

DOI:10.13196/j.cims.2015.01.018

带有辅助样本的 \bar{X} 控制图经济设计

胡雪龙, 孙金生⁺

(南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094)

摘要:针对异常因素产生时间服从指数分布的过程,采用带有辅助样本的 X (SSX)控制图监控过程质量特性的均值和方差,研究了 SSX 控制图的经济性能。构建了 SSX 控制图监控生产过程的费用函数模型;采用模式搜索算法对费用函数模型进行寻优,得到 SSX 控制图的最优决策变量、平均调整时间及费用,并比较了 SSX、均值极差和变采样间隔均值极差控制图的经济性能。仿真结果表明,SSX 控制图比均值极差控制图能够明显缩短平均调整时间和减小控制图的监控费用,且在大部分的偏移大小下,SSX 控制图的经济性能都要优于变采样间隔均值极差控制图;对参数的灵敏度进行分析,结果表明模型中参数变化对采样间隔、控制图的控制限系数都有一定影响。

关键词:控制图经济设计;SSX 控制图; \bar{X} R 控制图;平均调整时间

中图分类号:F273 **文献标识码:**A

Economic design of \bar{X} control chart with supplementary samples

HU Xue-long, SUN Jin-sheng⁺

(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: Aiming at the occurrence time of assignable cause follows exponential distribution, a Supplementary Sample \bar{X} (SSX) control chart was used to monitor the mean value and variance of process quality feature, and the economic performance of SSX control chart was researched. The cost function model for implementation of SSX control chart was constructed, and the pattern search algorithm was used to optimize this model. Thus the decision variables, Average Adjusted Time to Signal (AATS) and cost of SSX control chart were obtained, and the economic performance between SSX, \bar{X} R and Variable Sampling Interval (VSI) \bar{X} R control chart was compared. The simulations revealed that the average adjustment time and monitoring costs of SSX chart were reduced obviously than \bar{X} R, and SSX control chart was better than VSI \bar{X} R under most cases of shifts. A sensitivity analysis of the model was performed, and the results showed that the sampling intervals and control limits of SSX control chart were affected by the parameters in the cost function.

Key words: economic design of control chart; supplementary sample control chart; \bar{X} R control chart; average adjusted time to signal

0 引言

在统计过程控制中,控制图是广泛采用的监控质量特性波动的控制方法。在实际生产中,因为机器磨损或环境等因素的改变,过程均值和方差可能都会产生波动,此时不仅需要监控质量特性的均值,还需要监控方差的偏移,所以针对均值、极差控制图

的研究引起了广泛关注。

为了提高 \bar{X} R 控制图对小偏移的检测能力, Costa^[1-2] 提出变参数 \bar{X} R 控制图,相对于 \bar{X} R 控制图,变参数 \bar{X} R 控制图可以更快速地检测到过程的偏移;Costa^[3] 提出带有辅助样本的 \bar{X} 控制图来监控过程的均值和方差,通过比较其与 \bar{X} R 控制图的统计性能,发现带有辅助样本的 \bar{X} 控制图能够更快

收稿日期:2013-11-29;修订日期:2014-03-17。Received 29 Nov. 2013;accepted 17 Mar. 2014.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60974129,70931002)。**Foundation items:** Project supported by the National Natural Science Foundation, China(No. 60974129,70931002).

地检测到过程偏移;Costa 等^[4]提出两阶段采样的 $\bar{X}R$ 控制图,比较它与 $\bar{X}R$ 控制图、变样本大小 $\bar{X}R$ 控制图的统计性能,发现两阶段采样的 $\bar{X}R$ 控制图可以更快地检测到过程偏移,且两阶段采样 $\bar{X}R$ 控制图更便于在实际生产过程中实施。采用 $\bar{X}R$ 控制图监控过程时,需要同时监控两张控制图,增加了操作的复杂性。针对这一问题,Costa 等^[5]提出采用一张控制图监控过程均值和方差的波动,即非中心卡方分布图,通过构建一个服从卡方分布的统计变量,研究了非中心卡方控制图的统计性能,相比于 $\bar{X}R$ 控制图,非中心卡方控制图可以更快速地检测到异常因素且操作更为简单。关于监控过程均值和方差控制图的研究,国内外学者都进行了一些有益的工作^[6-7],但以上研究大多是从统计角度研究控制图的性能。

近年来,关于控制图经济设计方面的研究也逐渐受到关注,控制图的经济设计问题最初由 Duncan^[8]提出,通过构建与过程监控相关的费用函数,从经济角度来设计 \bar{X} 控制图。Lorenzen 等^[9]针对不同的统计量,考虑寻找异常因素时过程是否停止运行等问题,构建了通用的费用函数模型,通过算例说明了该模型的应用,并对模型进行灵敏度分析,发现费用对模型中的参数变化是灵敏的,同时指出控制图经济设计中模型参数灵敏度分析的必要性。Saniga^[10]通过构建 $\bar{X}R$ 控制图的费用函数模型,研究了带有统计约束的 $\bar{X}R$ 控制图的经济性能,结果表明可以通过适当增加费用来提高控制图的统计性能。针对 $\bar{X}R$ 控制图检测小偏移能力弱的缺点,Chou 等^[11]通过构建变采样间隔均值极差 (Variable Sampling Interval, VSI $\bar{X}R$) 控制图的经济模型,研究了 VSI $\bar{X}R$ 控制图的经济性能,相对于 $\bar{X}R$ 控制图,VSI $\bar{X}R$ 控制图减小了监控费用。Magalhaes 等^[12]研究了变参数 $\bar{X}R$ 控制图的经济性能,并与 $\bar{X}R$ 控制图的经济性能进行比较,发现前者的监控费用明显减少了。金焱等^[13]采用田口质量损失函数,将生产过程分成三个状态,并定义每个状态的损失函数,在传统的经济生产批量和控制图经济设计的基础上提出一个联合设计模型,通过最优化该模型,得到最佳生产批量和控制图的最优决策变量。

以上研究表明,关于监控均值、极差的控制图研究,主要都是从统计或者经济的角度研究变采样间隔、变样本大小或变参数 $\bar{X}R$ 控制图的性能。本文从控制图的经济角度,研究了带有辅助样本的 X (Supplementary Sample, SSX) 控制图的性能,通过

构建 SSX 控制图的费用函数模型,采用模式搜索算法对模型进行寻优,给出控制图的最优决策变量和监控费用,并与 $\bar{X}R$ 控制图、VSI $\bar{X}R$ 控制图的经济性能进行了比较,发现 SSX 控制图的整体经济性能优于 $\bar{X}R$ 和 VSI $\bar{X}R$ 控制图。

1 SSX 控制图

采用 SSX 控制图监控过程均值、方差的偏移时,首先采集大小为 1 的样本,并打点在 X 控制图上,X 控制图的上下控制限为 $(\mu_0 \pm k_x \sigma_0)$,其中 k_x 为 X 控制图的控制限系数, μ_0 和 σ_0 表示过程处于受控状态时的总体均值和方差。当样本点落在 X 控制图的上下控制限之间时,判断过程处于受控状态,每隔 h 个时间单元继续采集大小为 1 的样本,打点在 X 控制图上继续监控。当 X 控制图上的样本点落在控制限之外时,需要立即采集一个辅助样本,其样本大小为 n ,并采用 $\bar{X}R$ 控制图监控辅助样本的均值和极差, $\bar{X}R$ 控制图的控制限分别设定为 $(\mu_0 \pm k\sigma_0/\sqrt{n})$ 和 $(0, k_R(n)\sigma_0)$,其中 k 和 $k_R(n)$ 分别表示均值控制图和极差控制图的控制限系数。针对该辅助样本,如果样本均值或极差落在 $\bar{X}R$ 控制图的控制限之外,则判断过程处于失控状态,否则判断过程处于受控状态,继续采用 X 控制图监控过程^[3]。图 1 所示为 SSX 控制图的监控流程。

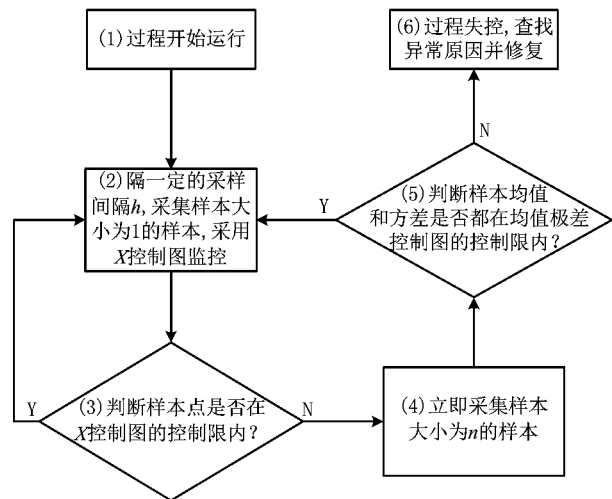


图1 SSX控制图的监控流程

异常原因产生之前,即过程处于受控状态时,不失一般性,假设质量特性值 Z 服从标准正态分布,即 $Z \sim N(0, 1)$ 。针对 SSX 控制图,样本大小为 1 的样本落在 X 控制图控制限内的概率

$$p_1 = Pr\{|Z| < k_x | Z \sim N(0, 1)\} \quad (1)$$

样本大小为 n 的样本均值落在 \bar{X} 控制图控制限内的概率

$$p_2 = Pr\{|Z| < k \mid Z \sim N(0,1)\}. \quad (2)$$

样本大小为 n 的样本极差落在 R 控制图控制限内的概率

$$p_3 = Pr\{0 < R < k_R(n) \mid Z \sim N(0,1)\}. \quad (3)$$

根据 SSX 控制图的监控流程, 可得其误报率

$$\alpha = (1 - p_1) \times (1 - p_2 \times p_3). \quad (4)$$

异常原因产生之后, 即过程处于失控状态时, 质量特性值 Z 的均值或者极差发生偏移, $Z \sim N(\delta, r)$, δ 和 r 为过程发生偏移时描述偏移大小的参数。X 控制图的漏报率

$$q_1 = Pr\{|Z| < k_x \mid Z \sim N(\delta, r)\}. \quad (5)$$

$\bar{X}R$ 控制图的漏报率

$$q_2 = Pr\{|Z| < k \mid Z \sim N(\delta\sqrt{n}, r)\} \times Pr\{0 < R < k_R(n)\sigma \mid \sigma = r\sigma_0\}. \quad (6)$$

根据 SSX 控制图的监控流程, 可得其漏报率

$$\beta = q_1 + (1 - q_1) \times q_2. \quad (7)$$

2 费用函数模型

2.1 单位时间的期望费用函数

过程的一个质量周期从生产过程开始到排除异常原因为止, 主要包括受控、失控、检测和修复过程三个阶段。在过程的一个质量周期中, 与生产过程相关的费用主要由如下几部分组成: ①过程处于受控、失控状态时生产出不合格品的费用; ②过程处于受控状态时针对误报警而产生的费用; ③过程处于受控、失控状态的采样费用; ④查找和剔除异常原因的费用。整个生产过程可以看作由一系列相互独立且相同的质量周期组成, 即整个过程可作为更新过程, 剔除异常原因并修复过程结束即为更新的开始。根据更新理论^[14], 单位时间的费用可以表示为一个质量周期的期望费用与期望时间的比值。一个质量周期的全部过程如图 2 所示。

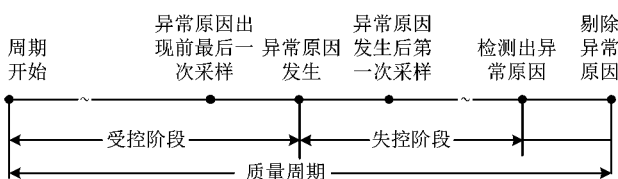


图2 生产过程的一个质量周期

2.2 费用函数模型中的参数描述

针对异常原因产生时间服从指数分布的过程,

构建 SSX 控制图监控过程的费用函数模型, 模型中的参数描述如下: n 为采样样本大小; h 为采样时间间隔; k_x 为 X 控制图的控制限系数; k 为 \bar{X} 控制图的控制限系数; k_R 为 R 控制图的控制限系数; $1/\lambda$ 为异常原因产生的期望时间; C_0 为过程受控时, 每小时生产出不合格品的费用; C_1 为过程失控时每小时生产出不合格品的费用; Y 为每次误报警的费用; W 为确定某一异常原因和过程维修的费用; a 为每次采样的固定费用参数; b 为每次采样的变化费用参数; T_0 为每次发生误报警寻找异常原因所花费的时间; T_1 为发现某一异常原因所花费的时间; T_2 为过程维修所花费的时间; $E(T)$ 为一个质量周期的期望时间; $E(C)$ 为一个质量周期的期望费用; $AATS_{**}$ 为平均调整时间; $Cost_{**}$ 为费用。

2.3 费用函数模型中的假设

(1) 过程开始于受控状态, 其质量特性 Z 服从正态分布, 即 $Z \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, 其中 μ_0 和 σ_0^2 分别表示过程处于受控状态的均值和方差。随着过程的运行, 在将来的某一时刻, 由于异常因素的产生, 过程的均值或方差会偏移至失控状态, 即 $\mu = \mu_0 + \delta\sigma_0$ 或者 $\sigma = \gamma\sigma_0$, 其中 $\delta > 0$ 和 $\gamma > 1$ 分别为过程均值、方差的偏移参数。不失一般性, 当过程处于受控状态时, 本文假设质量特性值 $Z \sim N(0, 1)$, 即 $\mu_0 = 0, \sigma_0 = 1$ 。

(2) 异常因素产生的时间服从参数为 λ 的指数分布, 其概率密度函数 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} (t \geq 0, \lambda > 0)$, 累积分布函数 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t} (t \geq 0, \lambda > 0)$ 。

(3) 当生产过程中产生异常因素时, 系统不会自动修复; 在搜索异常原因或者修复过程期间, 过程停止运行。

2.4 费用函数模型的构建

根据异常因素产生时间服从指数分布的假设, 过程处于受控状态的期望时间为 $1/\lambda$, 而过程处于受控状态采集样本的期望数

$$E(N) = \sum_{i=0}^{\infty} i [e^{-\lambda i} - e^{-\lambda(i+1)}] = e^{-\lambda} / (1 - e^{-\lambda}), \quad (8)$$

误报率为 α , 因此过程处于受控状态时的误报警数

$$E(F) = \alpha \times E(N), \quad (9)$$

针对误报警而耗费的时间

$$E(T_{fal}) = T_0 E(F). \quad (10)$$

当过程处于受控状态时, 采样样本大小的期望值

$$E(n \mid \delta = 0, \gamma = 1) = 1 + n \times (1 - p_1). \quad (11)$$

过程处于失控状态时,异常因素产生到之前一次采样的期望时间为

$$\tau = \int_{hi}^{h(i+1)} \lambda(x-hi)e^{-\lambda x} dx / \int_{hi}^{h(i+1)} \lambda e^{-\lambda x} dx = [1 - (1 + \lambda h)e^{-\lambda h}] / [\lambda(1 - e^{-\lambda h})]. \quad (12)$$

过程处于失控状态的平均运行链长 $ARL_1 = \frac{1}{1-\beta}$, 因此过程的平均调整时间

$$AATS = ARL_1 \times h - \tau. \quad (13)$$

查找异常原因以及修复过程的期望时间 $E(T_{rec}) = T_1 + T_2$ 。综上所述,一个质量周期的期望时间为

$$E(T) = 1/\lambda + T_0 \times E(F) + AATS + T_1 + T_2. \quad (14)$$

$$Cost = \frac{E(C)}{E(T)} = \frac{\left\{ \begin{aligned} &C_0/\lambda + Y \times E(F) + C_1 \times AATS + (a + b \times E(n | \delta = 0, \gamma = 1)) \times E(N) + \\ &(a + b \times E(n | \delta > 0 \text{ or } \gamma > 1)) \times AATS/h + W \end{aligned} \right\}}{1/\lambda + T_0 \times E(F) + AATS + T_1 + T_2}. \quad (18)$$

将 SSX 控制图经济设计问题转化为带有约束的非线性函数最优化问题。在一定的约束条件下,最小化 SSX 控制图监控生产过程的费用函数,可以得到 SSX 控制图的最优决策变量和监控费用,即:

$$\begin{aligned} &\min Cost. \\ \text{s. t.} \quad &n \in N^*, h > 0, k_x > 0; \\ &k_{\bar{x}} > 0, k_R > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

3 算例分析

为了更好地研究 SSX 控制图的经济性能,本文引用 Lorenzen^[9]算例中的数据,通过 MATLAB 7.1 版 Pattern search 工具包对模型进行寻优,得到 SSX 控制图的最优决策变量、平均调整时间和监控费用。费用函数(式(18))中的费用、时间参数取值如下: $C_0 = 114.24, C_1 = 949.20, Y = 977.40, W = 977.40, a = 0, b = 4.22, T_0 = 5/60, T_1 = 5/60, T_2 = 45/60, \lambda = 1/50$, 偏移量 $\delta = 1, r = 1.5$ 。表 1 所示为 SSX 控制图的决策变量、平均调整时间和 SSX 控制图监控过程产生的费用。

表 1 SSX 控制图的决策变量、平均调整时间和监控费用

(δ, r)	n	h	k_x	k	k_R	$AATS_{SSX}$	$Cost_{SSX}$
(1.0, 1.5)	14	0.359 0	2.012 2	2.518 2	5.619 1	1.359 8	174.484 8

在实际生产过程中, $\bar{X}R, VSI \bar{X}R$, 变参数 $\bar{X}R$ (Variable Parameter $\bar{X}R, VP \bar{X}R$) 控制图等都是常用来监控过程均值和极差变化的工具,但综合考

过程处于失控状态时,采样样本大小的期望值 $E(n | \delta > 0 \text{ or } \gamma > 1) = 1 + n \times (1 - q_1)$ 。 (15)

因此过程采样费用的期望值

$$E(C_{sam}) = (a + b \times E(n | \delta = 0, \gamma = 1)) \times E(N) + (a + b \times E(n | \delta > 0 \text{ or } \gamma > 1)) \times AATS/h. \quad (16)$$

根据一个质量周期的期望时间,可以得到该质量周期的期望费用

$$E(C) = C_0/\lambda + Y \times E(F) + C_1 \times AATS + (a + b \times E(n | \delta = 0, \gamma = 1)) \times E(N) + (a + b \times E(n | \delta > 0 \text{ or } \gamma > 1)) \times AATS/h + W. \quad (17)$$

由式(14)和式(17)可知,单位时间的期望费用函数为

虑费用和控制图操作的复杂性,不建议采用 $VP \bar{X}R$ 控制图。因此在表 2 中给出了 $\bar{X}R$ 和 $VSI \bar{X}R$ 控制图监控生产过程所产生的费用和平均调整时间。

表 2 $\bar{X}R$ 和 $VSI \bar{X}R$ 控制图的平均调整时间和监控费用

(δ, r)	$AATS_{\bar{X}R}$	$Cost_{\bar{X}R}$	$AATS_{VSI\bar{X}R}$	$Cost_{VSI\bar{X}R}$
(1.0, 1.5)	1.778 9	185.763 4	1.452 7	176.384 1

对比表 1 和表 2 可以看出,采用 SSX 控制图监控过程时,平均调整时间为 1.359 8, 费用为 174.484 8, 而采用 $\bar{X}R$ 控制图来监控过程时,平均调整时间为 1.778 9, 费用为 185.763 4, SSX 控制图相对于 $\bar{X}R$ 控制图节约了 6.07% 的费用, 平均调整时间减少了 23.56%, 这一结果明显体现了 SSX 控制图在经济性能和检测异常因素速度方面的优越性。从表 2 中还可以看出, 当采用 $VSI \bar{X}R$ 控制图监控过程时, 平均调整时间为 1.452 7, 费用为 176.384 1, 相比于 SSX 控制图, 平均调整时间从 1.452 7 减少到 1.359 8, 费用从 176.384 1 减少到 174.484 8, 在检测异常因素的速度和费用方面, SSX 控制图都优于 $VSI \bar{X}R$ 控制图。在实际生产过程中, 可以选择 SSX 控制图来监控生产过程, 减少产品的不合格品率和监控过程的经济费用, 提高生产率, 具有很好的应用价值。

在实际生产过程中, 由于生产过程以及偏移原因的不同, 过程均值和方差的偏移大小会有所不同, 表 1 和表 2 中只给出了偏移量 $(\delta, r) = (1, 1.5)$ 时

SSX 控制图的监控效果,不足以反映 SSX 控制图的整体经济性能。因此,表 3 给出了 34 组典型偏移大小情形下三种控制图的监控效果。在每组均值、方差的偏移下,给出三组实验结果,分别表示 SSX, VSI $\bar{X}R$ 和 $\bar{X}R$ 控制图的费用(平均调整时间)。例如,当 $(\delta, r) = (0, 1.5)$ 时,SSX 控制图的费用和平均调整时间分别为 200.120 8 和 2.238 7; VSI $\bar{X}R$ 控制图的费用和平均调整时间分别为 201.478 9 和 2.289 2; $\bar{X}R$ 控制图的费用和平均调整时间分别为 215.142 3 和 2.853 6。从表 3 可以看出,在大部分偏移大小情形下,SSX 控制图在检测异常因素速度和费用方面都优于传统的 $\bar{X}R$ 控制图和 VSI $\bar{X}R$ 控制图,只有当 $(\delta, r) = (0.5, 1.0)$ 和 $(\delta, r) = (1.0, 1.0)$ 时,VSI $\bar{X}R$ 控制图的监控效果优于 SSX 控制图,即仅有均值产生小偏移的情形下,采用 VSI $\bar{X}R$

控制图监控生产过程可以节约更多费用。

根据这些实验结果可以发现,在大部分均值、极差偏移大小情形下,采用 SSX 控制图监控生产过程都能更快速地检测到异常因素,从而节约更多的费用。根据 Costa^[3]的研究可知,在生产过程的一个质量周期中,大部分时间过程都处于受控状态,采用 X 控制图来监控过程不需要采集辅助样本。例如,表 1 中 X 控制图的控制限系数为 2.012 2,当样本点落在 X 控制图控制限内时,不需要采集辅助样本,即根据 X 控制图的监控结果,有 $4.4\%(1-p_1)$ 的概率需要采集辅助样本数,明显简化了 $\bar{X}R$ 控制图在实际生产过程中同时监控过程均值、极差的流程。因此,采用 SSX 控制图监控生产过程,更易于在实际生产中应用。

表 3 不同偏移大小情形下 SSX(A), VSI $\bar{X}R$ (B) 以及 $\bar{X}R$ (C) 控制图的监控费用(平均调整时间)

δ	r				
	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0		200.120 8(2.238 7)	170.621 8(1.233 0)	161.088 5(0.926 8)	156.368 0(0.773 6)
		201.478 9(2.289 2)	177.179 4(1.450 4)	168.745 7(1.177 0)	158.529 7(0.867 4)
		215.142 3(2.853 6)	182.467 3(1.666 2)	170.112 9(1.244 2)	163.734 1(1.030 9)
0.5	222.040 5(3.130 5)	191.249 8(1.924 6)	168.942 4(1.177 2)	160.479 2(0.906 9)	156.100 1(0.765 0)
	214.078 6(2.722 2)	194.503 6(2.129 4)	170.985 3(1.289 1)	162.419 4(0.999 6)	157.882 3(0.860 8)
	220.580 8(3.032 7)	205.992 4(2.509 3)	180.480 6(1.597 9)	169.350 3(1.218 5)	163.356 1(1.018 3)
1.0	182.336 2(1.644 8)	174.484 8(1.359 8)	164.705 6(1.039 4)	158.837 2(0.853 5)	155.366 6(0.743 1)
	176.711 2(1.437 1)	176.384 1(1.452 7)	166.967 2(1.163 9)	160.926 8(0.951 4)	157.761 2(0.840 7)
	183.159 6(1.684 9)	185.763 4(1.778 9)	175.257 7(1.418 7)	167.218 2(1.147 3)	162.209 4(0.980 7)
1.5	162.908 5(0.992 6)	162.907 7(0.986 0)	159.831 4(0.884 2)	156.631 4(0.782 1)	154.229 1(0.706 5)
	163.061 1(1.006 8)	165.029 1(1.084 1)	162.035 5(0.990 8)	158.456 1(0.881 4)	156.173 1(0.800 0)
	168.360 1(1.183 1)	171.774 7(1.299 2)	168.906 2(1.203 6)	164.212 6(1.046 9)	160.025 7(0.908 8)
2.0	153.751 4(0.697 3)	155.798 5(0.758 3)	155.588 7(0.750 6)	154.298 3(0.708 8)	152.900 1(0.665 6)
	156.137 1(0.778 0)	158.044 2(0.851 3)	157.578 0(0.852 2)	155.971 6(0.794 1)	154.313 9(0.754 9)
	160.367 6(0.919 2)	163.284 1(1.015 6)	163.190 6(1.013 0)	160.869 4(0.936 5)	158.006 5(0.842 4)
2.5	148.962 8(0.544 3)	151.293 7(0.616 7)	152.244 2(0.645 2)	152.119 6(0.640 6)	151.508 2(0.621 0)
	151.688 7(0.644 3)	153.350 5(0.705 7)	154.105 9(0.730 0)	153.644 9(0.733 2)	152.557 7(0.692 8)
	155.301 3(0.753 2)	157.749 7(0.833 3)	158.634 0(0.863 0)	157.462 5(0.824 7)	155.950 0(0.775 2)
3.0	146.331 7(0.461 4)	148.391 1(0.525 3)	149.752 6(0.566 0)	150.228 8(0.581 9)	150.175 2(0.580 1)
	149.446 3(0.613 6)	150.687 6(0.644 2)	151.291 2(0.650 3)	151.386 2(0.650 3)	150.922 3(0.635 2)
	151.847 8(0.641 7)	153.928 2(0.709 1)	155.053 9(0.745 7)	154.722 0(0.735 2)	154.000 2(0.711 7)

4 参数灵敏度分析

在实际生产中,费用函数模型中的参数是根据历史数据文档估计的,因此模型参数值的大小就会

存在误差,必须对费用函数(式(18))中的关键参数进行灵敏度分析。在费用函数(式(18))中,时间参数 T_1 和 T_2 是常量,不会影响控制图的决策变量选择,因此本文主要讨论 6 个费用参数($C_0, C_1, a, b,$

Y, W) 和 2 个时间参数(T_0, λ)对模型的影响。

表 4 所示为模型中各参数为上述算例中参数值的 60%, 80%, 120% 和 140% 时, SSX 控制图对应的

决策变量、平均调整时间和监控费用。表 4 第 2 行给出了模型中参数均固定时, SSX 控制图的监控效果。

表 4 模型参数变化对控制图决策、平均调整时间和监控费用的影响

	n	h	k_x	k	k_R	$AATS_{SSX}$	$Cost_{SSX}$
参数固定	14	0.359 0	2.012 2	2.518 2	5.619 1	1.359 8	174.484 8
60% C_0	14	0.349 0	2.012 8	2.519 5	5.620 9	1.323 2	130.700 9
80% C_0	14	0.353 9	2.012 5	2.518 8	5.620 0	1.341 1	152.596 7
120% C_0	14	0.364 3	2.011 9	2.517 5	5.618 3	1.379 3	196.365 0
140% C_0	14	0.369 7	2.011 6	2.516 8	5.617 4	1.399 7	218.236 9
60% C_1	14	0.499 6	2.005 9	2.513 0	5.612 4	1.877 7	163.059 7
80% C_1	14	0.412 6	2.009 8	2.516 2	5.616 6	1.558 1	169.212 9
120% C_1	14	0.321 8	2.013 9	2.519 5	5.620 9	1.221 6	179.171 7
140% C_1	14	0.294 1	2.015 1	2.520 6	5.622 2	1.118 2	183.433 4
60% b	16	0.268 7	2.064 9	2.680 9	5.923 9	1.067 1	165.476 0
80% b	15	0.316 1	2.038 4	2.592 2	5.764 1	1.223 1	170.301 3
120% b	13	0.398 4	1.985 9	2.453 2	5.481 2	1.483 2	178.216 5
140% b	13	0.436 1	1.979 0	2.413 3	5.428 9	1.593 7	181.600 8
60% λ	14	0.456 3	2.016 1	2.521 9	5.624 0	1.737 4	158.248 7
80% λ	14	0.398 4	2.014 1	2.519 9	5.621 4	1.512 7	166.708 4
120% λ	14	0.330 0	2.010 5	2.516 6	5.617 0	1.247 2	181.763 6
140% λ	14	0.307 5	2.008 9	2.515 1	5.615 1	1.159 9	188.655 7
60% Y	12	0.368 7	1.955 2	2.350 3	5.287 4	1.329 8	173.439 4
80% Y	13	0.362 9	1.986 0	2.443 5	5.468 5	1.347 4	174.041 8
120% Y	15	0.356 0	2.035 4	2.581 2	5.749 7	1.369 2	174.836 3
140% Y	15	0.353 2	2.039 9	2.619 1	5.799 1	1.378 7	175.127 1
60% W	14	0.357 2	2.012 3	2.518 4	5.619 4	1.353 3	166.995 0
80% W	14	0.358 1	2.012 2	2.518 3	5.619 3	1.356 6	170.740 0
120% W	14	0.359 9	2.012 1	2.518 0	5.619 0	1.363 1	178.229 4
140% W	14	0.360 8	2.012 1	2.517 9	5.618 8	1.366 4	181.973 7
60% T_0	14	0.358 8	2.012 4	2.519 6	5.621 1	1.360 2	174.496 6
80% T_0	14	0.358 9	2.012 3	2.518 9	5.620 1	1.360 0	174.490 7
120% T_0	14	0.359 0	2.012 1	2.517 4	5.618 2	1.359 6	174.478 9
140% T_0	14	0.359 1	2.012 0	2.516 7	5.617 2	1.359 4	174.473 0

基于表 4 的实验结果,图 3~图 9 给出了模型中各参数 $X(C_0, C_1, b, Y, W, T_0, \lambda)$ 变化至上述算例中相应参数值的 60%, 80%, 100%, 120% 和 140% 时,控制图的最优决策变量、平均调整时间和监控费用的变化趋势。

由图 3 可以看出,样本大小 n 对费用函数模型中的参数 b 和 Y 的变化比较灵敏。随着每次采样变化费用参数 b 的增加,样本大小有减小趋势;随着每次误报警的费用 Y 的增加,样本大小有增加趋势。

由图 4 可以看出,采样间隔 h 对费用函数模型中的参数 C_1, b 和 λ 的变化比较灵敏。随着过程处于失控状态时单位时间生产出不合格品的费用 C_1 和异常因素产生的时间参数 λ 的增加,采样间隔 h 减小;随着每次采样变化费用参数 b 的增加,采样间隔 h 增加。此外,费用函数模型中其他参数的变化对采样间隔 h 都有一定的影响。

由图 5~图 7 可以看出,SSX 控制图的控制限系数对费用函数模型中的参数 b 和 Y 的变化比较灵

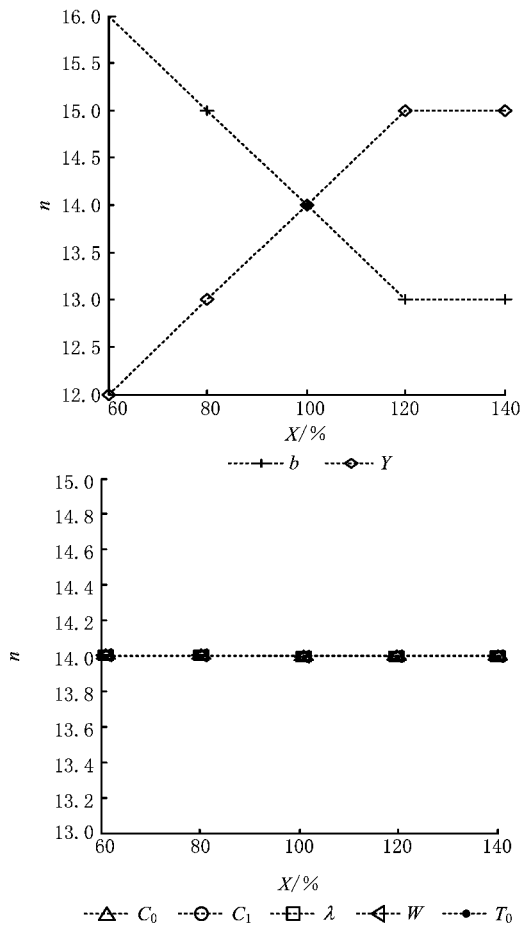


图3 各参数变化对采样大小 n 的影响

敏。随着每次采样变化费用参数 b 的增加,SSX 控制图的控制限系数均有减小的趋势;随着每次误报警费用 Y 的增加,SSX 控制图的控制限系数均有增加的趋势。此外,费用函数模型中其他参数的变化对控制限系数都有一定影响。例如,随着过程处于失控状态时单位时间生产出不合格品费用 C_1 的增加,SSX 控制图的控制限系数略有增加。

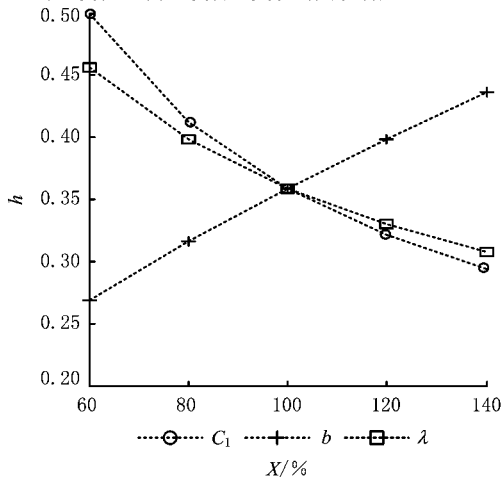


图4 各参数变化对采样间隔 h 的影响

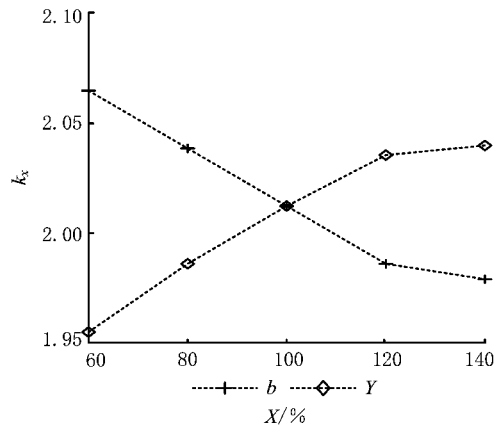
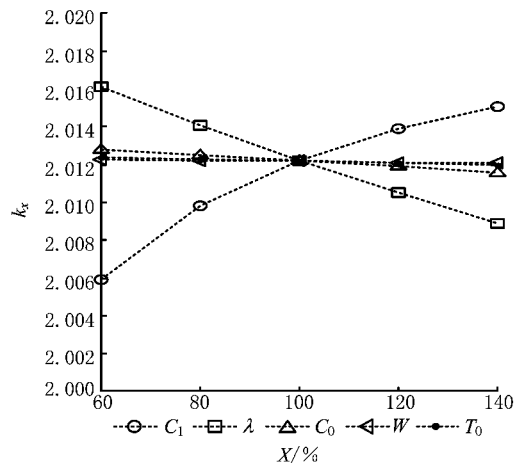


图5 各参数变化对控制限系数 k_x 的影响



由图 8 可以看出,过程处于失控状态的平均调整时间 $AATS_{SSX}$ 对费用函数模型中的参数 C_1 , b 和 λ 的变化比较灵敏。随着过程处于失控状态时单位时间生产出不合格品的费用 C_1 和异常因素产生的时间参数 λ 的增加,过程处于失控状态的平均调整时间 $AATS_{SSX}$ 减小;随着每次采样的变化费用参数

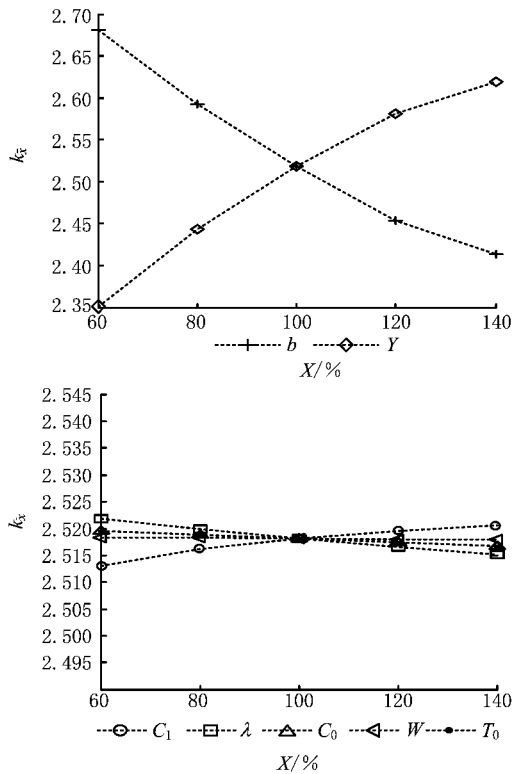


图6 各参数变化对控制限系数 k_k 的影响

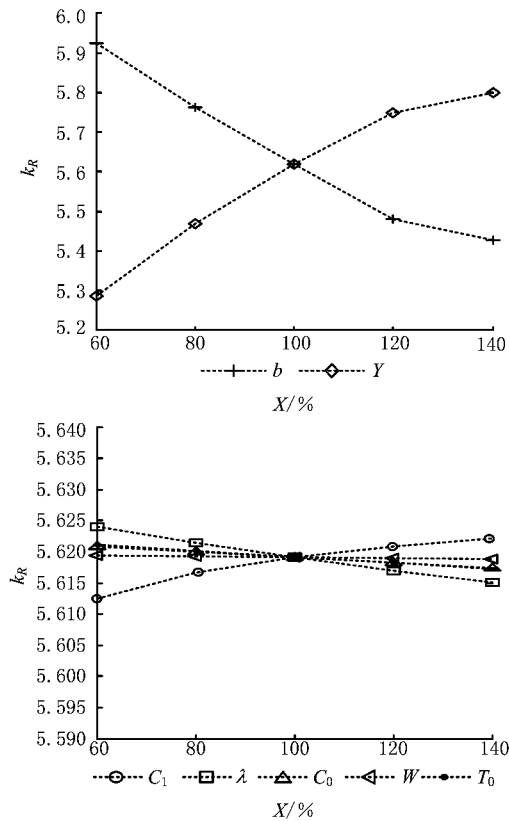


图7 各参数变化对控制限系数 k_R 的影响

b 的增加,过程处于失控状态的平均调整时间 $AATS_{SSX}$ 增加。此外,费用函数模型中其他参数的

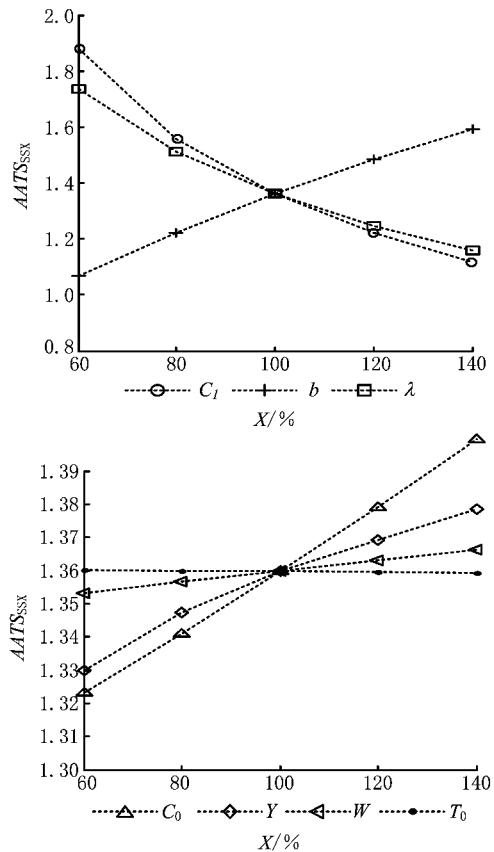


图8 各参数变化对平均调整时间 $AATS_{SSX}$ 的影响

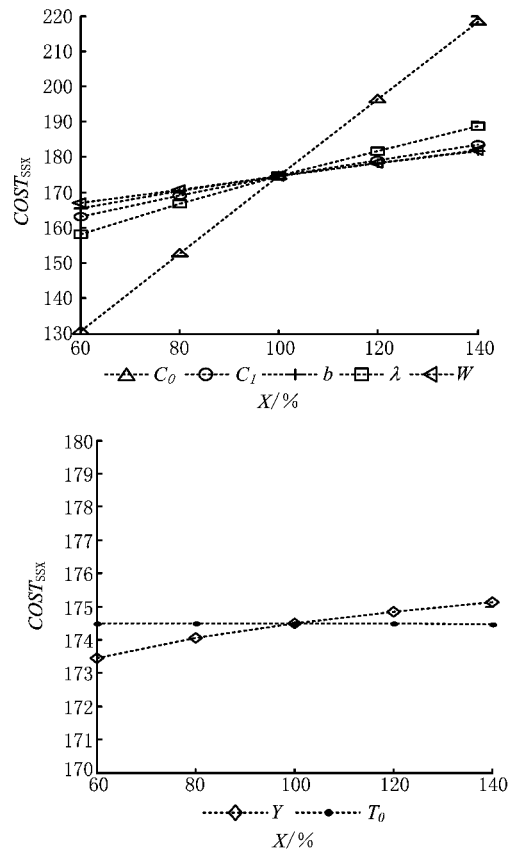


图9 各参数变化对监控过程费用 $COST_{SSX}$ 的影响

变化对平均调整时间 $AATS_{SSX}$ 都有一定影响。

由图 9 可以看出, 监控过程的费用 $Cost_{SSX}$ 对模型中的参数 C_0, C_1, b, λ 和 W 的变化比较灵敏。随着这些参数的增加, 监控过程的费用 $Cost_{SSX}$ 增加。此外, 每次误报警的费用 Y 以及发生误报警寻找异常原因的时间 T_0 对监控过程的费用影响较小。

根据以上分析可以看出, 每次采样的变化费用参数 b 和每次误报警的费用 Y 对控制图的决策变量影响最显著, 且模型中其他参数的变化对采样间隔、平均调整时间和监控费用都有一定影响。实际生产中, 要根据模型参数的估计情况合理地调整样本大小、采样间隔和控制限系数。

5 结束语

本文针对过程中异常因素的产生时间服从指数分布的情形, 提出采用 SSX 控制图监控生产过程中均值和方差波动的方法, 通过构建费用函数模型, 从经济角度说明了 SSX 控制图相对于常规 $\bar{X}R$ 和 VSI $\bar{X}R$ 控制图的优越性, 在平均调整时间和费用方面都有明显提升, 且在大部分的均值、方差偏移量情形下, SSX 控制图都能获得更好的经济性能。

通过对费用函数模型中的参数进行灵敏度分析, 指出在实际生产过程中, 每次采样的变化费用参数和每次误报警的费用参数的变化对 SSX 控制图的最优决策变量影响显著。费用函数模型中其他参数的变化对采样间隔和 SSX 控制图的控制限系数都有一定影响。在实际生产过程中, 采用 SSX 控制图监控生产过程时, 需要根据费用函数模型参数的估计情况, 对控制图的决策变量做适当修正, 选择合适的控制图决策变量可以减小监控费用、提高企业的经济效益。需要特别指出的是, 该研究考虑了 SSX 控制图的经济性能, 但未考虑其统计性能, 因此, 下一步将研究带有统计约束的 SSX 控制图的经济设计问题。

参考文献:

[1] COSTA A F B. Joint \bar{X} and R charts with variable parameters

[J]. IIE Transactions, 1998, 30(6): 505-514.

- [2] COSTA A F B. Joint \bar{X} and R charts with variable sample size and sampling intervals[J]. Journal of Quality Technology, 1999, 31(4): 387-397.
- [3] COSTA A F B. X charts with supplementary samples to control the mean and variance[J]. International Journal of Production Research, 2000, 38(16): 3801-3809.
- [4] COSTA A F B, RAHIM M A. Joint \bar{X} and R charts with two-stage samplings[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2004, 20(7): 699-708.
- [5] COSTA A F B, RAHIM M A. Monitoring process mean and variability with one non-central and chi-square chart[J]. Journal of Applied Statistics, 2004, 31(10): 1171-1183.
- [6] COSTA A F B, RAHIM M A. The non-central chi-square chart with two-stage samplings[J]. European Journal of Operation Research, 2006, 171(1): 64-73.
- [7] COSTA A F B, DE MAGALHAES M S. An adaptive chart for monitoring the process mean and variance[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2007, 23(7): 821-831.
- [8] DUCAN A J. The economic design of \bar{X} charts used to maintain current control of a process[J]. Journal of the American Statistical Association, 1956, 51(274): 228-242.
- [9] LORENZEN T J, VANCE L C. The economic design of control charts: a unified approach[J]. Technometrics, 1986, 28(1): 3-10.
- [10] SANIGA E M. Economic statistical control chart designs with an application to \bar{X} and R charts[J]. Technometrics, 1989, 31(3): 313-320.
- [11] CHOU C Y, WU C C, CHEN C H. Joint economic design of variable sampling intervals \bar{X} and R charts using genetic algorithms[J]. Communications in Statistics-simulation and Computation, 2006, 35(4): 1027-1043.
- [12] DE MAGALHAES M S, MOURA N F D. Joint economic model for totally adaptive \bar{X} and R charts[J]. European Journal of Operation Research, 2005, 161(1): 148-161.
- [13] JIN Yao, CANG Ting, PAN Ershun, et al. Economic production quantity model based on taguchi's quality loss function and control charts design[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2011, 17(10): 2224-2230 (in Chinese). [金 垚, 仓 亭, 潘尔顺, 等. 基于田口质量损失函数和控制图设计的经济生产批量模型[J]. 计算机集成制造系统, 2011, 17(10): 2224-2230.]
- [14] ROSS S M. Introduction to probability models[M]. New York, N. Y., USA: Academic Press, 1993.

作者简介:

胡雪龙(1988—), 男, 江苏宿迁人, 博士研究生, 研究方向: 复杂产品的质量控制, E-mail: hxl0419@hotmail.com;

十孙金生(1967—), 男, 吉林伊通人, 教授, 博士, 博士生导师, 研究方向: 网络拥塞控制、复杂产品的质量控制等, 通信作者, E-mail: jssun67@163.com.