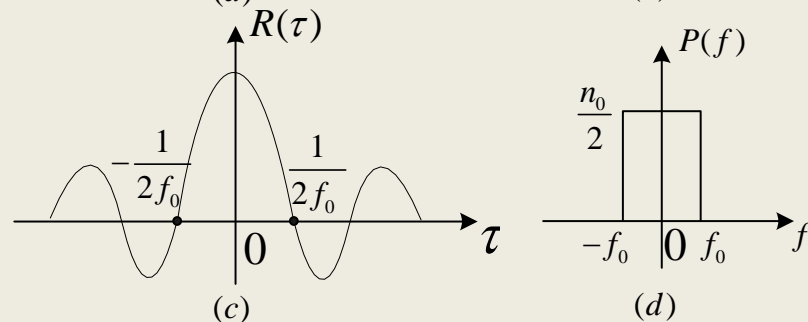
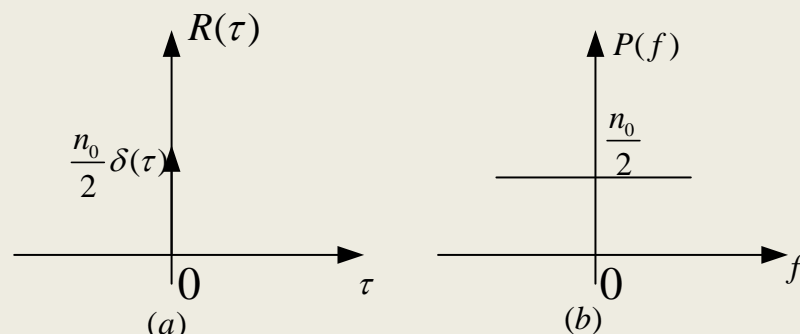
$$R(\tau) = F^{-1}\{P_n(\omega)\} = \frac{n_0}{2} \delta(\tau)$$

理想低通白噪声:

$$P_{n0}(\omega) = \begin{cases} n_0 / 2 & |f| \leq f_0 \\ 0 & \text{else } f \end{cases}$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n0}(\omega) d\omega$$

$$= \int_{-f_0}^{f_0} \frac{n_0}{2} \exp(j2\pi f \tau) df = f_0 n_0 \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau}$$





## 2.2.4 窄带高斯噪声

窄带高斯白噪声表达式:

$$\begin{aligned}n(t) &= n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \\ &= a_n(t) \cos[\omega_c t + \varphi_n(t)]\end{aligned}$$

特性:

- 1) 均值为零的窄带高斯噪声  $n(t)$ , 若平稳, 则同相分量  $n_c(t)$  和正交分量  $n_s(t)$  也是平稳随机过程, 高斯分布, 且均值和方差与  $n(t)$  相同;
- 2) 窄带高斯噪声的随机包络  $a_n(t)$  服从瑞利分布;
- 3) 窄带高斯噪声的随机相位  $\varphi_n(t)$  服从均匀分布。

## 2.2.5 正弦波加窄带高斯噪声

正弦波加窄带高斯过程的**两种描述方式**:

**方式一**: 用同相分量和正交分量描述

信号  $s(t) = A \cos(\omega_c t + \theta)$

噪声  $n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t$

信号加噪声

$$\begin{aligned} r(t) &= s(t) + n(t) = [A \cos \theta + n_c(t)] \cos \omega_c t - [A \sin \theta + n_s(t)] \sin \omega_c t \\ &= Z_c(t) \cos \omega_c t - Z_s(t) \sin \omega_c t \end{aligned}$$

统计特性:

$Z_c(t)$ 和 $Z_s(t)$  统计独立, 且均为高斯过程。

$$E[Z_c(t)] = E[A \cos \theta + n_c(t)] = E[A \cos \theta] + E[n_c(t)] = [A \cos \theta]$$

$$D[Z_c(t)] = D[A \cos \theta + n_c(t)] = D[n_c(t)] = \sigma^2$$



## 2.2.5 正弦波加窄带高斯噪声

方式二：用包络和相位描述

$$r(t) = Z(t) \cos[\omega_c t + \Phi(t)]$$

$$Z(t) = \sqrt{Z_c^2(t) + Z_s^2(t)} \quad Z \geq 0$$

$$\Phi(t) = \arctan \frac{Z_s(t)}{Z_c(t)} \quad 0 \leq \Phi(t) \leq 2\pi$$

根据数学公式

$$f(Z, \Phi/\theta) = |J| f(Z_c, Z_s/\theta)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial Z_c}{\partial Z} & \frac{\partial Z_s}{\partial Z} \\ \frac{\partial Z_c}{\partial \Phi} & \frac{\partial Z_s}{\partial \Phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi \\ -Z \sin \Phi & Z \cos \Phi \end{vmatrix} = Z$$

## 2.2.5 正弦波加窄带高斯噪声

$$f(Z, \Phi/\theta) = \frac{Z}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{Z^2 + A^2 - 2AZ \cos(\theta - \Phi)}{2\sigma^2}\right]$$

$$f(Z/\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{Z}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{Z^2 + A^2 - 2AZ \cos(\theta - \Phi)}{2\sigma^2}\right] d\Phi$$

$$= \frac{Z}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{Z^2 + A^2}{2\sigma^2}\right] \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{AZ \cos(\theta - \Phi)}{\sigma^2}\right] d\Phi$$

$$= \frac{Z}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{Z^2 + A^2}{2\sigma^2}\right] \cdot I_0\left(\frac{AZ}{\sigma^2}\right) \quad Z \geq 0$$

与  $\theta$  无关。

$$f(Z) = \frac{Z}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{Z^2 + A^2}{2\sigma^2}\right] \cdot I_0\left(\frac{AZ}{\sigma^2}\right) \quad Z \geq 0$$

广义瑞利分布或莱斯 (Rice) 分布

## 2.2.5 正弦波加窄带高斯噪声

0阶修正贝塞尔函数:

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos \theta) d\theta$$

$$f(Z) = \frac{Z}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{Z^2 + A^2}{2\sigma^2}\right] \cdot I_0\left(\frac{AZ}{\sigma^2}\right) \quad Z \geq 0$$

- (1) 如果  $A = 0$ , 则 *Rice* 分布就退化成了瑞利分布。
- (2) 若  $A > 3\sigma$  时, *Rice* 分布近似于高斯分布。

正弦波加窄带高斯过程相位的概率密度函数:

小信噪比时接近于均匀分布

大信噪比时主要集中在信号相位附近。

## 2.3 随机过程通过线性系统

### 2.3.1 信号通过线性系统的不失真条件

设系统传输函数  $H(\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ ，输入  $e(t)$ ，输出  $r(t)$ 。

无失真传输时域关系：

$$r(t) = Ke(t - t_0)$$

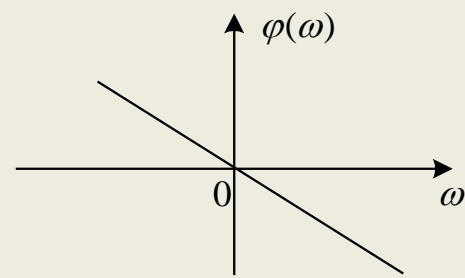
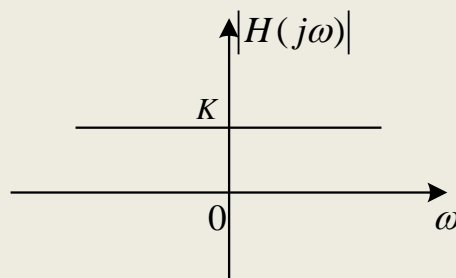
频谱关系为

$$H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$$

因此

$$|H(j\omega)| = K$$

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0$$



## 2.3 随机过程通过线性系统

### 2.3.2 随机过程通过线性系统的特性

对于确知信号，输入  $e(t)$  经过线性系统  $h(t)$  后，输出  $r(t)$  可以表示为：
$$r(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e(t - \tau) d\tau$$

频谱关系为：
$$R(\omega) = E(\omega)H(\omega)$$

功率谱密度之间的关系为：
$$P_r(\omega) = P_e(\omega) |H(\omega)|^2$$

对于随机过程  $\xi_i(t)$ ，输出过程为  $\xi_o(t)$ 。

$$\xi_o(t) = \xi_i(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \xi_i(t - \tau) d\tau$$

假设  $\xi_i(t)$  平稳，均值为  $a$ 。

## 2.3 随机过程通过线性系统

### 1) 数学期望

$$\begin{aligned} E[\xi_0(t)] &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\xi_i(t-\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)E[\xi_i(t-\tau)]d\tau \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = aH(0) \end{aligned}$$

与时间 $t$ 无关。

### 2) 输出自相关函数

$$\begin{aligned} R_0(t, t+\tau) &= E[\xi_0(t)\xi_0(t+\tau)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\xi_i(t-\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)\xi_i(t+\tau-\beta)d\beta\right] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)\xi_i(t-\alpha)\xi_i(t+\tau-\beta)d\alpha d\beta\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)E[\xi_i(t-\alpha)\xi_i(t+\tau-\beta)]d\alpha d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_i(\tau+\alpha-\beta)d\alpha d\beta \\ &= R_0(\tau) \end{aligned}$$

$\xi_0(t)$  至少广义平稳。



## 2.3 随机过程通过线性系统

### 3) 功率谱密度

由维纳—辛钦定理可知，平稳随机过程的自相关函数和功率谱密度是一对傅里叶变换。

$$\begin{aligned} P_0(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_i(\tau + \alpha - \beta)d\alpha d\beta \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)P_i(\omega)e^{-j\omega(\alpha-\beta)}d\alpha d\beta = P_i(\omega)H(\omega)H^*(\omega) \\ &= P_i(\omega)|H(\omega)|^2 \end{aligned}$$

### 4) 互相关函数

“互”指涉及到两个随机过程。

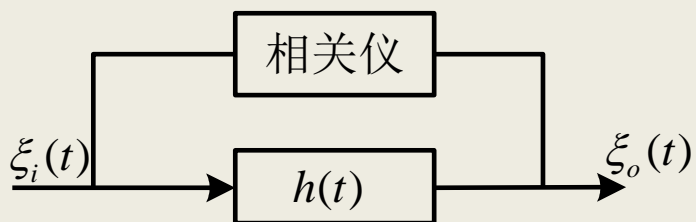
$$\begin{aligned} R_{i_0}(t, t + \tau) &= E[\xi_i(t)\xi_o(t + \tau)] = E\left[\xi_i(t)\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\xi_i(t + \tau - \alpha)d\alpha\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)E[\xi_i(t)\xi_i(t + \tau - \alpha)]d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)R(\tau - \alpha)d\alpha = h(\tau) * R_i(\tau) \end{aligned}$$

## 2.3 随机过程通过线性系统

**例：**输入是功率谱密度为  $n_0/2$  的高斯白噪声，求其线性网络输入与输出的互相关函数。

**解：**高斯白噪声的自相关函数

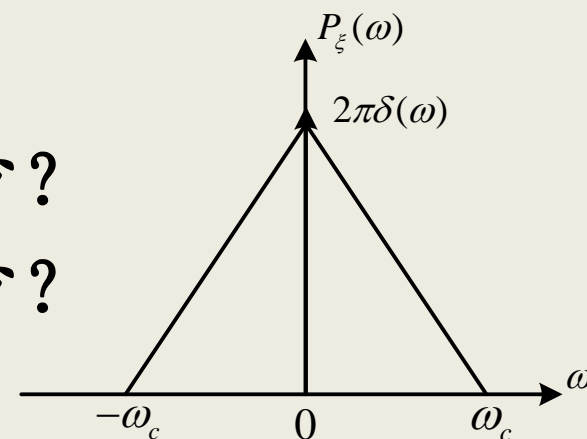
$$\begin{cases} R_i(\tau) = \frac{N_o}{2} \delta(\tau) \\ R_{io}(\tau) = R_i(\tau) * h(\tau) = \frac{N_o}{2} \delta(\tau) * h(\tau) = \frac{N_o}{2} h(\tau) \end{cases}$$



## 2.3 随机过程通过线性系统

**例：**随机过程的功率谱密度如图所示，求：

- (1)  $\xi(t)$  的自相关函数  $R(\tau)$ ;
- (2)  $\xi(t)$  中包含的直流功率等于多少?
- (3)  $\xi(t)$  中包含的交流功率等于多少?



**解：**

$$(1) R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = 1 + \frac{1}{2\pi} \omega_c Sa^2\left(\frac{\omega_c\tau}{2}\right) = 1 + f_c Sa^2\left(\frac{\omega_c\tau}{2}\right)$$

$$(2) \text{直流功率} \quad P_{\text{直}} = R(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega) d\omega = 1$$

$$(3) \text{平均功率} \quad P_{\text{平均}} = R(0) = 1 + f_c$$

$$\text{交流功率} \quad P_{\text{交}} = R(0) - R(\infty) = (1 + f_c) - 1 = f_c$$

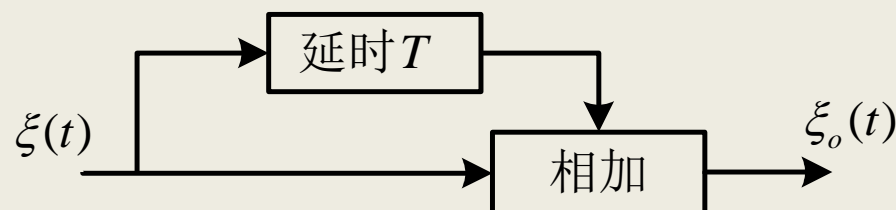
## 2.3 随机过程通过线性系统

**例：**一个均值为  $a$ ，自相关函数为  $R_x(\tau)$  的平稳随机过程  $\xi(t)$  通过一个线性系统后的输出过程为

$$\xi_0(t) = \xi(t) + \xi(t-T), \quad T \text{ 为延迟时间。}$$

- (1) 试画出该线性系统的框图；
- (2) 试求  $\xi_0(t)$  的自相关函数和功率谱密度。

解：(1)





## 2.3 随机过程通过线性系统

$$\begin{aligned} (2) \quad R_{\xi_0}(t_1, t_2) &= E[\xi_0(t_1)\xi_0(t_2)] \\ &= E\{[\xi(t_1) + \xi(t_1 - T)][\xi(t_2) - \xi(t_2 - T)]\} \\ &= E[\xi(t_1)\xi(t_2) + \xi(t_1)\xi(t_2 - T) + \xi(t_1 - T)\xi(t_2) + \xi(t_1 - T)\xi(t_2 - T)] \\ &= 2R_{\xi}(\tau) + R_{\xi}(\tau - T) + R_{\xi}(\tau + T) \end{aligned}$$

设  $t_2 - t_1 = \tau$

根据  $P_0(\omega) \Leftrightarrow R_0(\tau)$ ,  $R_{\xi}(\tau) \Leftrightarrow P(\omega)$

$$\begin{aligned} P_0(\omega) &= 2P(\omega) + P(\omega)e^{j\omega\tau} + P(\omega)e^{-j\omega\tau} = P(\omega)(2 + e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}) \\ &= 2P(\omega)(1 + \cos \omega T) \end{aligned}$$