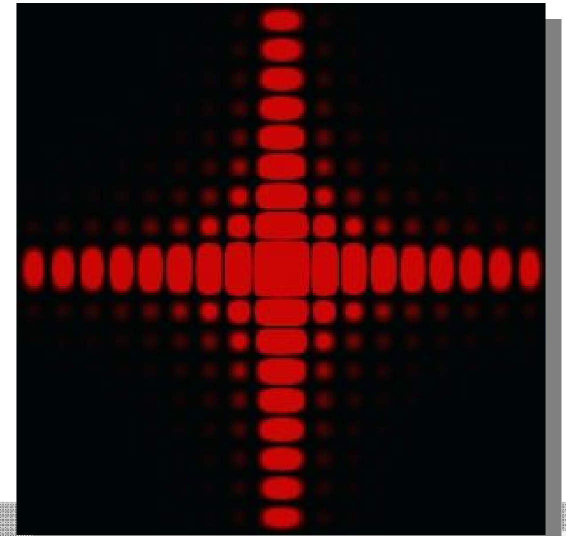
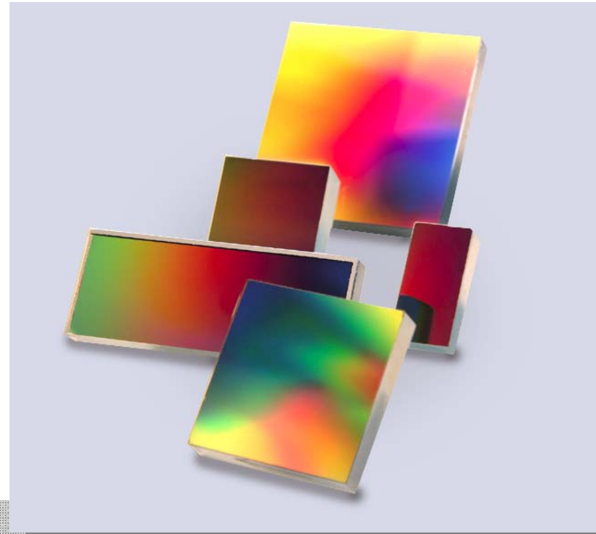
第四章：衍射 (diffraction)

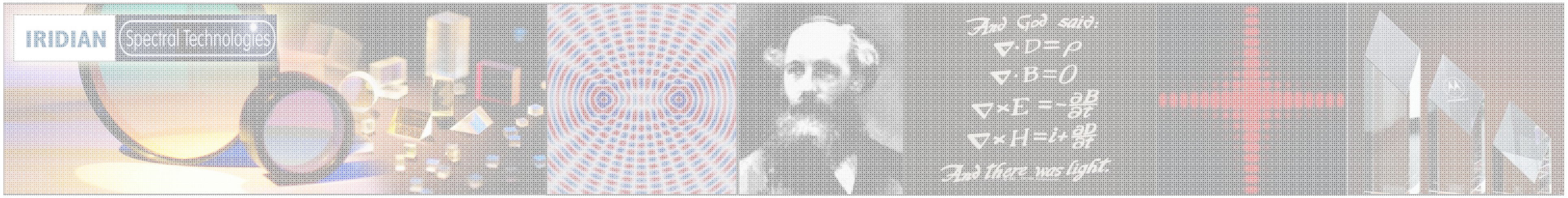
杨振宇



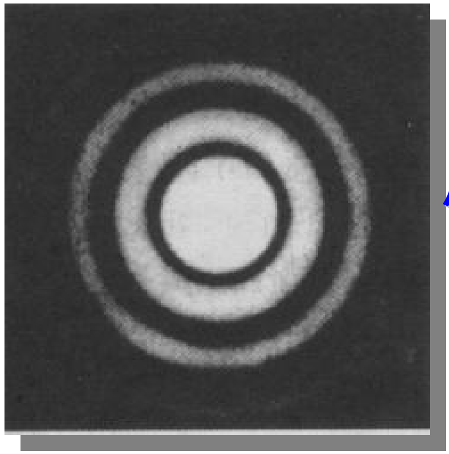


主要内容

- 从惠更斯-菲涅尔原理到基尔霍夫衍射公式
- 菲涅尔衍射和夫琅禾费衍射
- 典型孔径的夫琅禾费衍射
- 光栅的夫琅禾费衍射
- 菲涅尔衍射

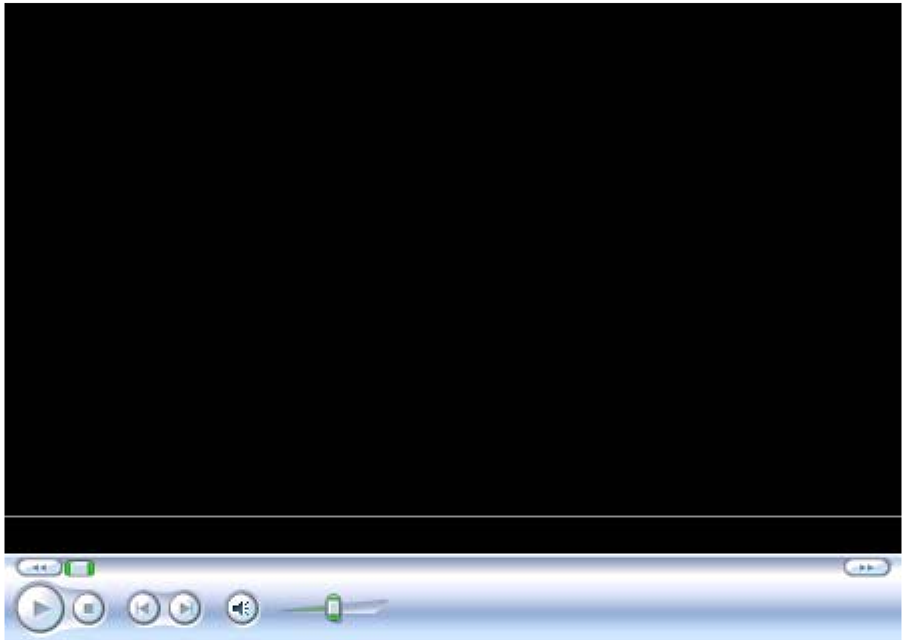


白光的单缝衍射

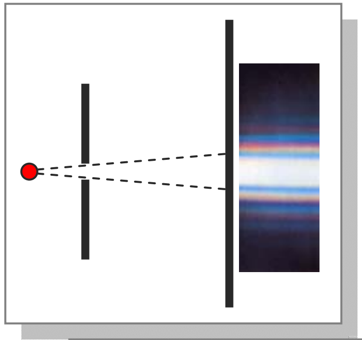


小孔衍射

视频展示：衍射



衍射：光在传播中遇到障碍物时，偏离原来传播方向进入障碍物的几何阴影区的现象.



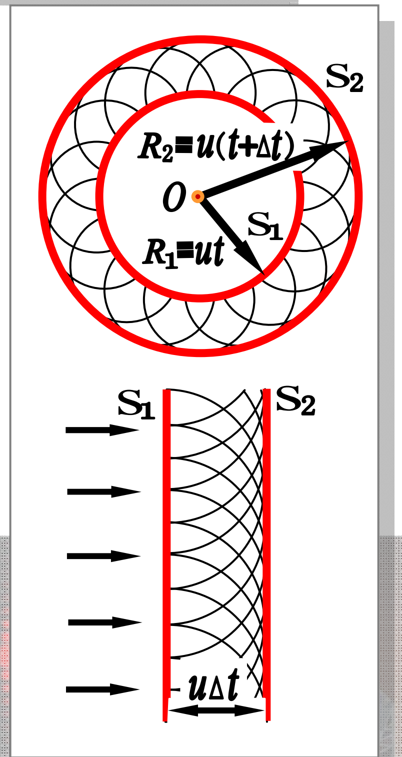
衍射是光波动性的表现，是影响光学成像系统性能的主要因素之一.

使光发生衍射的障碍物（小孔、狭缝），称为衍射屏.

4-1 基尔霍夫衍射理论(5.1, 5.2)

惠更斯-菲涅尔原理

惠更斯的解释（1690）



波前上的每一点都是一个次级扰动源，发出球面子波，这些子波的包络面就是新的波前。

问题：不能确定光波通过障碍物后沿不同方向传播的振幅。

4-1

惠更斯-菲涅尔原理

菲涅尔的补充（1818）

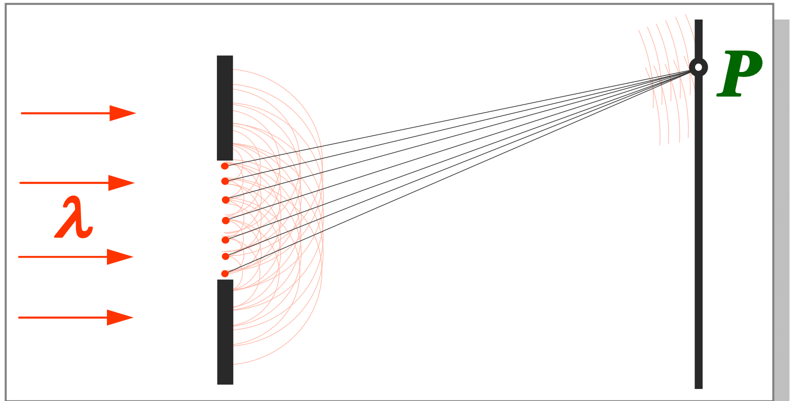
所有子波来自同一波前，所以，后一时刻的波前应是所有子波相干叠加的结果——惠更斯-菲涅尔

惠更斯的　定性子波概念.

菲涅耳的　定量子波干涉原理.

得到研究光的衍射现象的

惠更斯–菲涅耳原理：



讨论：

波阵面上任一点均可视为能向外发射子波的子波源. 波面前方空间某一点 P 的振动就是到达该点的所有子波的相干叠加.

要求同学们掌握该定理所提出的主要概念

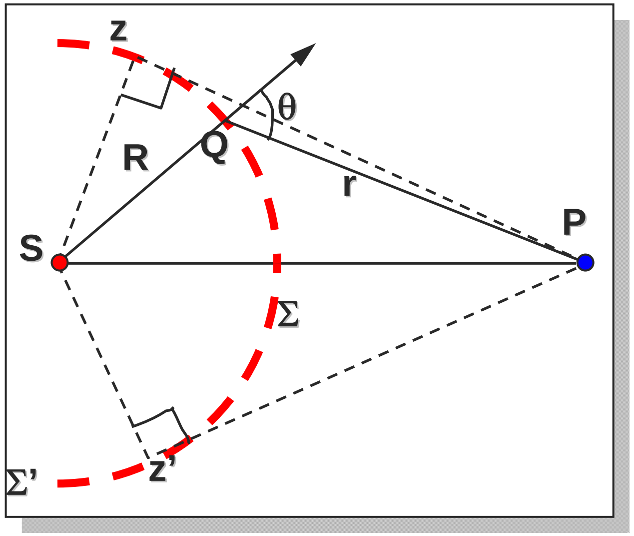
衍射现象的实质：子波干涉

4-1

惠更斯-菲涅尔原理

考察单色点源S对P的作用，用Σ’波前代替点光源S， Σ’波前上Q点的复振幅：

$$\tilde{E}_Q = \frac{A}{R}\exp(ikR)$$



Q点面元dσ对P的作用：

$$d\tilde{E}(P) = CK(\theta)\tilde{E}_Q \frac{\exp(ikr)}{r} d\sigma$$

其中， C—常数，K(θ)—倾斜因子， θ—衍射角

菲涅尔假设：θ↑→K(θ)↓，（若θ >=90° ） K =0，故只有Σ面上的点对P有贡献。

所有Σ面上的点对P点的贡献和：

$$\boxed{\tilde{E}(P) = C\tilde{E}_Q \iint_{\Sigma} \frac{\exp(ikr)}{r} K(\theta) d\sigma}$$

惠−菲原理的数学表达

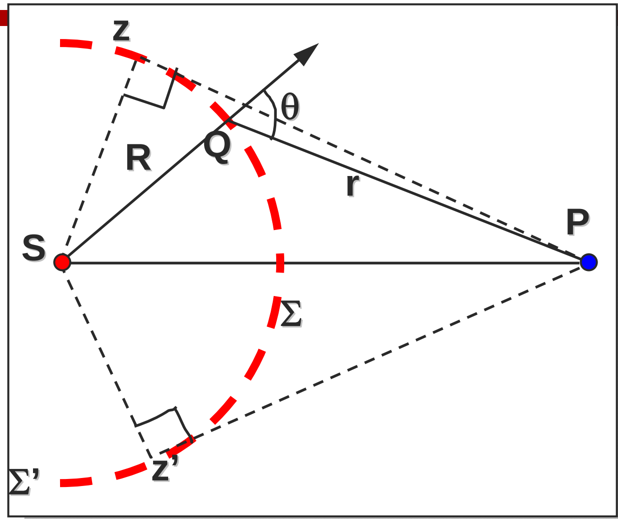
惠-菲原理的推广（波前Σ可以是任意曲面）：

$$\boxed{\tilde{E}(P) = C\iint_{\Sigma} \tilde{E}_Q \frac{\exp(ikr)}{r} K(\theta) d\sigma}$$

4-1

惠更斯-菲涅尔原理

$$\widetilde{E}(P)=C\iint_{\Sigma}\widetilde{E}_Q\frac{\exp(ikr)}{r}K(\theta)d\sigma$$

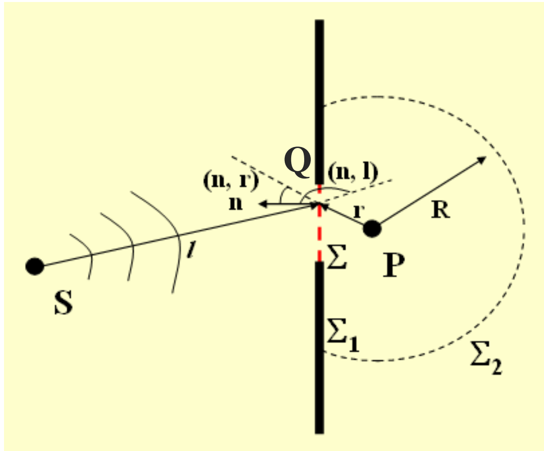


问题：惠菲原理不严格，例如K(θ)的引入缺乏理论依据，没有具体形式.

基尔霍夫（1882）找到标量波衍射的较严格数学表达式，得出K(θ)的具体形式.

$$\widetilde{E}(P)=\frac{A}{i\lambda}\iint_{\Sigma}\left\{\frac{\exp(ikl)}{l}\frac{\exp(ikr)}{r}\left[\frac{\cos(n,r)-\cos(n,l)}{2}\right]\right\}d\sigma$$

基尔霍夫衍射公式。其中：$\widetilde{E}(Q)=\dfrac{A}{l}\exp(ikl)$



A: 离点光源S 单位距离处的振幅，
l: S到Q的矢径，
r : 是P到Q的矢径，
n: 是子波元的法线方向单位矢量

详细推导参看“物理光学”-梁铨廷 P167-170

4-3 菲涅耳衍射和夫琅和费衍射

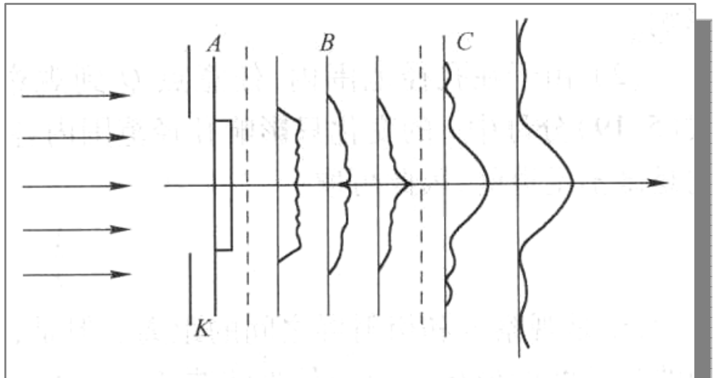


图 5.7　菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射的观察

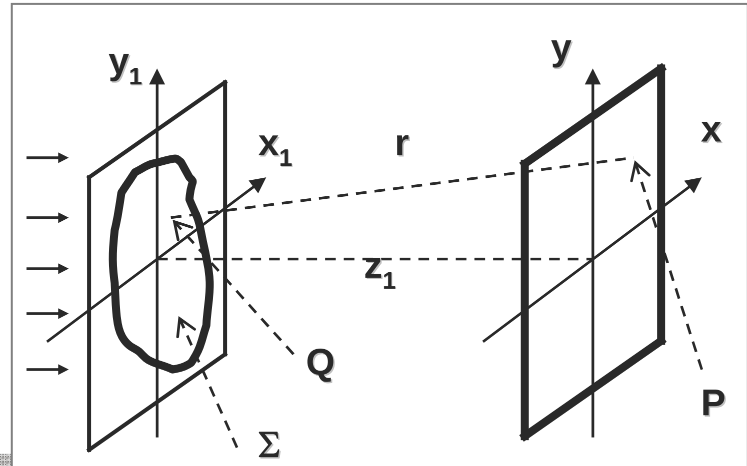
现象：

B区域（近场），光强分布的大小和形式都发生变化——**菲涅耳衍射**；

C区域（远场），光强分布只有大小的变化——**夫琅和费衍射**。

接下来，从基尔霍夫衍射公式出发，在不同的近似条件下，得到以上两种衍射计算公式。

$$\widetilde{E}(P)=\frac{A}{i\lambda}\iint_{\Sigma}\left\{\frac{\exp(ikl)}{l}\frac{\exp(ikr)}{r}\left[\frac{\cos(n,r)-\cos(n,l)}{2}\right]\right\}d\sigma$$



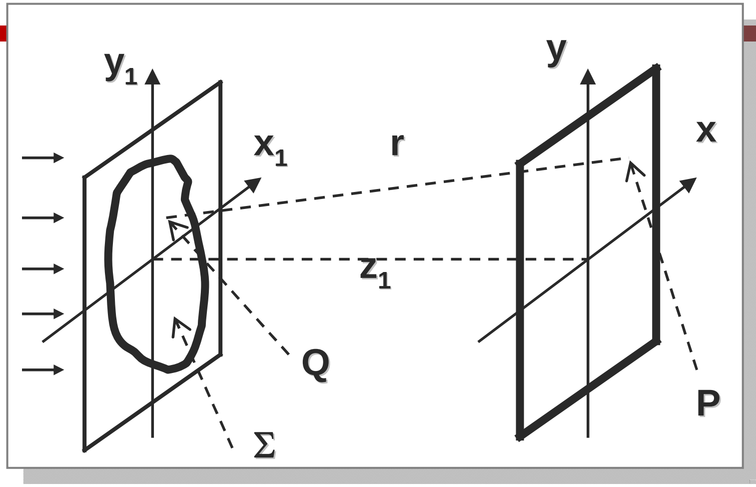
傍轴近似以简化衍射公式：

- **$\cos(n,r)=\cos\theta\approx1$，正入射：$K(\theta)=(1+\cos\theta)/2\approx1$**
- **球面波幅度因子$1/r\approx1/z_1$**

相位因子须更高阶近似

4-3

相位因子的近似处理：



$$r=\sqrt{z_1^2+(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=z_1\left[1+\left(\frac{x-x_1}{z_1}\right)^2+\left(\frac{y-y_1}{z_1}\right)^2\right]^{1/2}$$

对上式进行二项式展开，忽略三次及以上各项得，

$r \approx z_1\{1+[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]/(2z_1^2)\}$

该近似也被称为——菲涅尔近似

因此，基尔霍夫公式可化为：

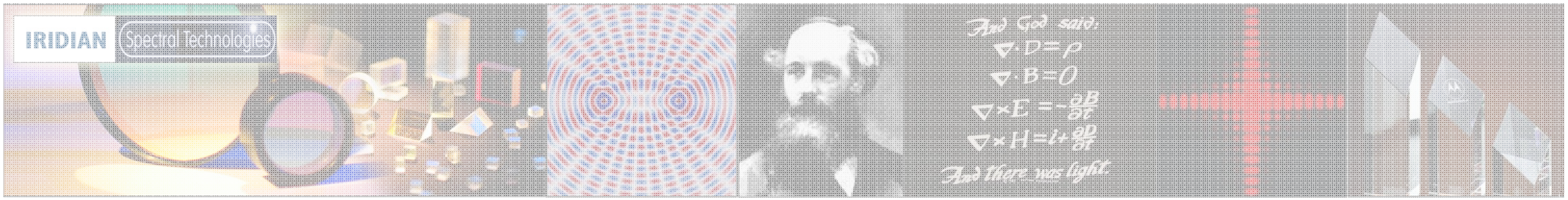
$$E(x,y)=\frac{\exp(ikz_1)}{i\lambda z_1}\iint_{\Sigma} E(x_1,y_1)\exp\left\{\frac{ik}{2z_1}\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]\right\}dx_1dy_1$$

其中：$E(Q)=E(x_1,y_1)$
$=A\exp(ik\ell)/\ell$

又因为，Σ外$E(x_1,y_1)=0$，故积分可在整个x_1y_1平面进行，可得：

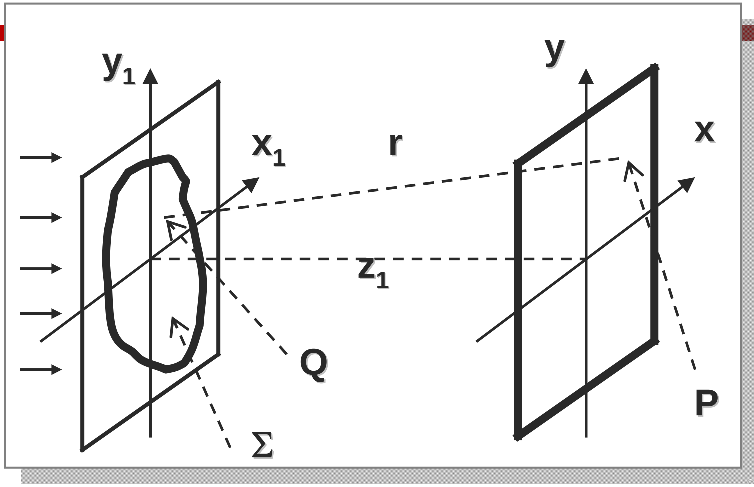
$$\boxed{E(x,y)=\frac{\exp(ikz_1)}{i\lambda z_1}\int\int_{-\infty}^{+\infty} E(x_1,y_1)\exp\left\{\frac{ik}{2z_1}\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]\right\}dx_1dy_1}$$

——菲涅尔衍射公式



4-3

$$E(x,y)=\frac{\exp(ikz_1)}{i\lambda z_1}\int\int_{-\infty}^{+\infty}E(x_1,y_1)\exp\left\{\frac{ik}{2z_1}\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]\right\}dx_1dy_1$$



由于，相位中存在x_1,y_1平方项，所以，一般情况下积分仍然困难。

我们发现当z_1足够大时，即$(x_1^2+y_1^2)/(2z_1)<<\lambda$时，可忽略。即：

$$r\approx z_1+(x^2+y^2)/(2z_1)-(xx_1+yy_1)/z_1$$

该近似也被称为——夫琅禾费近似

因此，基尔霍夫公式可化为：

$$E(x,y)=\frac{\exp(ikz_1)}{i\lambda z_1}\exp\left[\frac{ik}{2z_1}(x^2+y^2)\right]\int\int_{-\infty}^{+\infty}E(x_1,y_1)\exp\left[-i2\pi\left(\frac{xx_1}{\lambda z_1}+\frac{yy_1}{\lambda z_1}\right)\right]dx_1dy_1$$

夫琅和费衍射公式

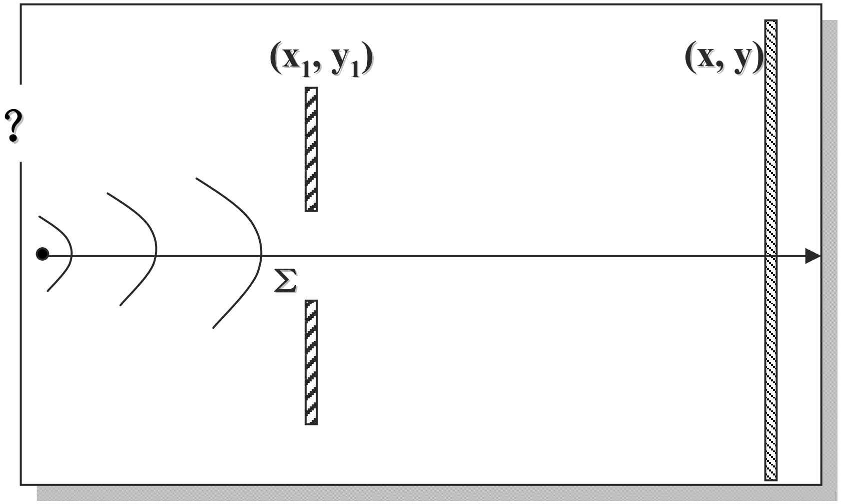
4-3

- 例题：不透明圆孔的直径2cm，波长600nm平行光垂直照射，试估算菲涅耳和夫琅和费衍射区起点到圆孔的距离。

4-4 近距离上的夫琅和费衍射(5.4, 5.6)

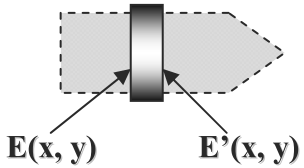
问题：夫琅和费衍射的条件？

有没有近距离就可以得到夫琅和费衍射的方法？



方便起见，引入：

复振幅透过率函数——$t(x, y)$



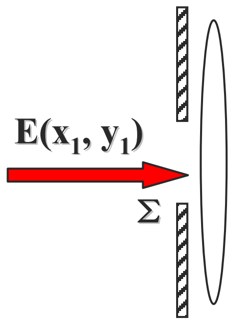
$$t(x, y) = \frac{E'(x, y)}{E(x, y)}$$

对于薄透镜，

$$t_l(x, y) = \exp\left(\frac{-ik(x^2 + y^2)}{2f}\right)$$

课下自行推导。提示：用到类似于菲涅尔近似条件

因此，对于光阑+薄透镜，



$$E'(x_1, y_1) = E(x_1, y_1)\cdot t(x_1, y_1)\cdot t_l(x_1, y_1)$$
$$= E(x_1, y_1)\cdot t(x_1, y_1)\cdot \exp\left(\frac{-ik(x_1^2 + y_1^2)}{2f}\right)$$

4-4

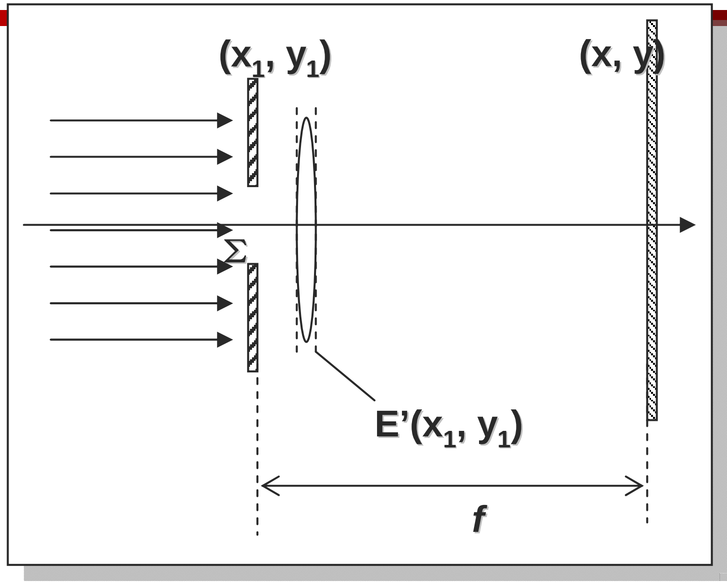
情况1：平面波垂直照明孔径+透镜

求（x，y）平面的场分布，利用菲涅尔衍射公式：

$$E(x,y)=\frac{\exp(ikf)}{i\lambda f}\int\int_{-\infty}^{+\infty}E'(x_1,y_1)\exp\left\{\frac{ik}{2f}\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]\right\}dx_1dy_1$$

代入E’(x1, y1)

$$\boxed{\begin{aligned}E(x,y)&=C\int\int_{-\infty}^{+\infty}t(x_1,y_1)\exp\left[-\frac{ik}{f}(xx_1+yy_1)\right]dx_1dy_1\\ C&=\frac{A\exp(ikf)}{i\lambda f}\exp\left[\frac{ik}{2f}(x^2+y^2)\right]\end{aligned}}$$



该式即为：夫琅和费衍射公式

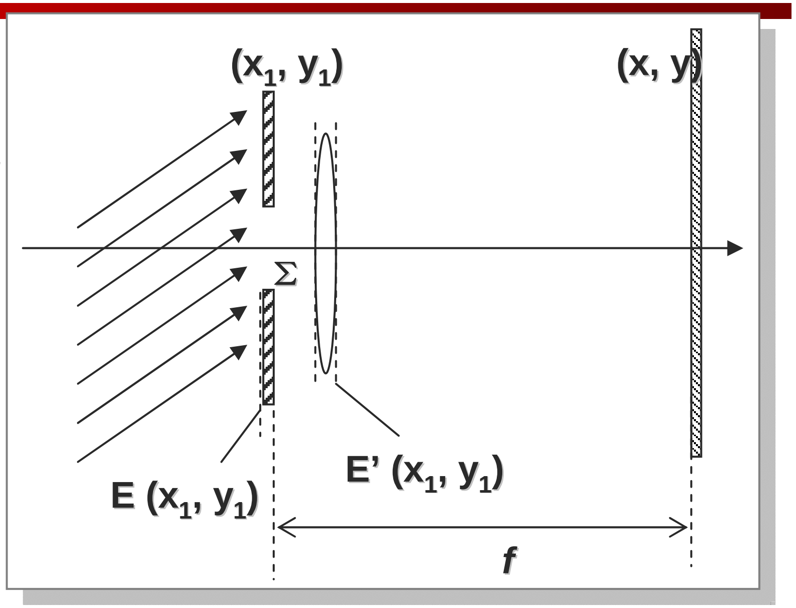
说明：情况1的透镜后焦面上的光场为夫琅禾费衍射分布

4-4

情况2：平面波倾斜照明孔径+透镜

求（x，y）平面的场分布，利用菲涅尔衍射公式

$$E(x,y)=\frac{\exp(ik\,f)}{i\lambda f}\int\int_{-\infty}^{+\infty}E'(x_1,y_1)\exp\left\{\frac{ik}{2f}\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]\right\}dx_1dy_1$$



设波矢k的方向角为(α ， β ， γ)

$$E(x_1,y_1)=A\cdot\exp\left[\frac{i2\pi(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta)}{\lambda}\right]$$

又因为，$E'(x_1,y_1)=E(x_1,y_1)\cdot t(x_1,y_1)\cdot t_l(x_1,y_1)$

代入E'(x1, y1)

$$E(x,y)=C\int\int_{-\infty}^{+\infty}t(x_1,y_1)\exp\left\{-\frac{ik}{f}\left[(x-f\cos\alpha)x_1+(y-f\cos\beta)y_1\right]\right\}dx_1dy_1$$

$$C=\frac{A\exp(ikf)}{i\lambda f}\exp\left[\frac{ik}{2f}(x^2+y^2)\right]$$

该式即为：夫琅和费衍射公式，只是中心位置移到（f*cos α ， f*cos β ）

说明：情况2的透镜后焦面上的光场为夫琅禾费衍射分布

4-4

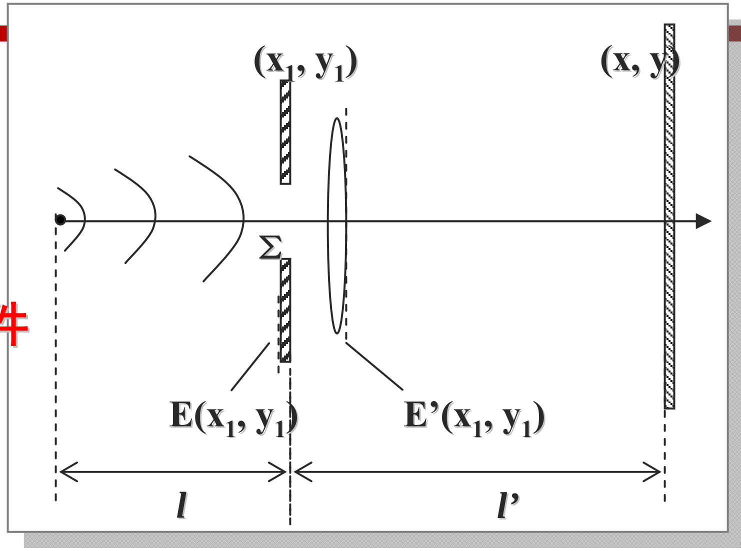
情况3. 球面波照明孔径+透镜

求像平面的场分布，仍然利用菲涅尔衍射公式

$$E(x_1,y_1)=A\cdot\exp\left[\frac{ik(x_1^2+y_1^2)}{2l}\right]$$ 用到菲涅尔近似条件

$$E'(x_1,y_1)=E(x_1,y_1)\cdot t(x_1,y_1)\cdot t_l(x_1,y_1)$$

代入菲涅尔衍射公式
并利用：成像关系



观察屏上的场分布为：

$$\mathrm{E(x,y)}=C\int\int_{-\infty}^{+\infty}t(\mathrm{x_1,y_1})\exp\left[-\frac{ik}{l'}(xx_1+yy_1)\right]\mathrm{dx_1dy_1}$$

$$C=\frac{A\exp(ikl')}{i\lambda l'}\exp\left[\frac{ik}{2l'}(x^2+y^2)\right]$$

该式即为：夫琅和费衍射公式

说明：情况3的成像平面上的光场为夫琅禾费衍射分布

总之：
- 加入透镜可以将远处夫琅和费衍射转移到近处；
- 这个衍射由孔径产生；
- 衍射平面与光源位置满足成像关系。

4-4

夫琅和费衍射公式的意义

◆ 惠更斯-菲涅尔原理的体现

$$E(x,y)=\frac{A'}{i\lambda f}\exp\left[ik\left(f+\frac{x^2+y^2}{2f}\right)\right]\cdot\iint_{\Sigma}E(x_1,y_1)\exp\left[-i\frac{k}{f}\left(xx_1+yy_1\right)\right]dx_1dy_1$$

孔径面坐标原点C到P点的相位延迟

点Q与C的子波到达P点的**相位差**

◆ 数学上，如果不考虑积分外指数幂项，上式就是孔径面上复振幅**E(x_1, y_1)的傅立叶变换**.

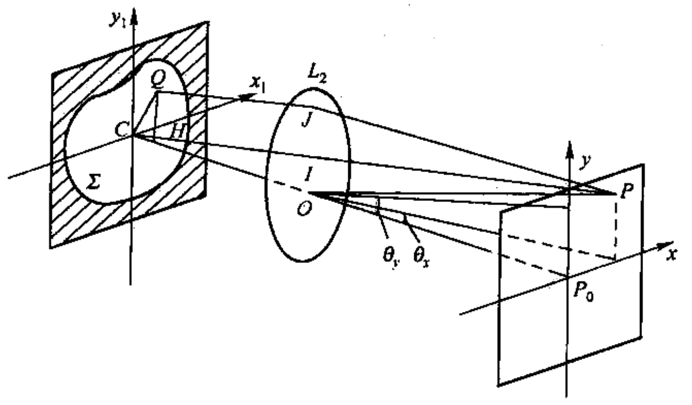


图 5.10 夫琅禾费衍射光路

4-5 典型孔径的夫琅和费衍射(5.4, 5.5, 5.6)

矩孔衍射 Fraunhofer diffraction — rectangular aperture

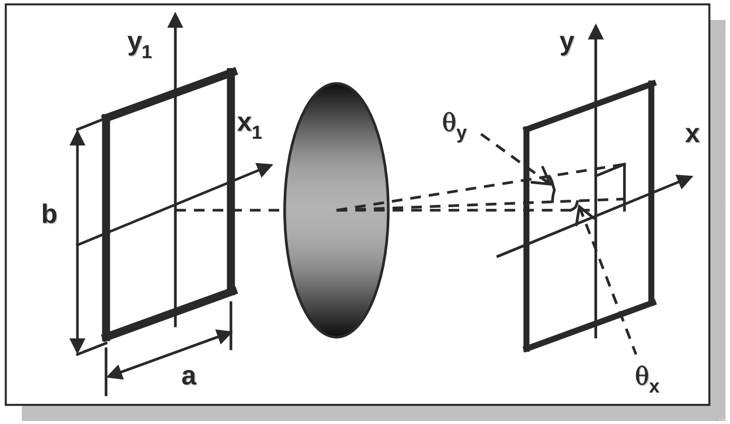
$$E = C' \exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2f}\right]\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\exp\left[-ik\left(lx_1+wy_1\right)\right]dx_1dy_1$$

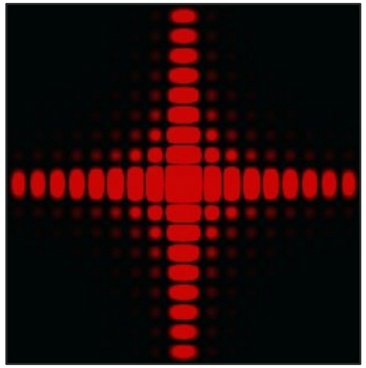
$$= C' \exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2f}\right]\frac{\sin\left(\frac{kla}{2}\right)}{\frac{kla}{2}}\frac{\sin\left(\frac{kwb}{2}\right)}{\frac{kwb}{2}}$$

式中： $C' = \dfrac{CA'}{f}\exp(ikf),\ l = x/f,\ w = y/f$

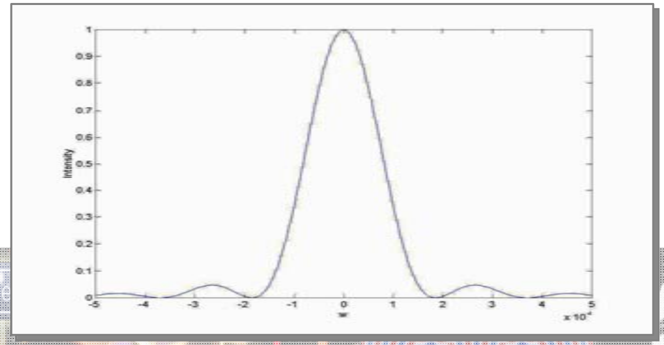
$$I = E\cdot E^* = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2, \qquad \alpha = kla/2, \quad \beta = kwb/2$$

I_0 : P_0点的强度





夫琅和费矩孔衍射条纹



夫琅和费矩孔衍射x方向光强剖面

4-5

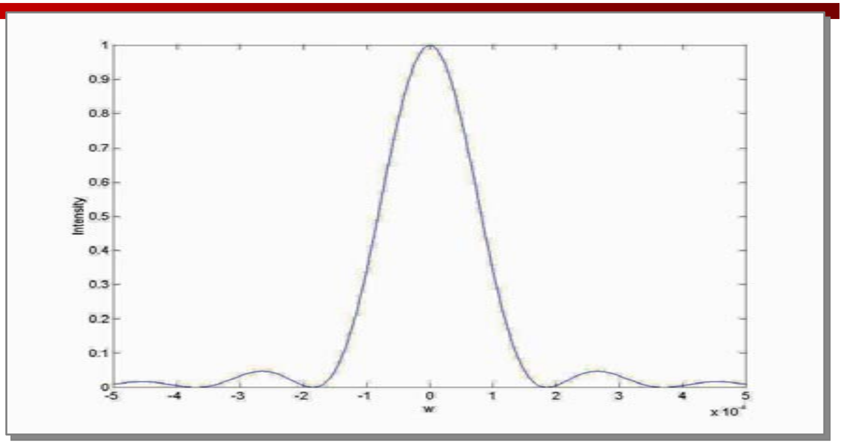
X轴上的光强分布

由，$I=I_0(\sin\alpha/\alpha)^2$，得：

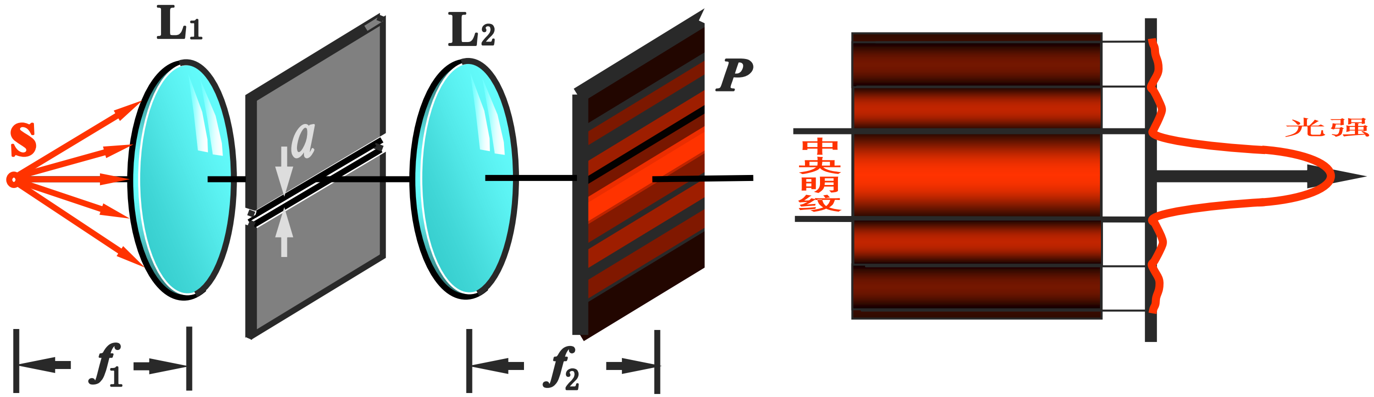
暗点位置：$a(x/f)=n\lambda$

次极大位置：$d(\sin\alpha/\alpha)2/d\alpha=0\rightarrow tg\alpha=\alpha$

中央亮斑在：　$x_0=\pm\lambda f/a$，　$y_0=\pm\lambda f/b$以内

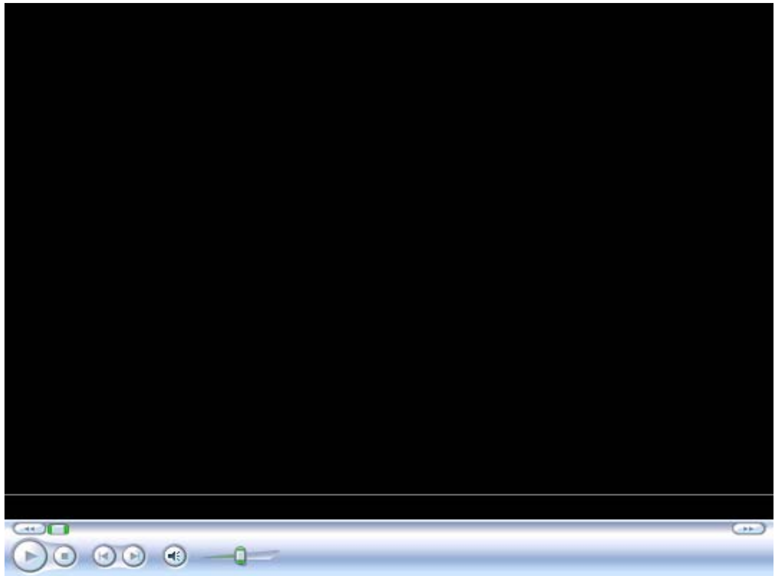


矩孔衍射特例：单缝衍射（Fraunhofer diffraction — single slit）

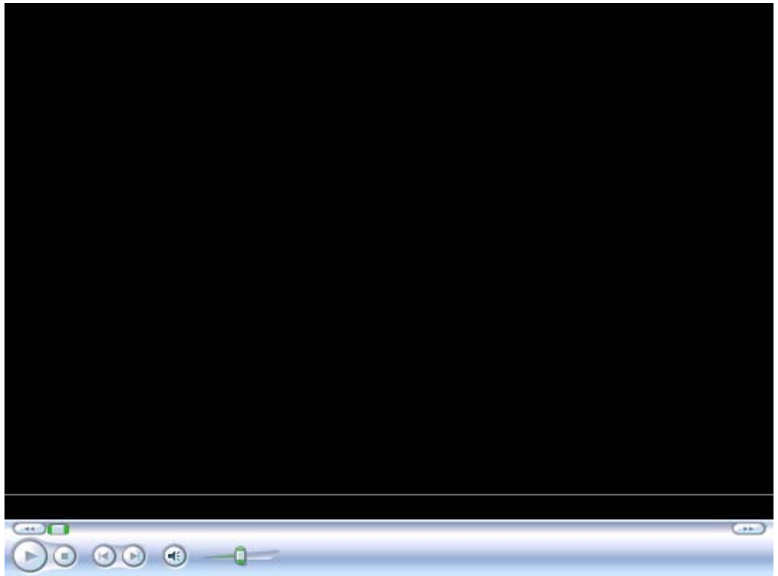


4-5

视频展示：Fraunhofer diffraction — adjustable slit

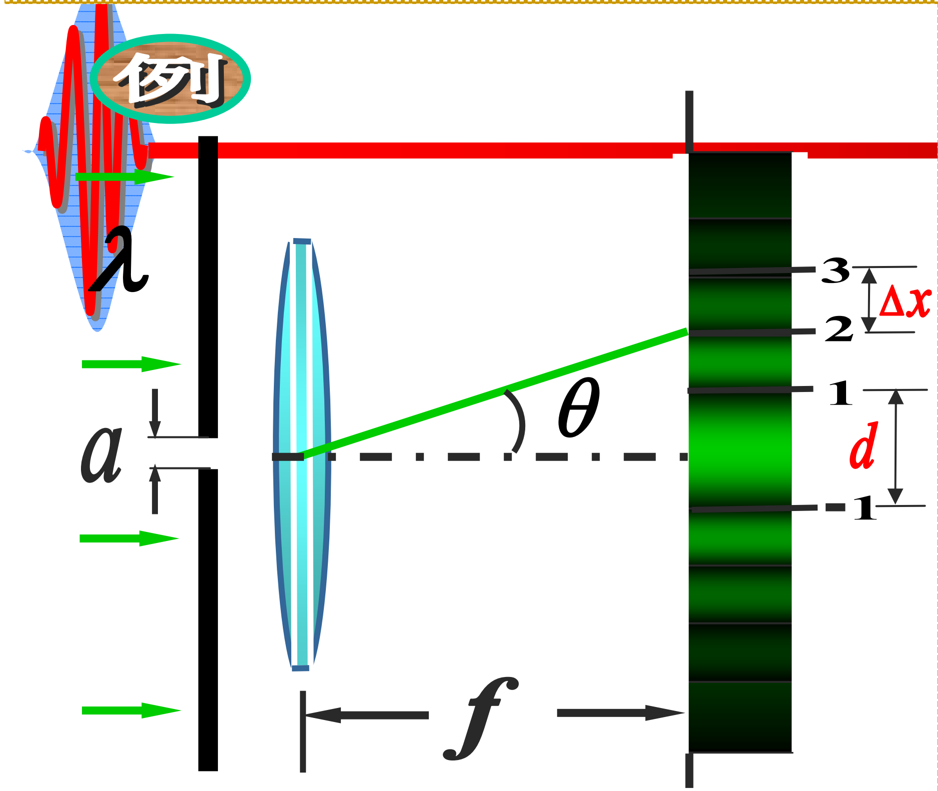


视频展示：Fraunhofer diffraction — rectangular aperture



13:12

例



已知 $\lambda = 546$ nm

$a = 0.437$ mm, $f = 40$ cm

求 中央明纹宽 d

2级暗纹至3级暗纹的间距 Δx

解法提要 对 1，2，3 级暗纹有

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$$

$$\sin\theta_2 = 2\frac{\lambda}{a}$$

$$\sin\theta_3 = 3\frac{\lambda}{a}$$

θ 实际很小

$$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$$

$$d = 2f\tan\theta_1 \approx 2f\theta_1 = 2f\frac{\lambda}{a}$$

$$= 1.0 \text{ mm}$$

$$\Delta x = f\tan\theta_3 - f\tan\theta_2$$

$$\approx f(\theta_3 - \theta_2) = f\frac{\lambda}{a}(3-2)$$

$$= f\frac{\lambda}{a} = d/2 = 0.5 \text{ mm}$$

例 白光 → 单缝

λ_x 光的第一级明纹
$\lambda = 650\text{nm}$光的第一级暗纹
相互重合

求 $\lambda_x = ?$

解法提要 单缝衍射

暗纹 $a\sin\theta = \pm k\lambda$ 明纹 $a\sin\theta = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda_x}{2}$

$k=1$ $a\sin\theta = \pm\lambda$ $k=1$ $a\sin\theta = \pm 3\dfrac{\lambda_x}{2}$

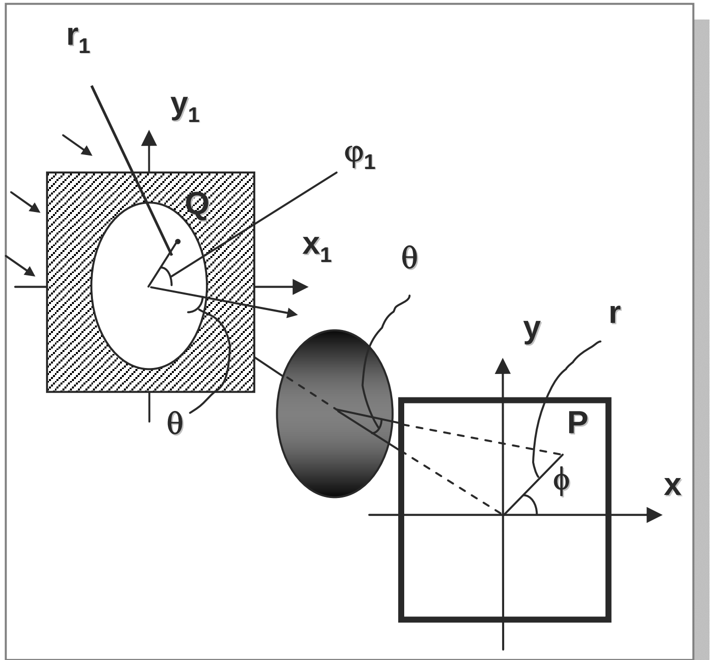
$$\lambda_x = \frac{2}{3}\lambda = \frac{2}{3}\times 650\ \text{nm} = 433\ \text{nm}$$

4-5

圆孔衍射　Fraunhofer diffraction — circular apertures

在极坐标下，夫琅禾费衍射公式如下：

$$E(P)=C'\int_0^a\int_0^{2\pi}\exp[-ikr_1\theta\cos(\psi_1-\psi)]r_1dr_1d\psi_1$$



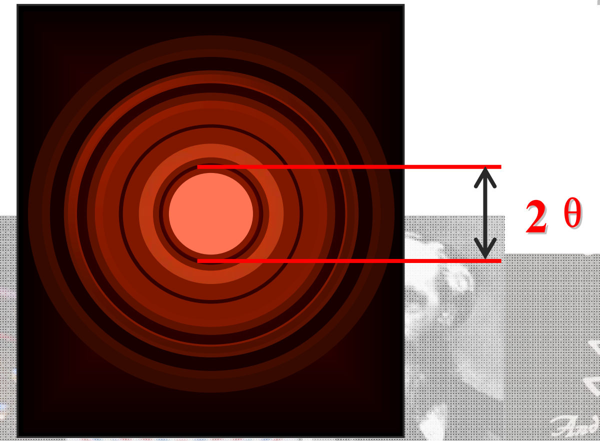
具体求解过程见P140-141页，最终结果为：

$$E(P)=\pi a^2C'\frac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta}$$

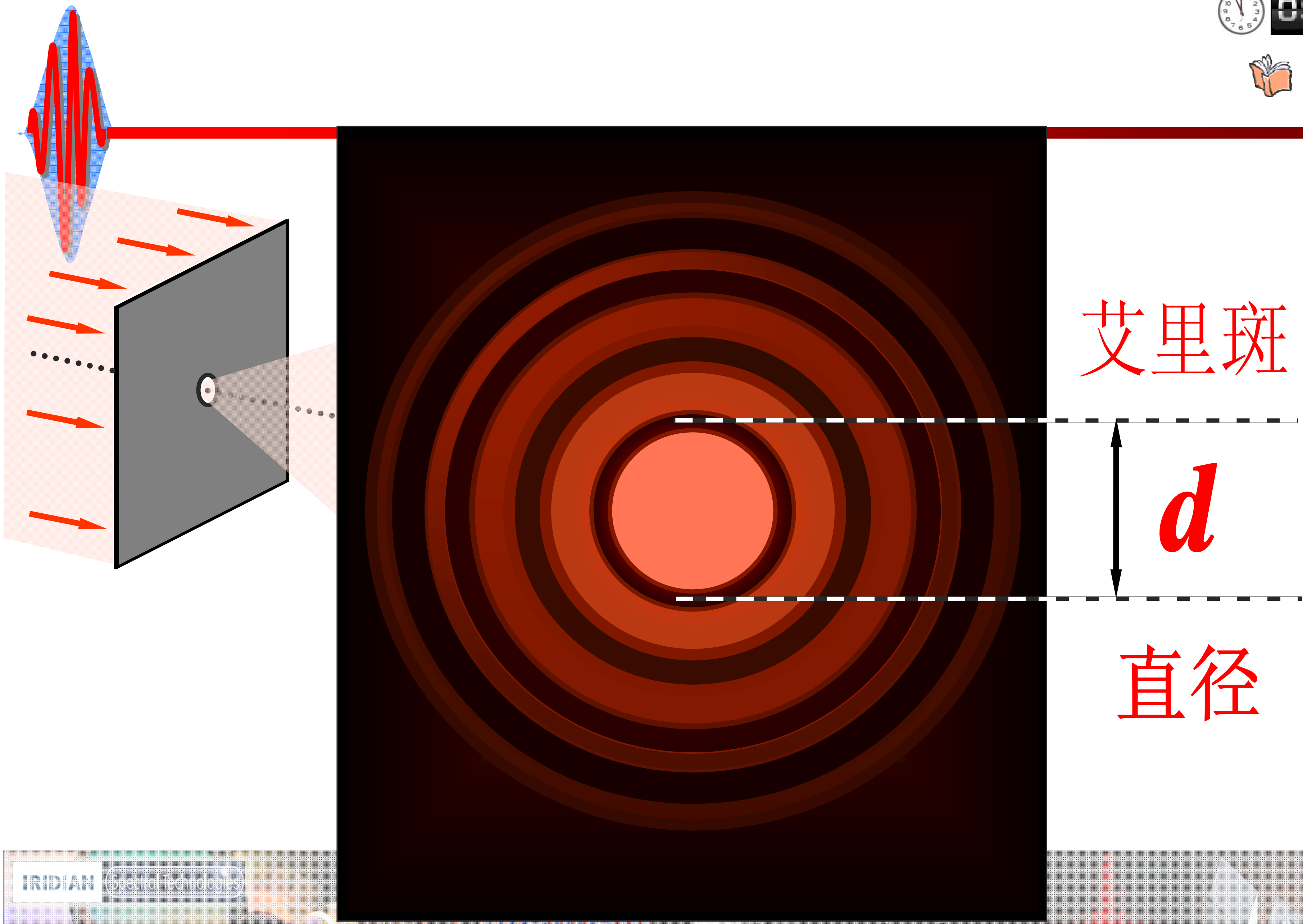
其中：J_1（ka θ ）为一阶贝塞尔函数

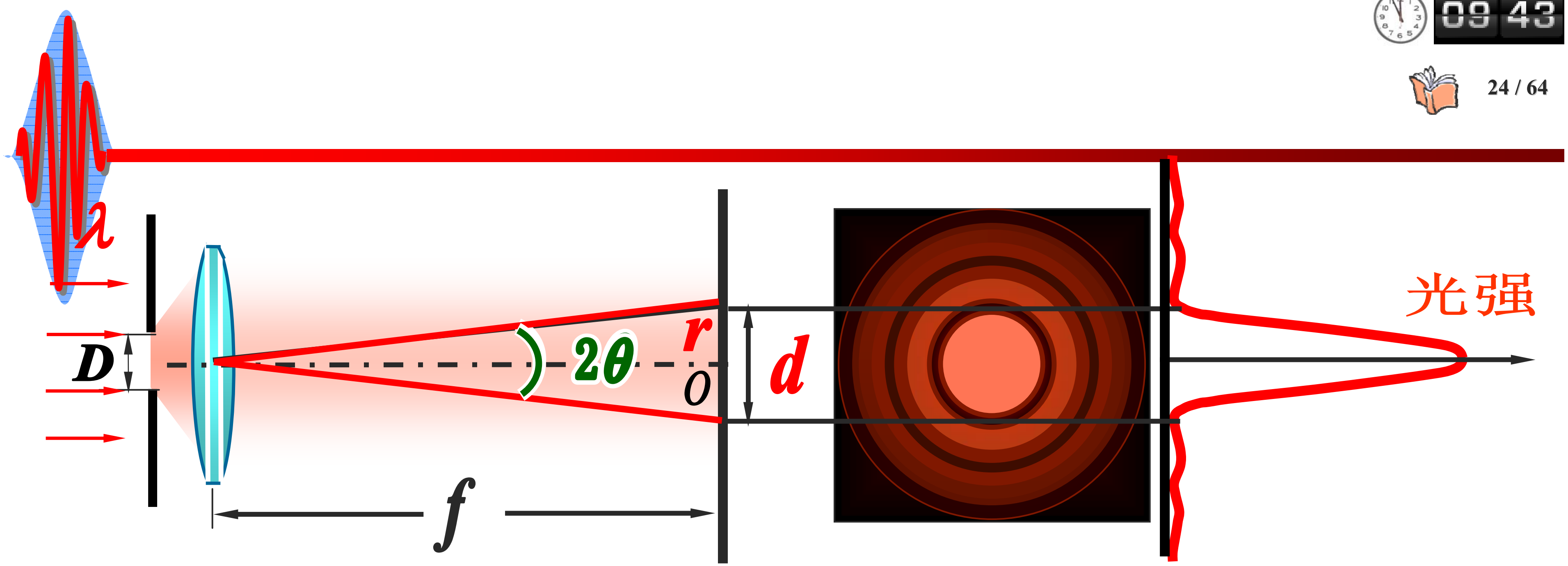
所以，

$$\boxed{I=I_0\left[\frac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta}\right]^2}$$



第一暗环衍射角应满足：
ka θ =1.22 π


艾里斑
d
直径



圆孔半径 a 直径 D 艾里斑半径 r 直径 d

$$\sin\theta = 0.61\frac{\lambda}{a} = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

θ 实际很小

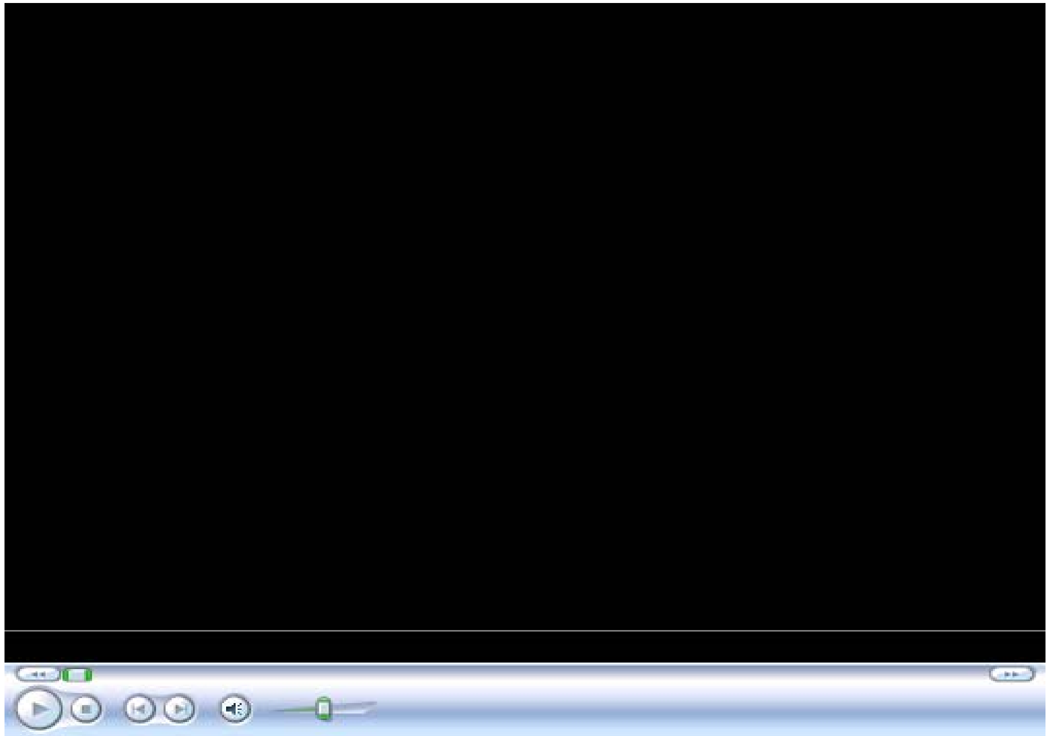
艾里斑直径 d 与圆孔直径 D 的关系式

$$2\theta \approx \frac{d}{f} = 2.44\frac{\lambda}{D}$$

艾里斑的角宽取决于比值 λ/D

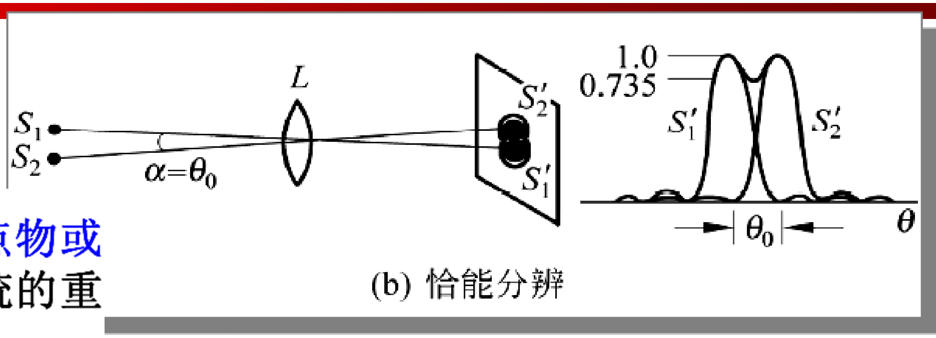
4-5

视频展示：Fraunhofer diffraction — circular apertures



4-5

光学成像系统的分辨本领

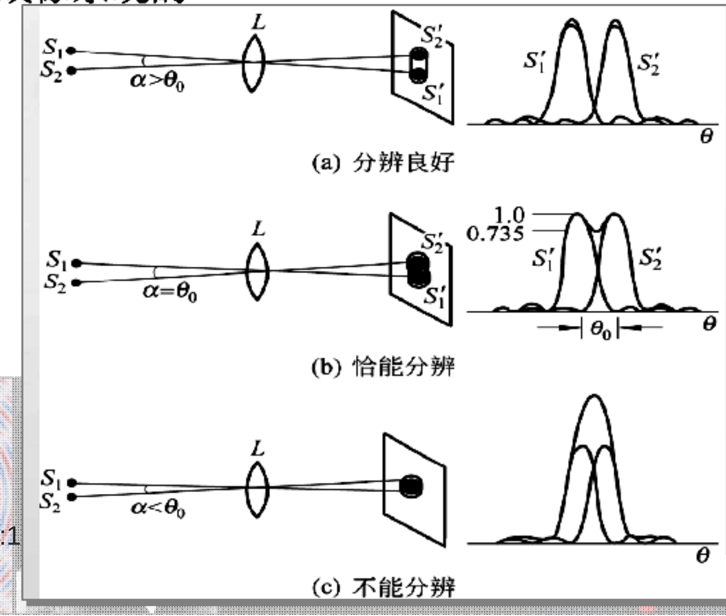


(b) 恰能分辨

分辨本领 光学成像系统能分辨开两个靠近的点物或物体细节的能力，它是光学成像系统的重要指标。

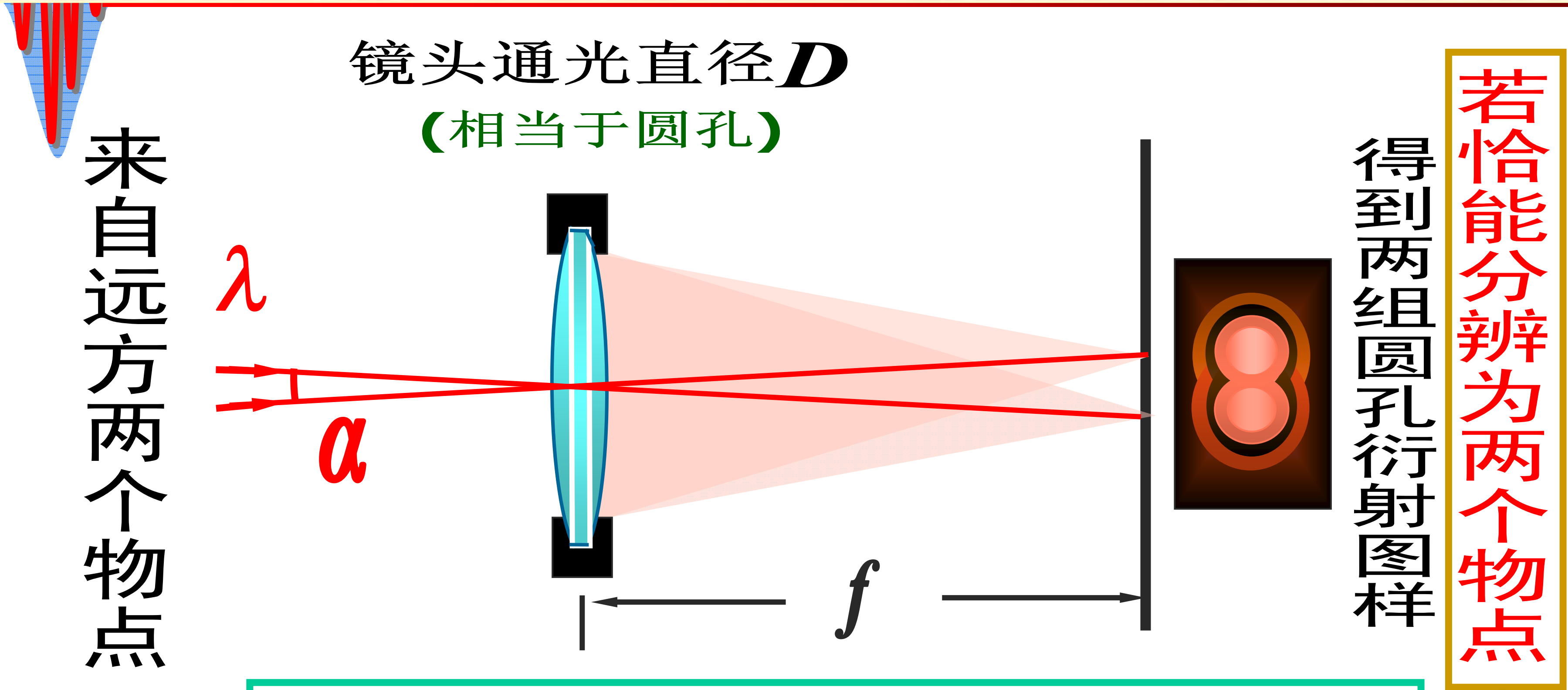
* 由于衍射效应，光学系统的分辨极限决定于系统对点物成像的爱里斑。

瑞利判据 一个点物衍射图样的中央极大与近旁另一个点物衍射图样的第一极小重合，作为光学成像系统的恰能分辨两个点物的极限。



能分辨的两点物间的最小夹角就等于爱里斑对衍射孔的张角半径。

望远镜的分辨本领

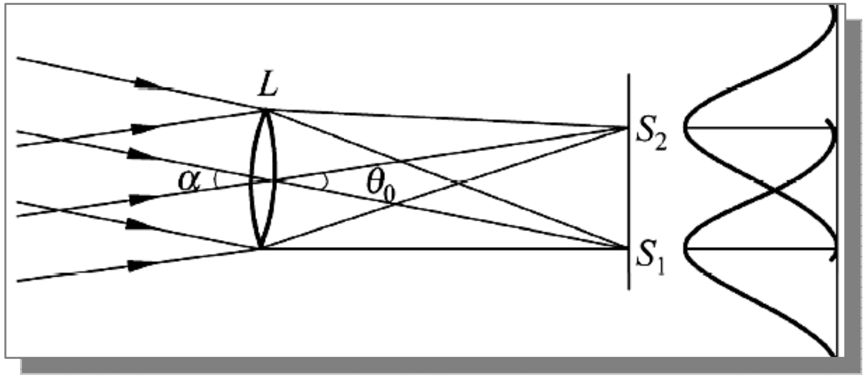


定义张角 α 为光学仪器的 最小分辨角

4-5

望远镜的分辨本领

望远镜的最小分辨角 α，即是爱里斑的角半径。

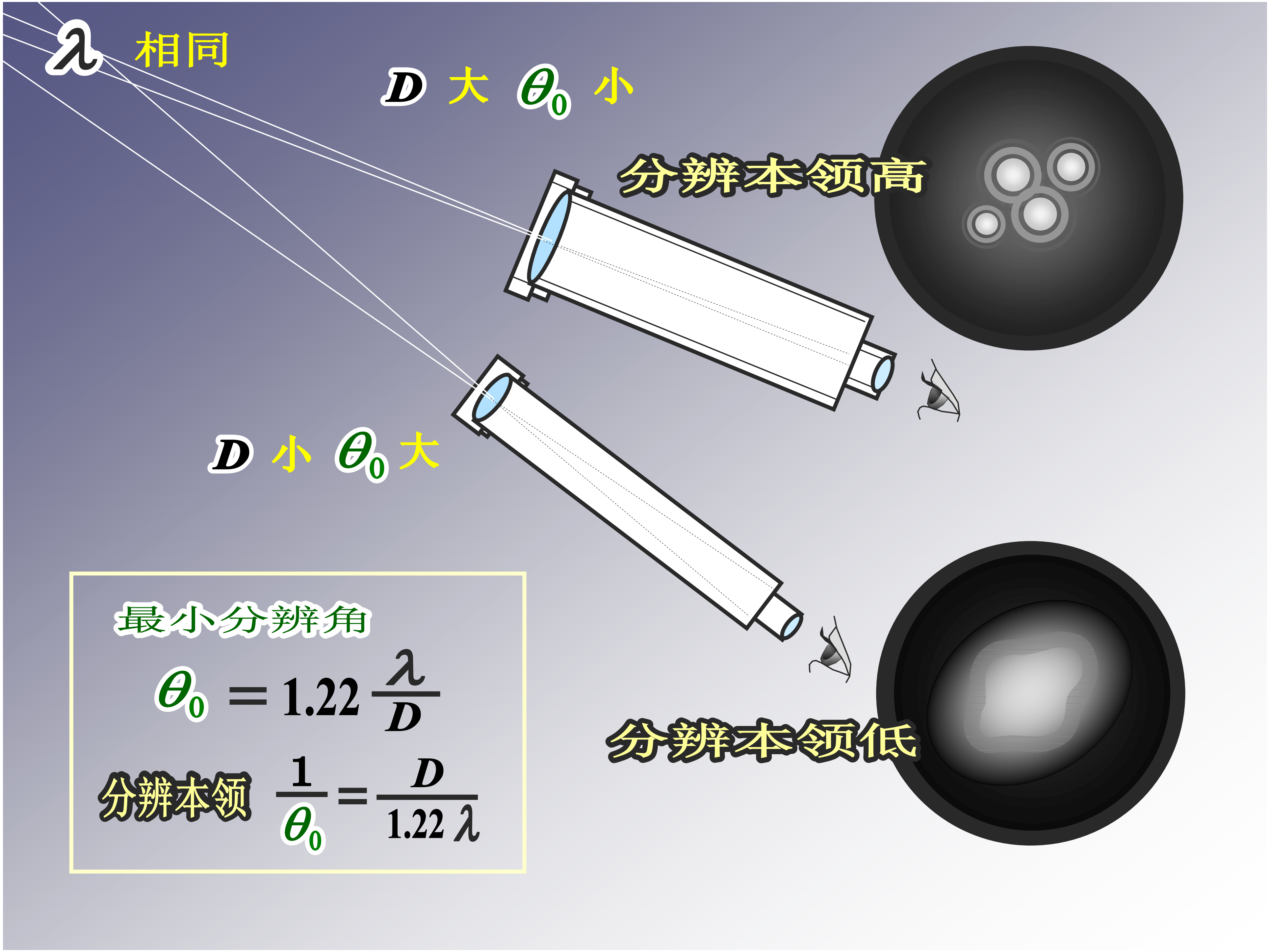


$$\sin\theta = 0.61\frac{\lambda}{a} = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

提高望远镜分辨本领的两条基本途径是

※ 加大成像系统的通光孔径

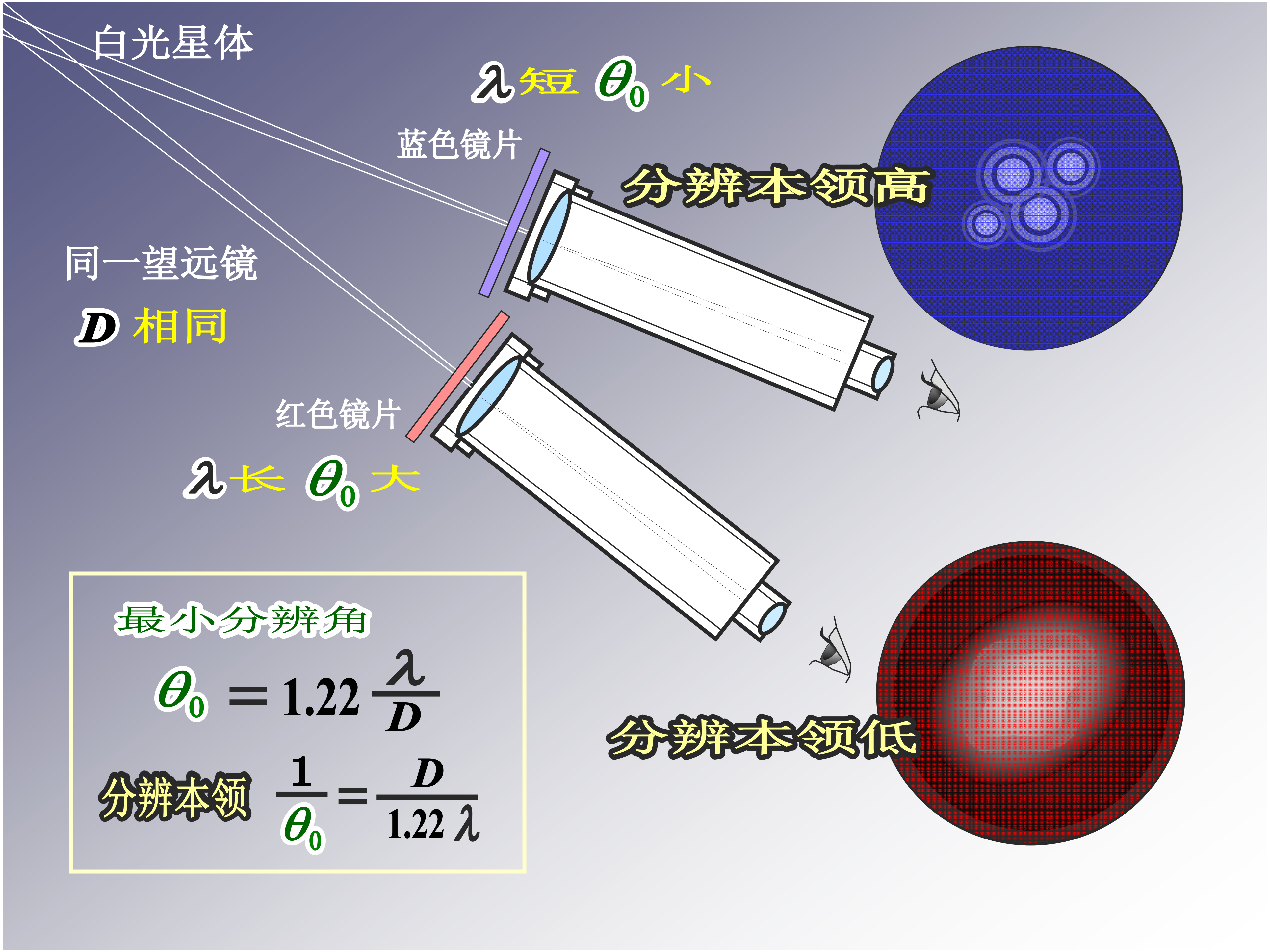
※ 采用较短的工作波长



最小分辨角

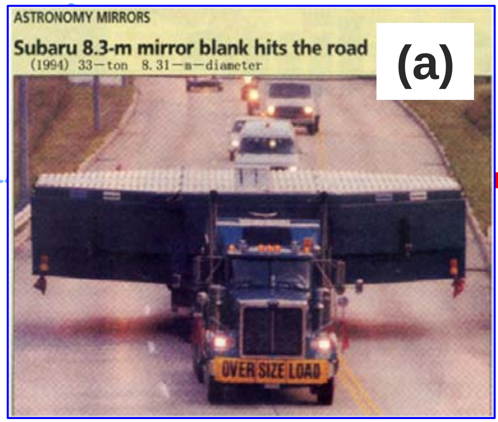
$$\theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

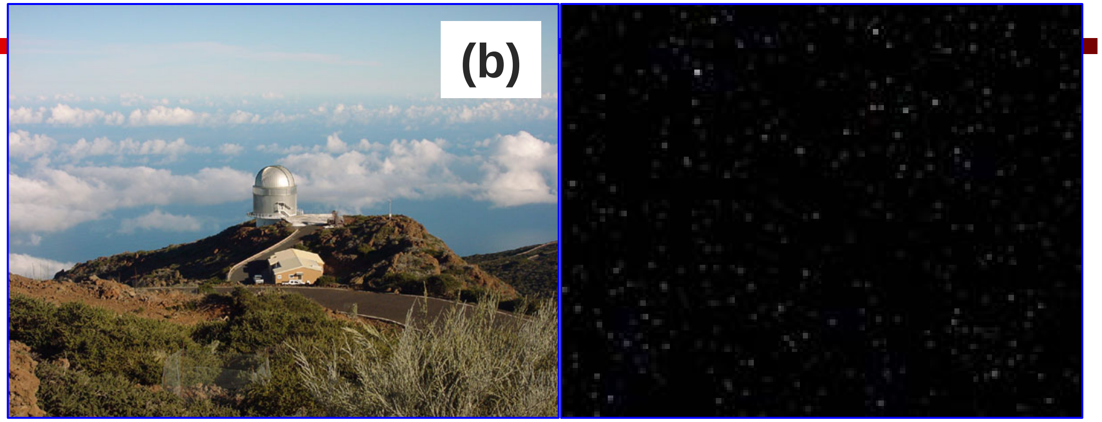
分辨本领 $\dfrac{1}{\theta_0} = \dfrac{D}{1.22\lambda}$



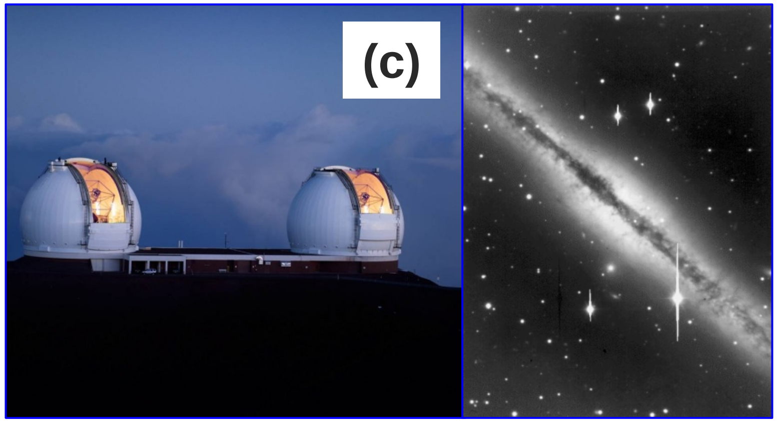
白光星体
同一望远镜
D 相同
蓝色镜片
λ 短 θ_0 小
分辨本领高
红色镜片
λ 长 θ_0 大
分辨本领低
最小分辨角
$\theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{D}$
分辨本领 $\frac{1}{\theta_0} = \frac{D}{1.22\lambda}$

4-5



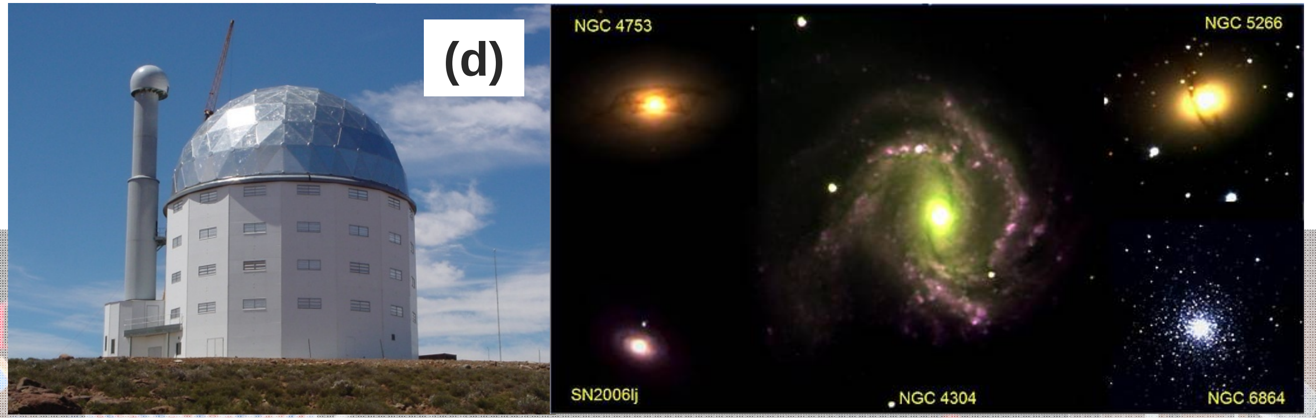


Gran Telescopio CANARIAS: First
Location: La Palma, Canary Islands, Spain;
Aperture (meters) : 10.4 m



twin Keck Telescopes: Second
Location: Mauna Kea, Hawaii, USA;
Aperture (meters) :10.0 m

Southern African Large Telescope: Third
Location:South African Astronomical Observatory;
Aperture (meters) : ~10.0 m



4-5

照相物镜的分辨本领

底片上每 **mm** 内恰能分开的线条数 N

(i) 底片都在物镜后焦面附近

(ii) 底片上恰能分辨的两条直线之间的距离

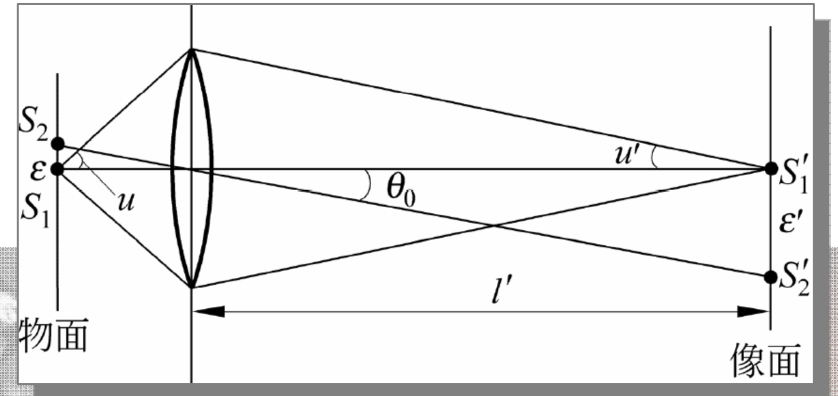
$$\theta_0 = 1.22\ \lambda/\mathrm{D} \quad \rightarrow \varepsilon' = f\theta_0 = 1.22\ f\lambda/D$$

$$N = \frac{1}{\varepsilon'} = \frac{1}{1.22\lambda}\cdot\frac{D}{f}$$

其中： D / f … 相 对 孔 径

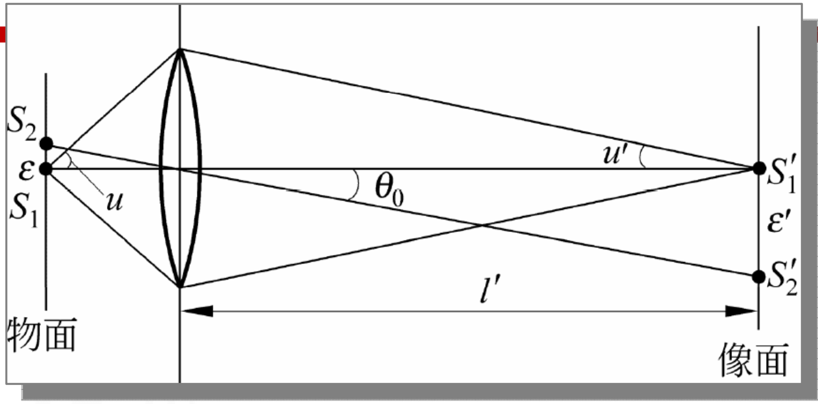
显微镜的分辨本领

能分辨的两点物间的最小距离 ε



4-5

显微镜的分辨本领



$$\varepsilon' = L'\theta_0 = 1.22 L'\lambda / D \quad \text{(a)}$$

$$n\varepsilon \sin u = n'\varepsilon' \sin u' \quad \text{(b)}$$

阿贝正弦条件

$$n' = 1,\ \sin u' \approx u' \approx \frac{D/2}{L'} = \frac{D}{2L'} \quad \cdots \text{(c)}$$

n、n' 物、像方折射率

由(a)、(b)、(c)三式，得

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' \sin u'}{n \sin u} = \frac{1.22 L'\lambda}{D} \cdot \frac{D/2L'}{n \sin u} = \frac{0.61\lambda}{n \sin u} = \frac{0.61\lambda}{NA}$$

其中： $NA = n \sin u$

Numerical Aperture 数值孔径

提高显微镜分辨本领的途径

* 减小波长 — 电子显微镜

* 增大NA — 提高物方折射率(油浸显微镜)

减小焦距,增大孔径角

例 已知

某照相机

物镜直径 $D = 5.0\ \text{cm}$

焦 距 $f = 17.5\ \text{cm}$

对 $\lambda = 550\ \text{nm}$ 的光

求

- 最小分辨角
- 在焦面上每毫米能分辨多少条线?

解法提要

- 最小分辨角

$$\theta_0 = 1.22\,\frac{\lambda}{D}$$

$$= 1.342 \times 10^{-5}\ \text{rad}$$

- 在焦面上最小距离

$$\Delta l = \theta_0 f$$

$$= 2.349 \times 10^{-3}\ \text{mm}$$

每毫米能分辨的线数

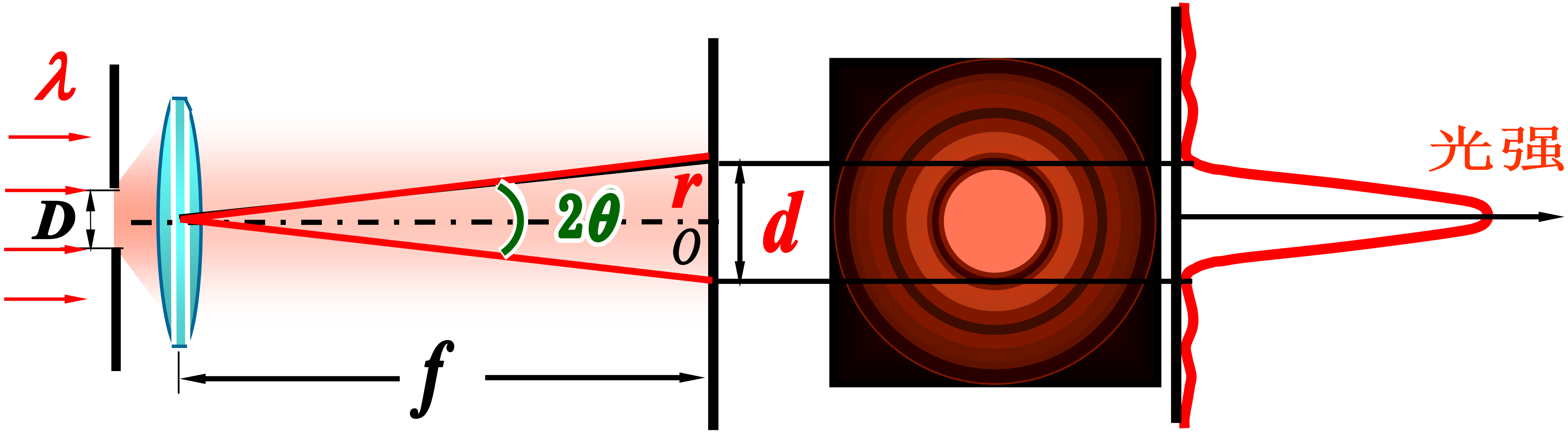
$$N = \frac{1}{\Delta l} = 425.8\ \text{mm}^{-1}$$

4-5

夫琅和费衍射的性质

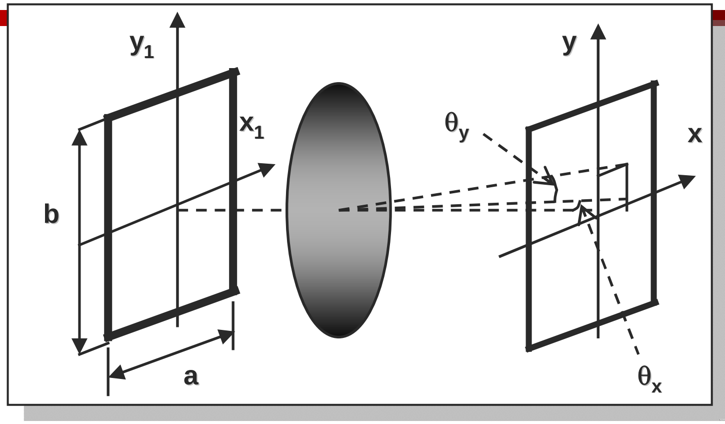
1. 波面越受限制，衍射效果越明显；
2. 波长越长，衍射效果越明显；

$$\sin\theta = 0.61\frac{\lambda}{R} = 1.22\frac{\lambda}{D}$$



夫琅和费衍射的性质

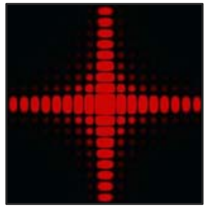
3. 孔径在原所在面内移动，衍射光强不变；



矩孔中心点在（0,0）位置：

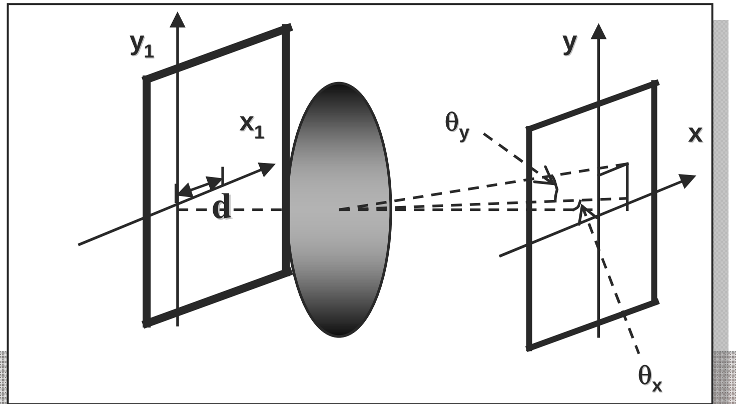
$$E = C' \exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2f}\right]\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\exp\left[-ik\left(lx_1+wy_1\right)\right]dx_1dy_1$$

$$= C' \exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2f}\right]\frac{\sin\left(\frac{kla}{2}\right)}{\frac{kla}{2}}\frac{\sin\left(\frac{kwb}{2}\right)}{\frac{kwb}{2}}$$



式中： $C' = \frac{CA'}{f}\exp(ikf)$

矩孔中心点在（d,0）位置：



$$E = C' \exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2f}\right]\int_{d-a/2}^{d+a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\exp\left[-ik\left(lx_1+wy_1\right)\right]dx_1dy_1$$

$$= C' \exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2f}\right]\frac{\sin\left(\frac{kla}{2}\right)}{\frac{kla}{2}}\frac{\sin\left(\frac{kwb}{2}\right)}{\frac{kwb}{2}}\bullet \underline{e^{-ikld}}$$

对比两个光场的值，它们仅差一个相位因子，因此衍射光强的分布不变。

4-5

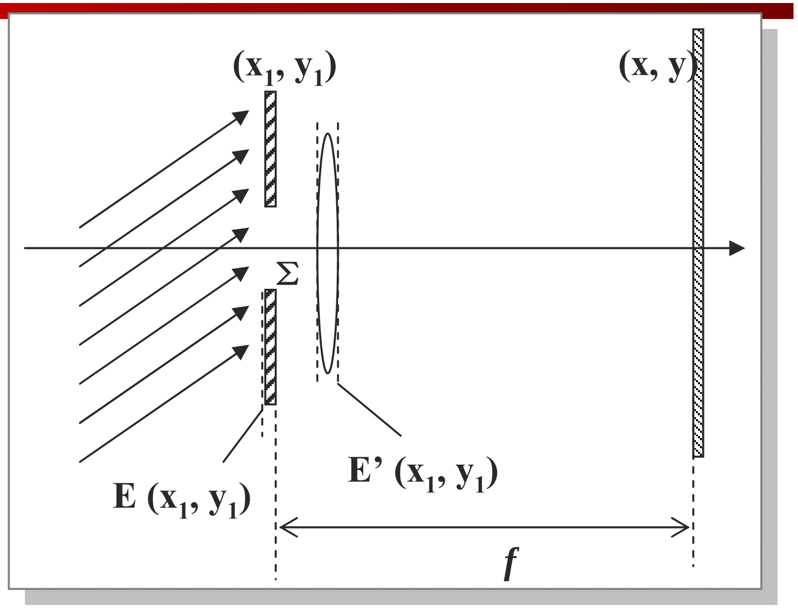
夫琅和费衍射的性质

4. 光源的**倾斜**引起衍射图样的**移动**；

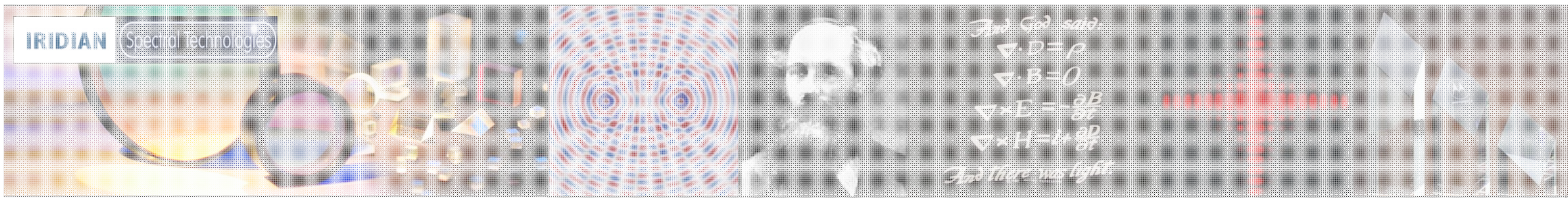
后焦面的场分布为：

$$E(x,y)=C\int\int_{-\infty}^{+\infty}t(x_1,y_1)\exp\left\{-\frac{ik}{f}\left[(x-f\cos\alpha)x_1+(y-f\cos\beta)y_1\right]\right\}dx_1dy_1$$

$$C=\frac{A\exp(ikf)}{i\lambda f}\exp\left[\frac{ik}{2f}(x^2+y^2)\right]$$



衍射图样没有发生变化，仅是中心点发生了平移，由垂直入射时的（0,0）点，平移到(f*cos α , f*cos β ,)。



4-5

夫琅和费衍射的性质

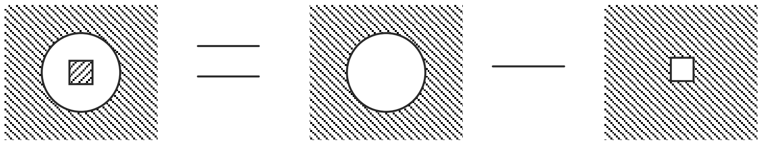
5. 衍射屏的**分解**。

假设N个子孔径Σi在面内**不重叠**的排列构成孔径Σ， $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+...+\Sigma_n$

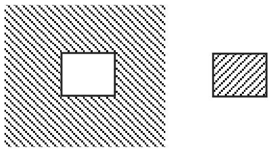
Σi上的场分布为Ei，则总的夫琅禾费衍射场分布可由下式得：

$$C\iint_{\Sigma} E\exp(...)\,d\xi d\eta = C\iint_{\Sigma_1} E_1\exp(...)\,d\xi d\eta + C\iint_{\Sigma_2} E_2\exp(...)\,d\xi d\eta + ... + C\iint_{\Sigma_n} E_n\exp(...)\,d\xi d\eta$$

例如：



巴比涅原理：两个互补屏（即：E1+E2=1），它们各自的夫琅和费衍射，除了中心点外，处处光强相等。



$$C\iint_{\Sigma_1} E_1\exp(...)\,d\xi d\eta + C\iint_{\Sigma_2} E_2\exp(...)\,d\xi d\eta = \begin{cases} \neq 0, & （0,0）点 \\ 0, & 非（0,0）点 \end{cases}$$

除中心点外，

$$E_1' = -E_2' \Rightarrow I_1 = I_2$$

作业：4.9、4.10、4.12、4.13、4.18

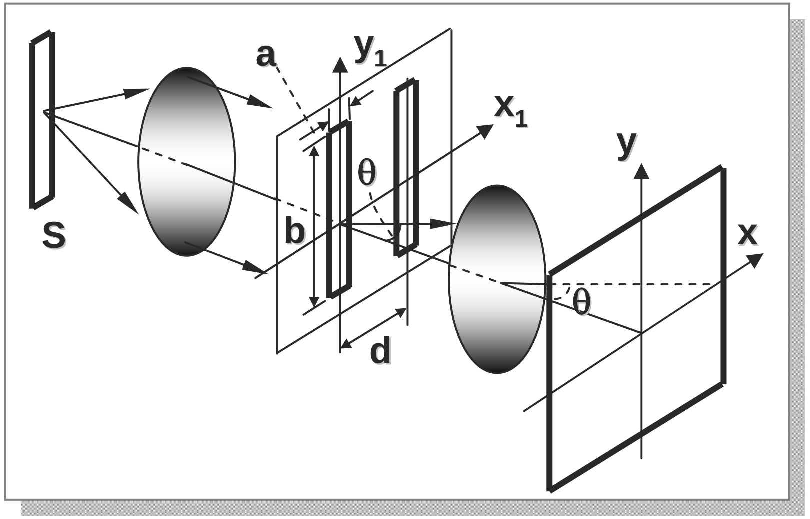
4-6 光栅的夫琅和费衍射（5.7，5.8，5.9）

双缝夫琅和费衍射 (Fraunhofer diffraction — two slits)

$$E(P) = C'\int_{-a/2}^{a/2}\exp(-iklx_1)dx_1\int_{-b/2}^{b/2}\exp(-ikwy_1)dy_1$$

$$+\,C'\int_{d-a/2}^{d+a/2}\exp(-iklx_1)dx_1\int_{-b/2}^{b/2}\exp(-ikwy_1)dy_1$$

$$= C'ab\,\frac{\sin(kla/2)}{kla/2}\,\frac{\sin(kwb/2)}{kwb/2}\left[1+\exp(-ikld)\right]$$



只需考虑x轴上点，sin(kwb/2)/(kwb/2)＝1

$$E(P) = C'ab\,\frac{\sin(kla/2)}{kla/2}\left[1+\exp(-ikld)\right]$$

因此，光强分布为：

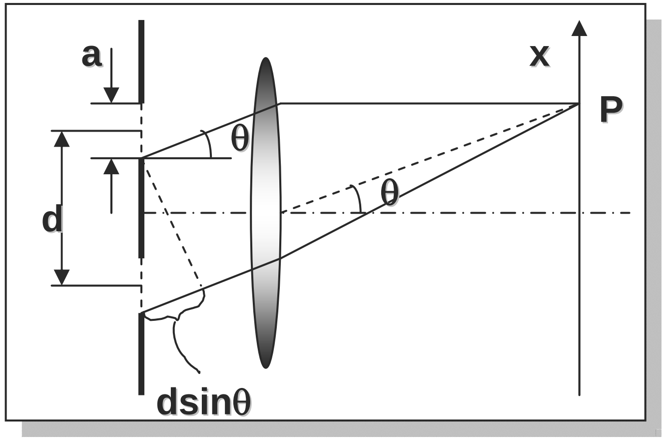
$$\boxed{I(P) = 4I_0(\sin\alpha/\alpha)^2\cos^2(\delta/2)}$$

其中，$kla/2=\alpha$，$I_0=(ab)^2|C'|^2$，$\delta = kld = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$

4-6

讨论:

$$I(P)=4I_0(\sin\alpha/\alpha)^2\cos^2(\delta/2)$$



光强包含两个因子：

- 单缝衍射因子$(\sin\alpha/\alpha)^2$
- 双缝干涉因子$\cos^2(\delta/2)$

  $\delta=kd\sin\theta$是来自对应两光束的位相差.

对**干涉因子**

极大：$\delta=2m\pi$ 或 $d\sin\theta=m\lambda$

极小： $\delta=2(m+1/2)\pi$ 或 $d\sin\theta=(m+1/2)\lambda$

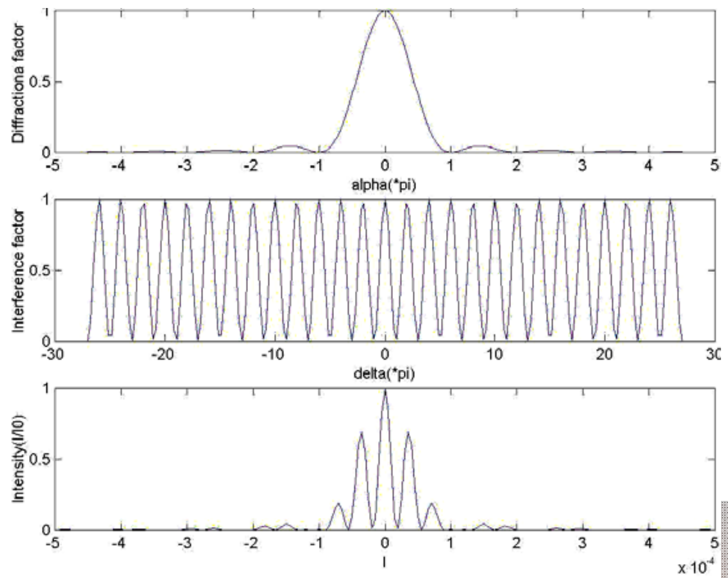
对**衍射因子**

极大：$\theta=0$

极小：$a\sin\theta=n\lambda$

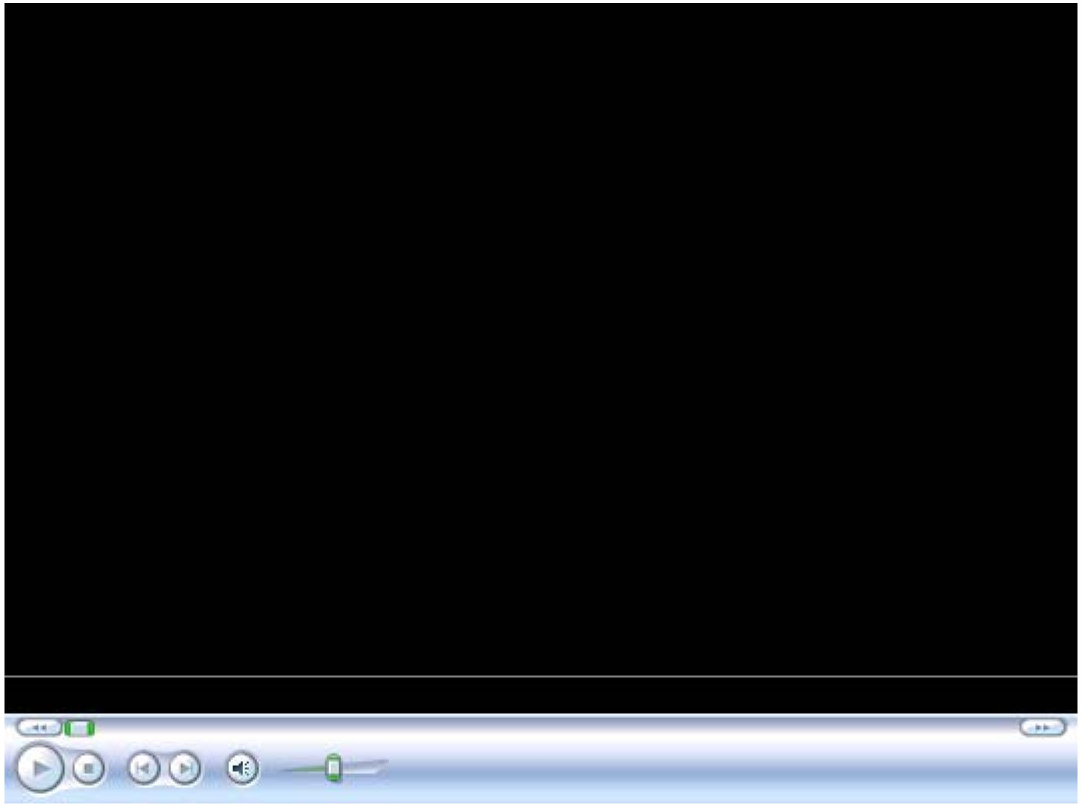
缺级：干涉极大与衍射极小**重叠**

$d/a=K$，缺$m=\pm nK$级



4-6

视频展示：Fraunhofer diffraction — two slits

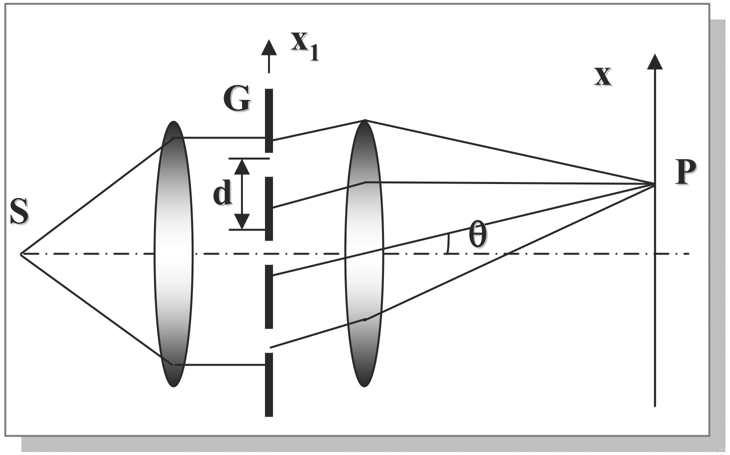


13:12

4-6

多缝夫琅和费衍射　(Fraunhofer diffraction — multiple slits)

- 垂直于图面的线光源S经透镜准直后照明多缝衍射屏G（缝间距为d）



- 求，在另一透镜的后焦面观察衍射图样？

求解：利用上节双缝衍射结论

在x_1方向上两个相距d的等宽狭缝在P点有一相位差：$\delta = \mathrm{kld} = \dfrac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$

单个缝在P点产生的振幅：$|E_s(P)| = |E_0|\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

$|E_0|$为单缝在 P_0点产生的振幅

令，衍射屏第一个缝在P点的复振幅相位为0，那么第1、2、3…缝在P点的复振幅分别为：

$$|E_0|\frac{\sin\alpha}{\alpha}, |E_0|\frac{\sin\alpha}{\alpha}\exp(i\delta), |E_0|\frac{\sin\alpha}{\alpha}\exp(i2\delta)\ldots$$

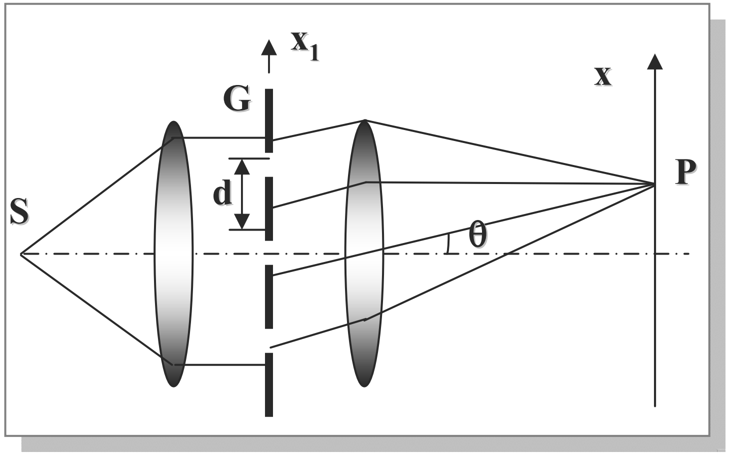
4-6

P点的复振幅之和为：

$$E(P)=|E_0|\frac{\sin\alpha}{\alpha}\{1+\exp(i\delta)+\ldots+\exp[i(N-1)\delta]\}$$

$$=|E_0|\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\exp[i(N-1)\frac{\delta}{2}]$$

$$\boxed{I=I_0\underbrace{\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}_{\text{单缝衍射因子}}\underbrace{\left(\frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2}_{\text{多光束干涉因子}}}$$



讨论:

多光束干涉因子极大值：$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta=2m\pi\rightarrow d\sin\theta=m\lambda$

多光束干涉因子极小值：$\frac{\delta}{2}=(m+\frac{m'}{N})\pi \ldots m=0,\pm1,\pm2\ldots,m'=1,2,\ldots N-1$

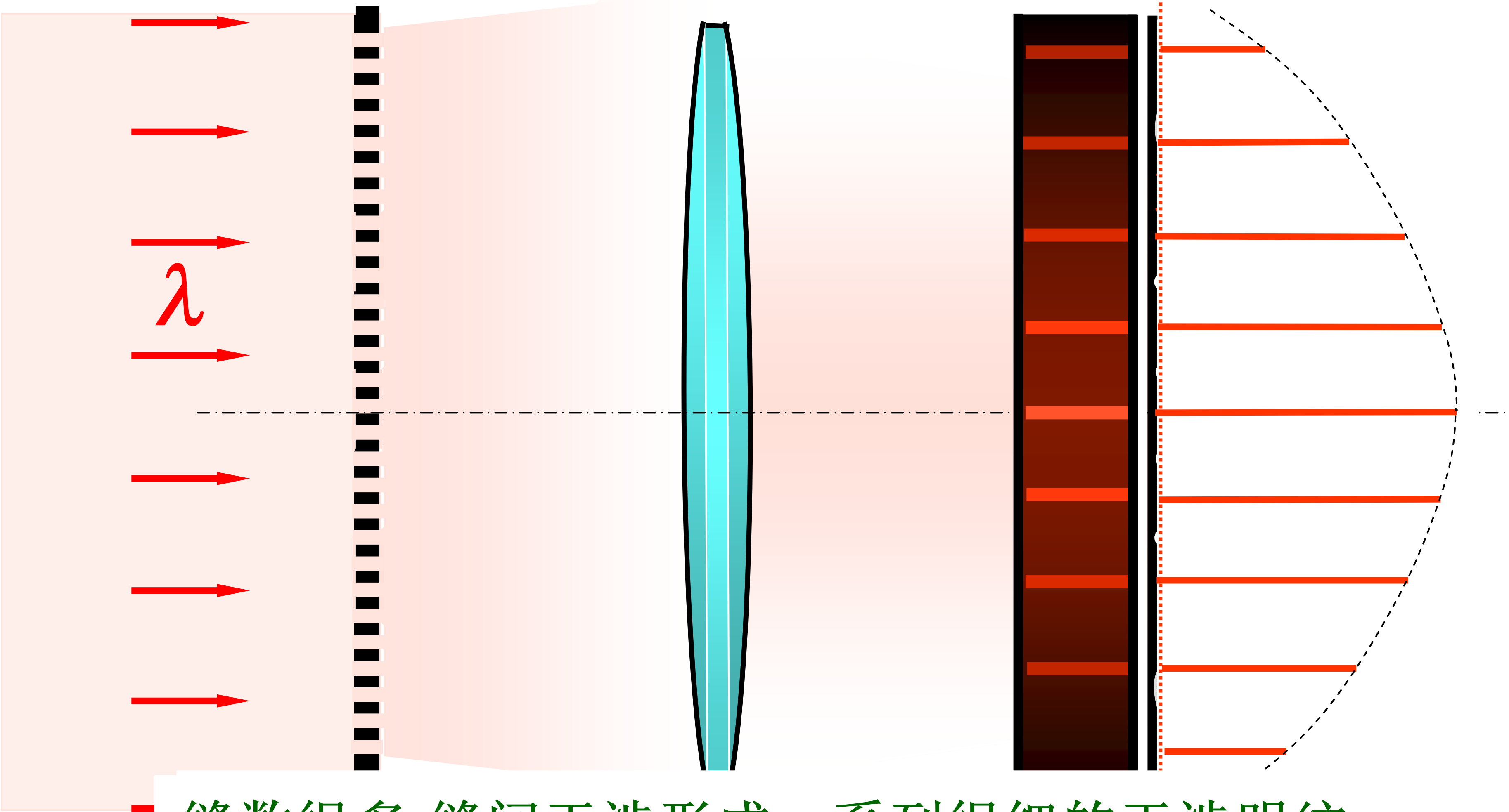
两个相邻主极大之间有N-1个0值

各主极大的强度为：$I_m=N^2I_0(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2$

主极大与相邻零值角距离：$\Delta\theta=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$

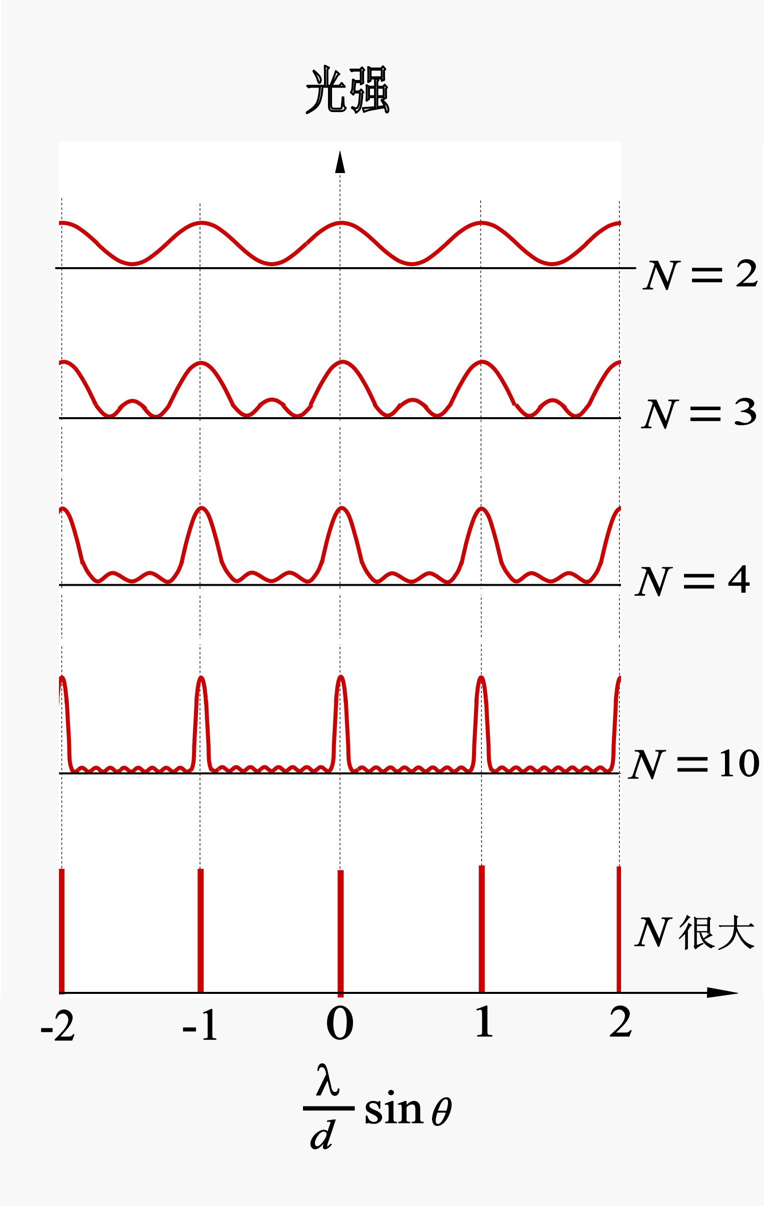
光栅衍射现象

光栅衍射包含 单缝衍射 缝间干涉 两种因素

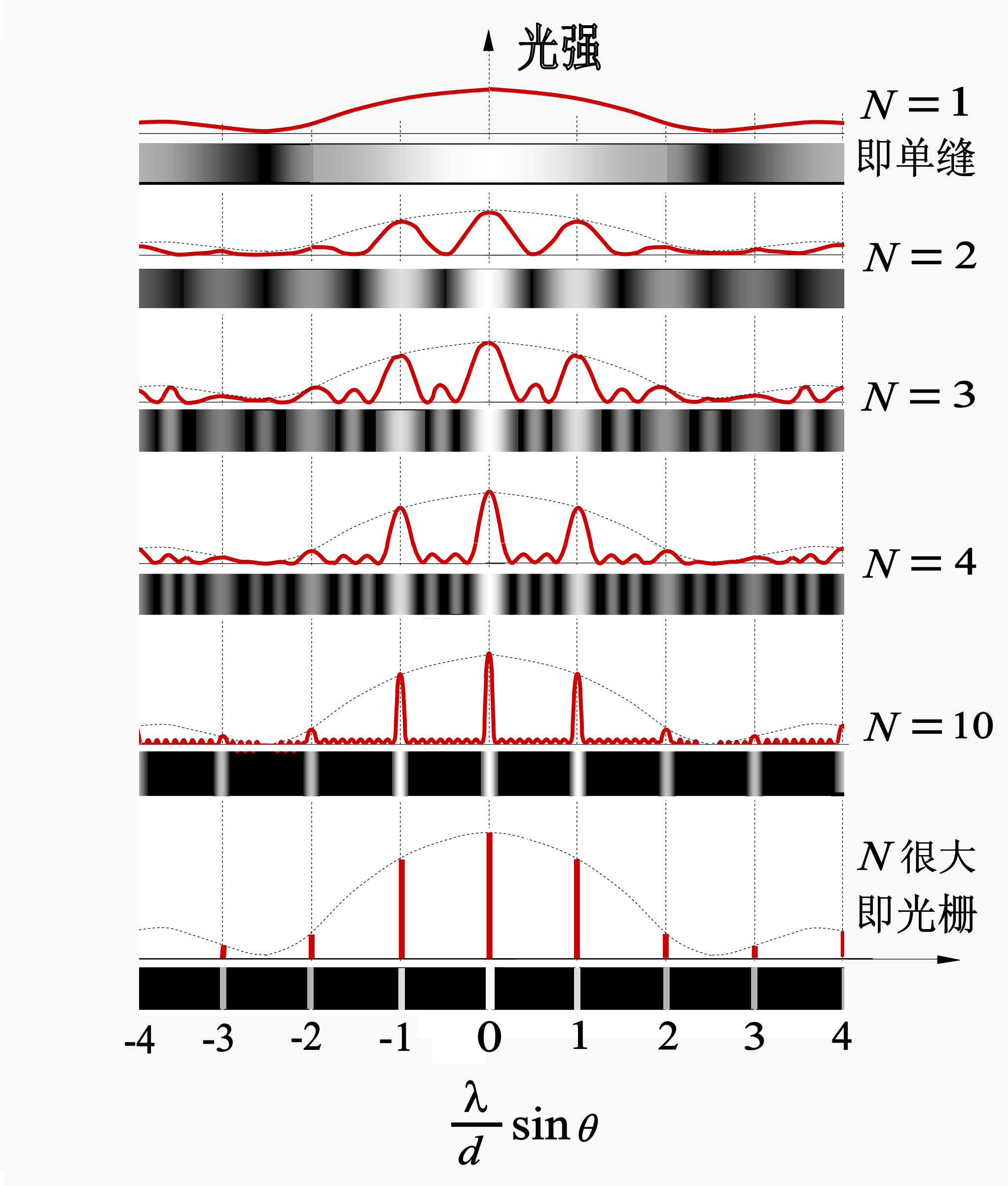


缝数很多,缝间干涉形成一系列很细的干涉明纹,
各明纹的极值受单缝衍射因素的调制。

N 条理想无限细狭缝之间的干涉结果

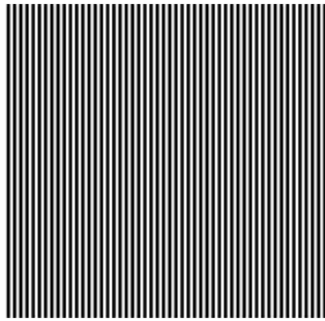


N 条实际有限宽狭缝的单缝衍射与缝间干涉所产生的综合效果



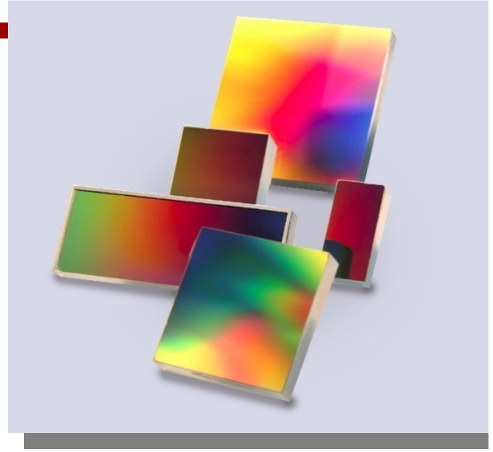
4-6

视频展示：Fraunhofer diffraction — multiple slits



Ronchi ruling: 朗奇刻线法

4-6

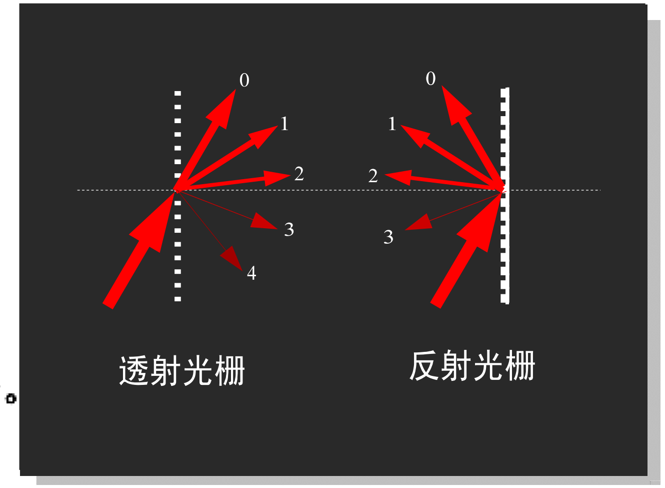


光栅 (grating)

衍射光栅：由大量等宽等间距的狭缝构成的光学元件。

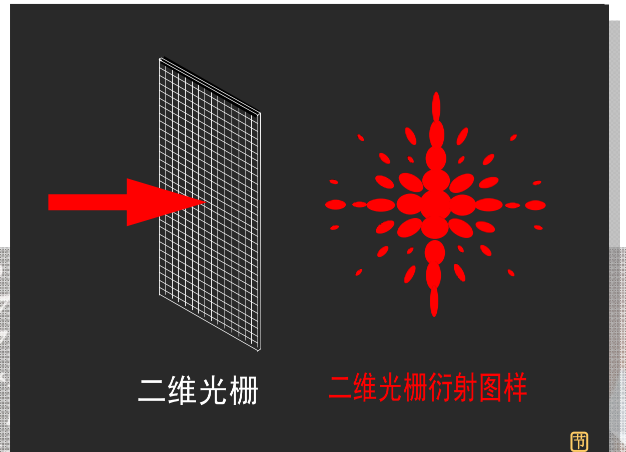
光栅的定义

对入射光的振幅和/或相位
进行周期性空间调制的器件



分类：
- 振幅型和相位型；
- 透射式和反射式；
- 平面光栅和立体（三维）光栅。

基本作用：按波长进行光束的空间分离
基本用途：光谱仪中的分光元件



4-6

光栅的分光性能

1. 光栅方程 (grating equation)

多缝衍射干涉主极大条件

$$d\sin\theta = m\lambda$$

表明：亮线衍射角 θ 与波长 λ 相关。d称为**光栅常数** (grating constant)

但,它只适用于光**垂直**入射情况，对于**斜**入射情况：

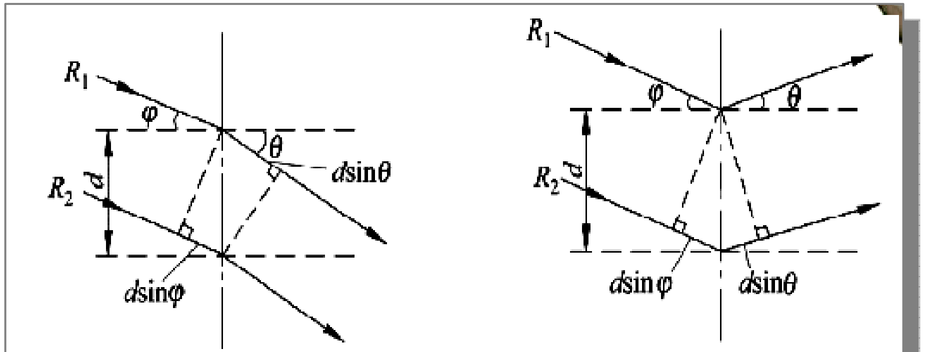
两支光R1、R2的光程差为：

$$d(\sin\varphi \pm \sin\theta)$$

衍射光与入射光同侧取正, 异侧取负号

斜入射衍射极大条件----光栅方程

$$d(\sin\varphi \pm \sin\theta) = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$



(a) 入射光与衍射光在光栅法线异侧　(b) 入射光与衍射光在光栅法线同侧

4-6

2. 性能参数

色散

(1) 角色散 $d\theta/d\lambda$

定义： 单位波长差（1Å）的两条谱线分开的角距离

公式： 由光栅方程 $d(\sin\varphi \pm \sin\theta) = m\lambda$

取微分并取绝对值 $$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}$$

级次 **m** 越高，光栅常数越小，色散能力越强。

(2) 线色散 $dl/d\lambda$

定义： 在聚焦物镜的焦面上单位波长差（1Å）的两条谱线分开的距离.

公式： $$\frac{dl}{d\lambda} = f\frac{d\theta}{d\lambda} = f\frac{m}{d\cos\theta}$$

角色散、线色散是光谱仪的重要质量指标，色散越**大**，越容易将两条靠近的谱线**分开**。

实用光栅通常每**毫米上千条**刻线。

4-6

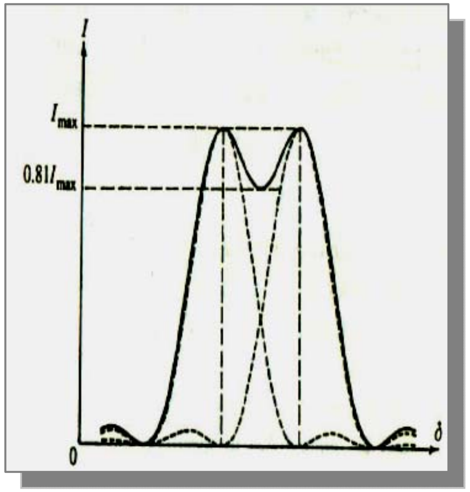
分辨本领

概念 分辨本领是表征分辨开两条波长相差很小的谱线的能力。

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$ $\delta\lambda$ —— 光栅所能分辨的最小波长差

如何计算δ λ？

瑞利标准 $\lambda+\delta\lambda$ 的第 m 级主极大正好落在 λ 的第 m 级主极大旁第一极小值处，则认为这两条谱线恰好可以分开。



$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$$

分开角度与角距离 $\Delta\theta$ 相等的相应波长差即为 $\delta\lambda$

4-6

分辨本领

$$\delta\lambda = \left(\frac{d\lambda}{d\theta}\right)\Delta\theta$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}}$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$$

$$\delta\lambda = \frac{d\cos\theta}{m}\cdot\frac{\lambda}{Nd\cos\theta} = \frac{\lambda}{mN}$$

$$A = \lambda/\delta\lambda = mN$$

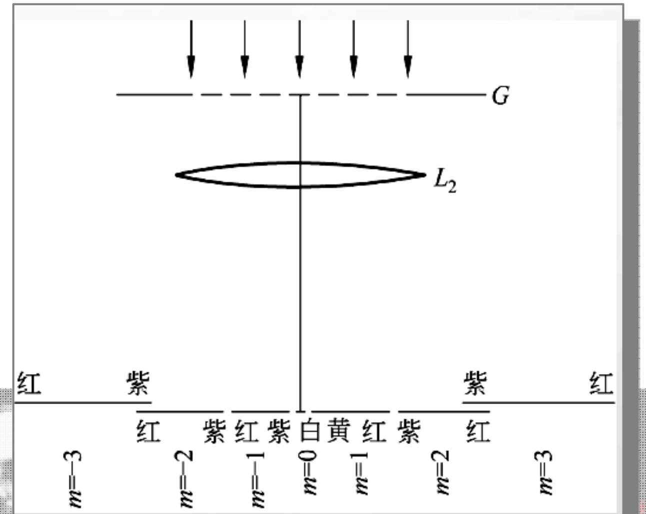
如：对于60mm，1200线/mm的光栅，600nm光，对应1级，其分辨最小波长差为0.008nm

自由光谱范围

概念：相邻级次的光谱不发生重叠的波长范围。

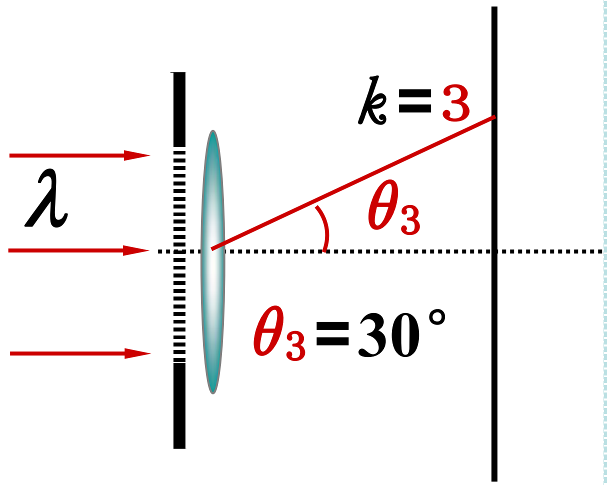
$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda$$

$$\rightarrow \Delta\lambda = \lambda / m$$



例 已知

光栅每毫米 250 线



求

- 待测波长值
- 若该光栅的缝宽 $a = 2.00\times10^{-3}$ mm 衍射场中能出现的全部谱线的总数目

解法提要

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda$$

- $$d = (a+b) = \frac{1}{250}\ \text{mm}$$

$$= 4.00\times10^{-3}\ \text{mm} = 4.00\times10^{-6}\ \text{m}$$

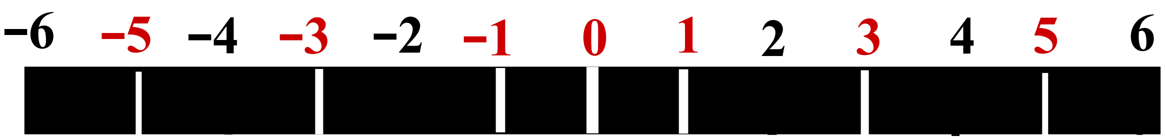
$$\lambda = \frac{(a+b)\sin\theta}{k} = \frac{4.00\times10^{-6}\times\sin30^\circ}{3}\ \text{m}$$

$$= 6.67\times10^{-7}\ \text{m} = 667\ \text{nm}$$

- $$k_{\max} = \frac{(a+b)\sin\frac{\pi}{2}}{\lambda} = \frac{4.00\times10^{-6}\ \text{m}}{6.67\times10^{-7}\ \text{m}}$$

$= 6$ 但要考虑可能有到缺级：

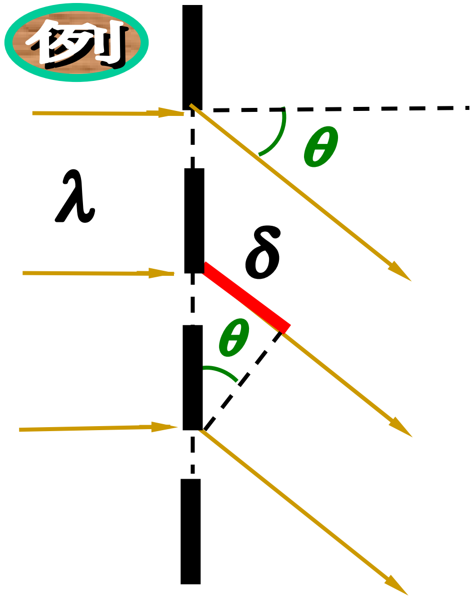
$$k = \frac{(a+b)}{a}k' = \frac{4.00\times10^{-6}\ \text{m}}{2.00\times10^{-6}\ \text{m}}k' = 2k'$$



$k' = 1, 2, 3$ 缺级：$k = \pm 2k' = \pm 2, \pm 4, \pm 6$

只能出现 0，±1，±3，±5 共 7 条谱线

例



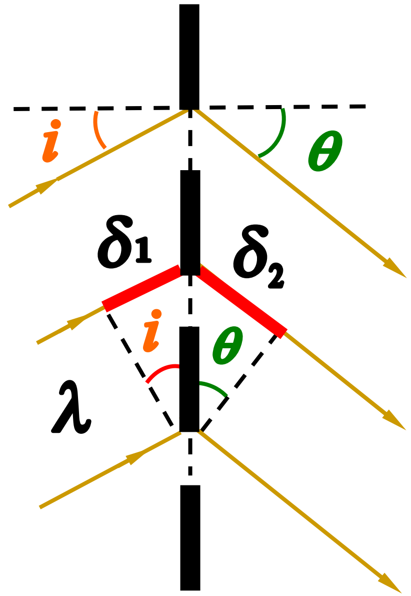
已知 $\lambda = 589\ \mathrm{nm}$

$d = 2000\ \mathrm{nm}$

求 ● 正入射时

● 入射角 $i = 30^\circ$ 时

最多能看到第几级谱



解法提要

● $k = \dfrac{d\sin\theta}{\lambda}$

令 $\theta = 90^\circ$

$k = d/\lambda = 3.4$ 取3

最多能看到第三级谱

● $\delta = \delta_1 + \delta_2 = d(\sin 30^\circ + \sin\theta)$

令 $\theta = 90^\circ$ 得 $\delta = 1.5d$

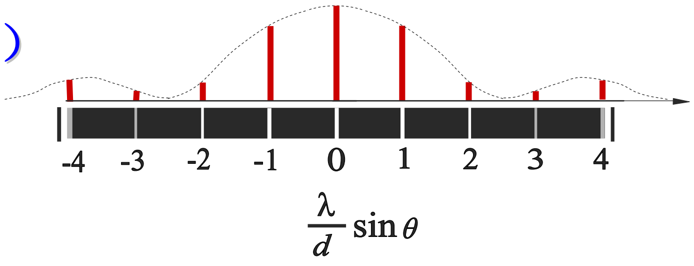
$k = \dfrac{\delta}{\lambda} = \dfrac{1.5 \times 2000}{589} = 5.1$

取5 最多能看到第五级谱

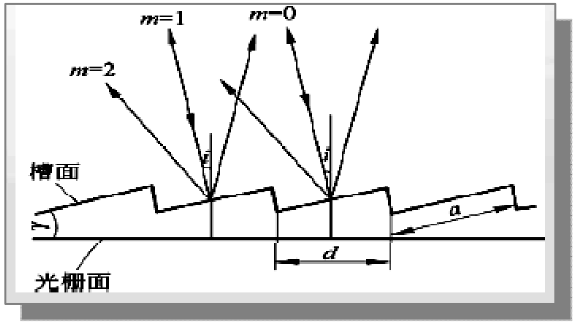
4-6

闪耀光栅 （blazed grating）

普通平面光栅的矛盾



---- 零级集中了绝大部分入射光能，但无色散能力，色散能力较强的高级次条纹强度极弱。



闪耀光栅可以解决问题

若垂直于槽面入射，衍射的主极大就出现在这个方向。对于光栅平面来说，入射光以角度 γ（闪耀角）入射的，根据光栅方程：

$$\Delta = d(\sin i + \sin\theta) = 2d\sin\gamma$$

如果：$2d\sin\gamma = m\lambda_b$

*主闪耀条件(m=1)　$\lambda_b = 2d\sin\gamma$

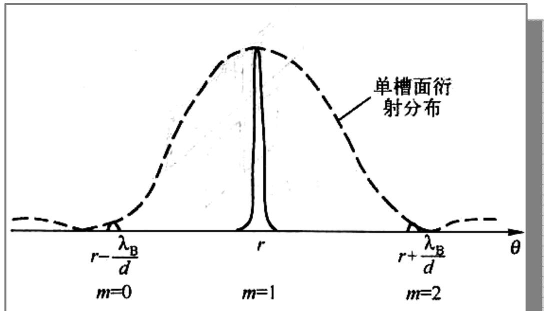
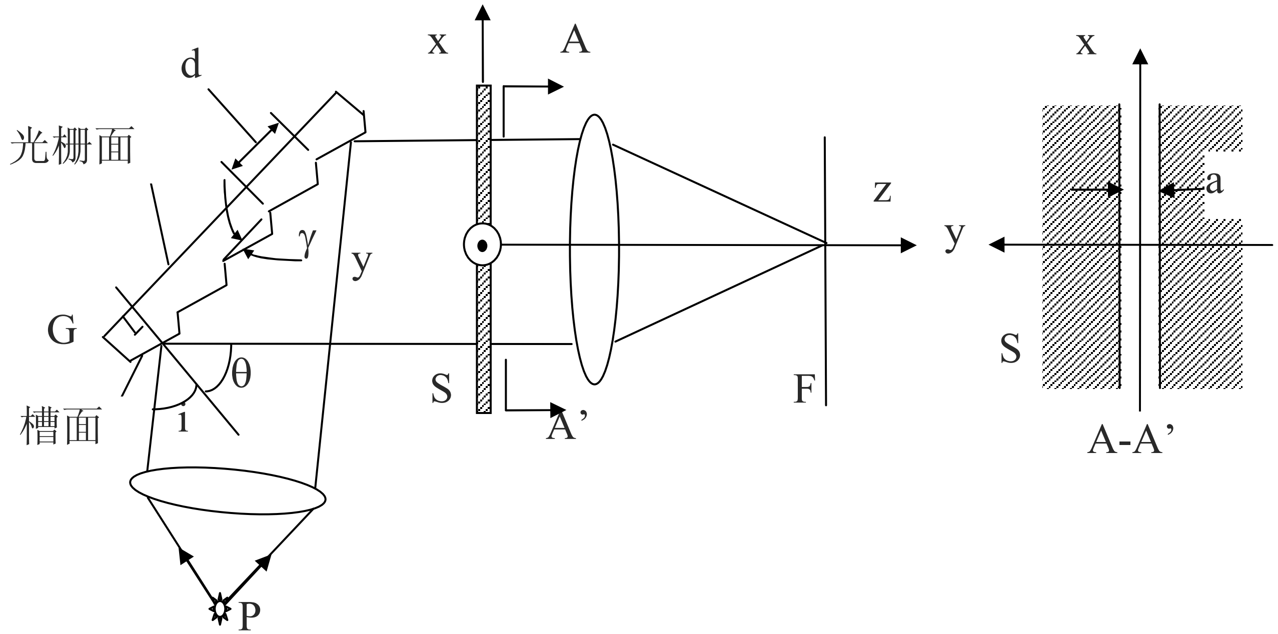


图 5.46　λ_B 的 1 级光谱的闪耀

* 一般光栅给出的闪耀波长 λ_b 都是指一级（主）闪耀波长；但对 $\lambda_b/2$、$\lambda_b/3$ … 也呈现“闪耀”



如图所示，点光源P发出的球面波中含有λ和λ+Δλ两个波长，被透镜准直后以i角入射光栅常数为d、闪耀角为γ的无限大闪耀光栅G后，波长为λ的光波以θ角传播，并垂直经过不透明屏S。S上有一个透光狭缝，狭缝长边与x轴同向，短边与y轴同向，缝宽为a。通过S的光波被无限大透镜会聚到焦面F上。设λ=500nm，Δλ=10nm，i=30°，d=3.064μm，γ=10°，a=1mm。

（1）、系统中哪几个原件引起衍射？F上的衍射是夫琅和费衍射还是菲涅尔衍射？为什么？

（2）、求从G出射光波的干涉级次（提示：闪耀光栅中，入射光在槽面上的反射方向是单缝衍射中心方向，也是能量集中的方向，而沿光栅面的周期性变化可视为普通平面光栅）；

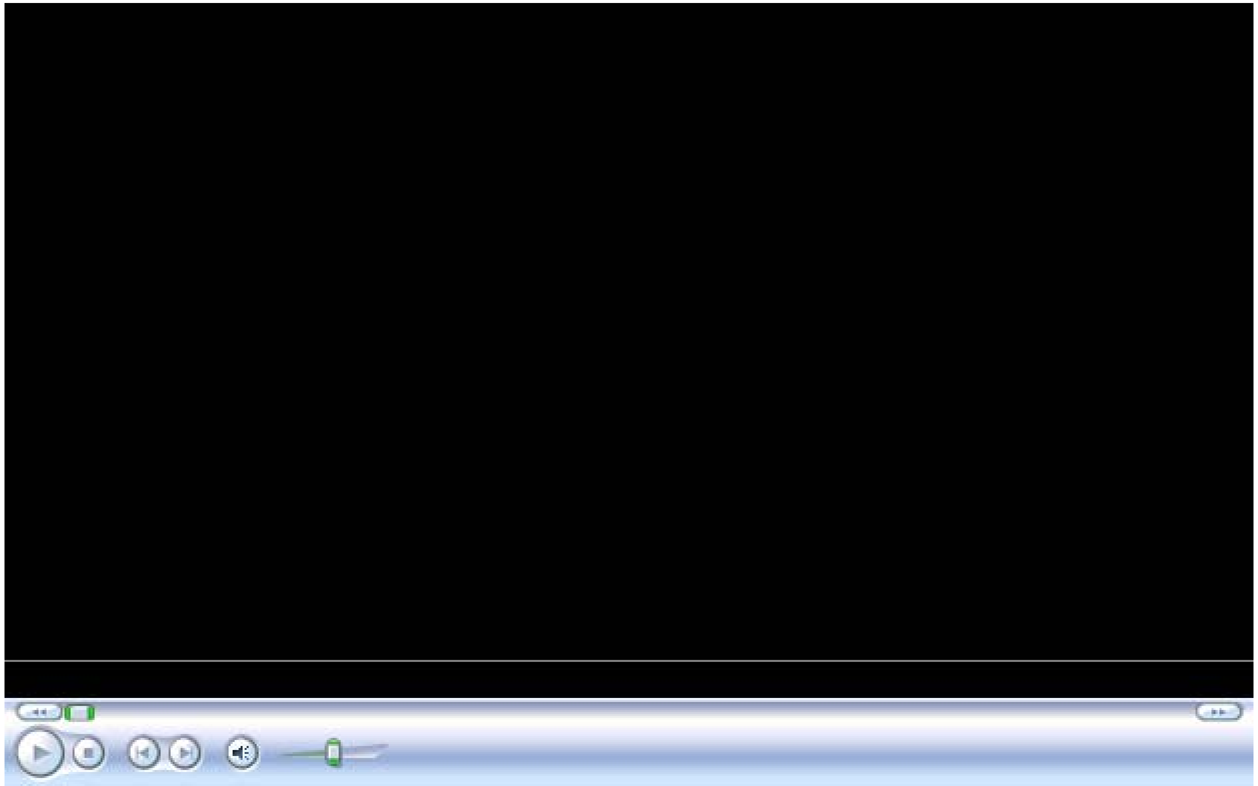
（3）、若透镜焦距f=30cm，求两个波长在F上的衍射图样中心距离；

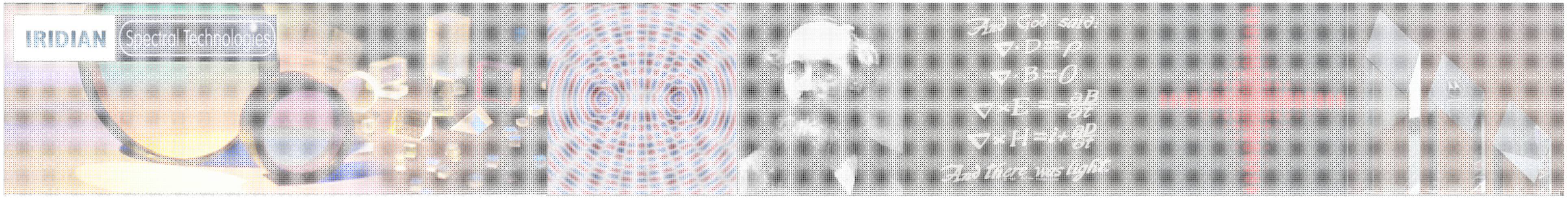
（4）、求F上光强分布，并绘出简图。

作业：4.21、4.23、4.29

4-7 菲涅耳衍射（5.10）

视频展示：Fresnel diffraction — circular apertures





4-7

$$E(x,y)=\frac{\exp(ikz_1)}{i\lambda z_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int E(x_1,y_1)\exp\left\{\frac{ik}{2z_1}\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]\right\}dx_1dy_1$$

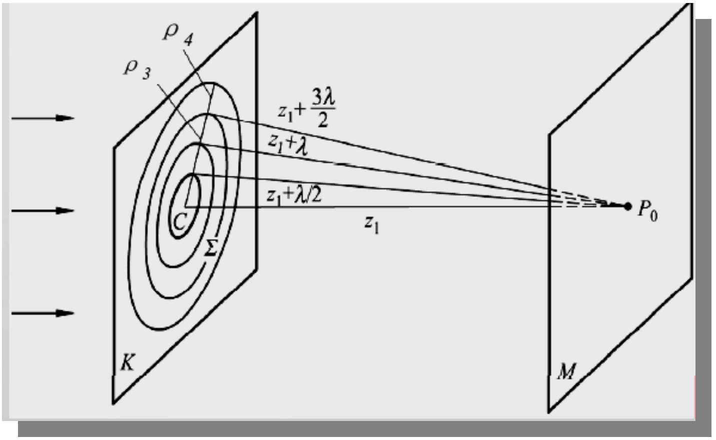
—菲涅尔衍射公式

- 与夫琅和费衍射比较，菲涅耳衍射
  （1）自然条件下**容易**观察到
  （2）数学上**不容易**处理
- 分析菲涅耳衍射的主要方法—半定量方法
  波带法—处理**圆形**孔径

菲涅耳波带法

以P_0为中心，以r_1、$r_2,\cdots,r_N$为半径，在波面Σ上作圆，把波面Σ分成N个环带，相邻两个环带上相应点到P_0的光程差为半个波长，这样的环带就称为菲涅耳半波带。

$$r_1=z_1+\lambda/2$$
$$r_2=z_1+2\lambda/2$$
$$\cdots\cdots$$
$$r_N=z_1+N\lambda/2$$



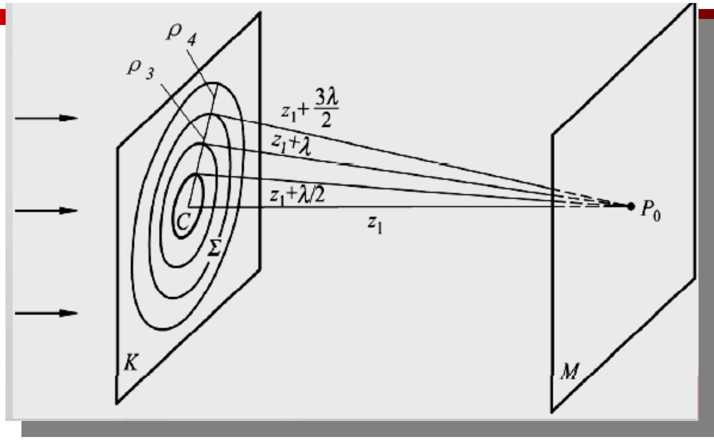
4-7

单个半波带的衍射场

第 j 个波带在

P_0 点产生的振幅

$$|\tilde{E}_j| = C\frac{A_j}{r_j}\frac{1+\cos\theta}{2}$$



C 是比例常数，r_j 是第 j 带到 P_0 点的平均距离，A_j 是第 j 波带的面积，即波面上半径分别为 ρ_j 和 ρ_{j-1} 的两个圆的面积之差

半波带面积 $\boxed{A_j}$

$$\rho_j = \left[\left(z_1 + j\frac{\lambda}{2}\right)^2 - z_1^2\right]^{1/2} = \left[jz_1\lambda + \frac{(j\lambda)^2}{4}\right] = \sqrt{jz_1\lambda}\left[1+\frac{j\lambda}{4z_1}\right]^{1/2}$$

$Z_1 >> \lambda$ 时，

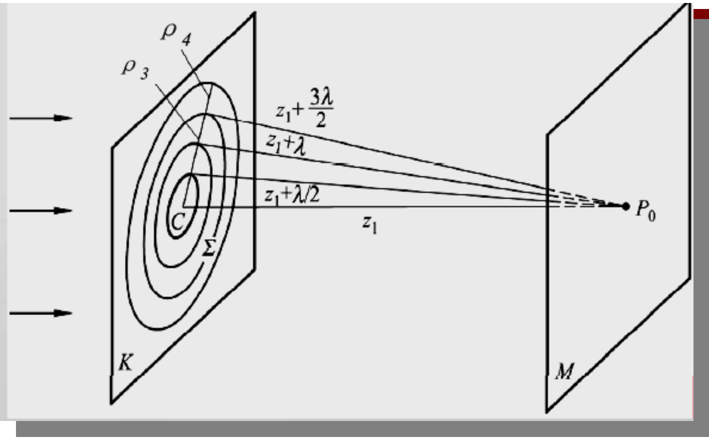
$$\rho_j \approx \sqrt{jz_1\lambda} \quad \Rightarrow$$

$$A_j = \pi\rho_j^2 - \pi\rho_{j-1}^2 \approx \pi z_1\lambda$$

因此，各波带面积近似相等

4-7

倾斜因子 $K_j(\theta)=\dfrac{1+\cos\theta_j}{2}$



$j\uparrow$ ，$K_j(\theta)$单调减小，但变化缓慢

设 $R=r_0=1\ m$ 、$N=4000$ 时.

$K_j(\theta)$也只降2%，即$K_{4000}(\theta)=0.98K_1(\theta)\cdots$

$(1/r_j)$因子与倾斜因子有类似的变化性质

圆孔衍射场

$$|\tilde{E}_j|=C\frac{A_j}{r_j}\frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$A_j=\pi z_1\lambda$$

各波带在P_0产生的振幅将随 j 增大而单调减小，但变化缓慢，即

$$|\tilde{E}_1|>|\tilde{E}_2|>|\tilde{E}_3|>\cdots$$

$$|\tilde{E}_1|\approx|\tilde{E}_2|\approx|\tilde{E}_3|\ldots\ldots$$

$j\uparrow$ 时，$K_j(\theta)$ 和$(1/r_j)$ 单调减小，但变化缓慢

4-7

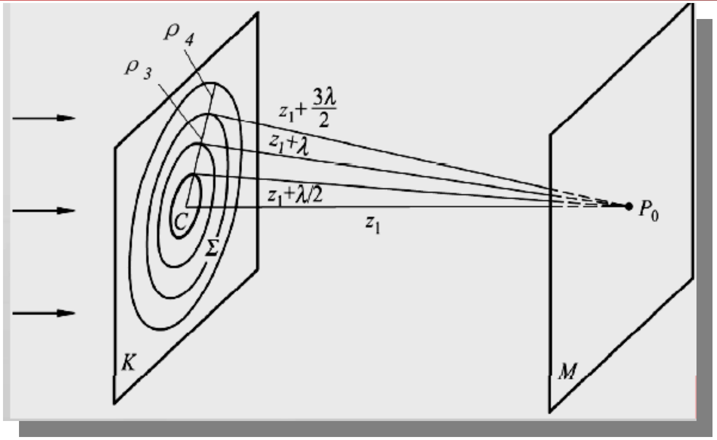
圆孔衍射场

相邻波带子波到 P_0 的相位差为 π，这样，复振幅总和为

$$\tilde{E} = |\tilde{E}_1| - |\tilde{E}_2| + |\tilde{E}_3| - |\tilde{E}_4| + \cdots - (-1)^N |\tilde{E}_N|$$

$$= |\tilde{E}_1|/2 + (|\tilde{E}_1|/2 - |\tilde{E}_2|/2) + (|\tilde{E}_3|/2 - |\tilde{E}_2|/2)$$

$$+ (|\tilde{E}_3|/2 - |\tilde{E}_4|/2 +) \cdots - (-1)^N |\tilde{E}_N|/2$$



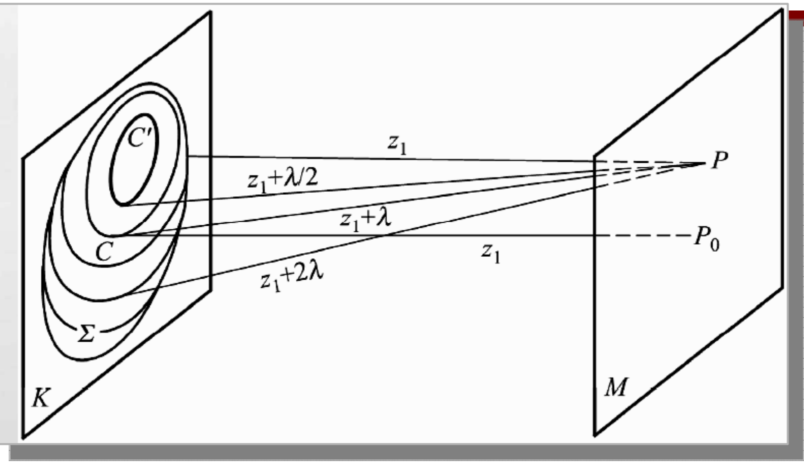
$$\tilde{E} = \begin{cases} \dfrac{|\tilde{E}_1|}{2} + \dfrac{|\tilde{E}_N|}{2} & N\text{ 为奇数} \\ \dfrac{|\tilde{E}_1|}{2} - \dfrac{|\tilde{E}_N|}{2} & N\text{ 为偶数} \end{cases}$$

讨论

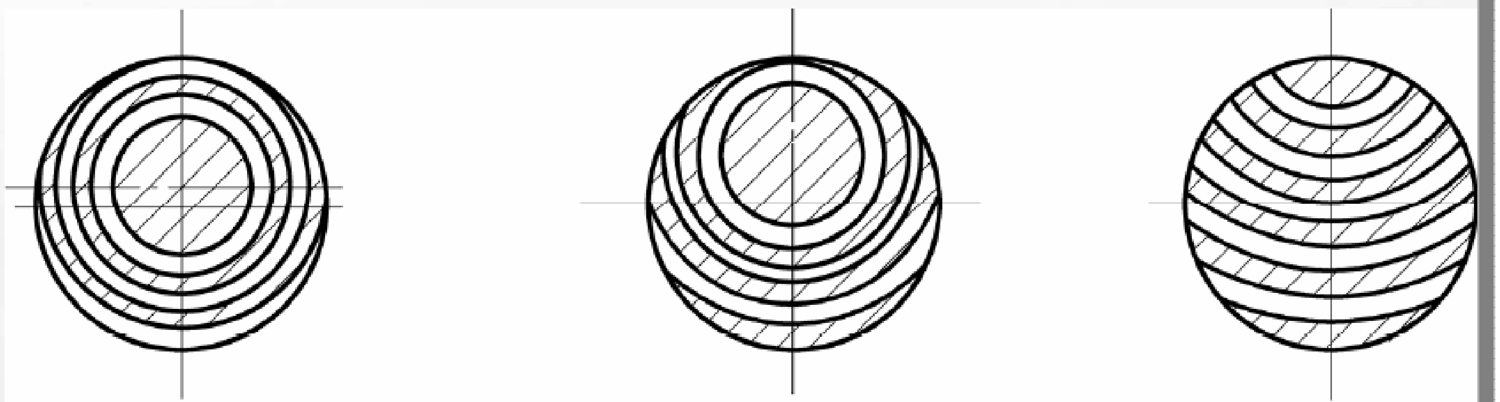
* 若逐渐开大或缩小圆孔，在 P_0 点将明暗交替变化
* $N \to \infty$ 时， $\tilde{E}_N \to 0$ 、 $\tilde{E} = \tilde{E}_1/2$

4-7

轴外点圆孔衍射图样



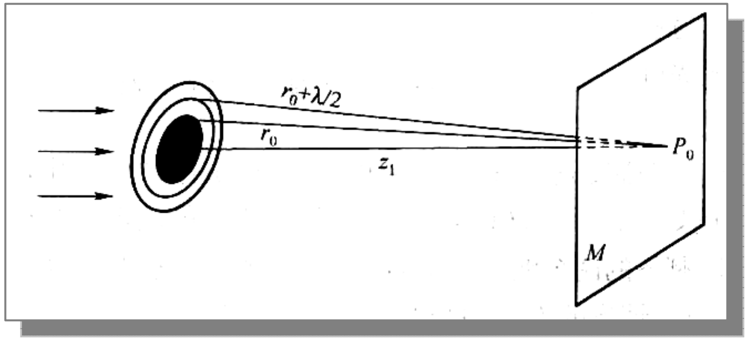
* **P**点光强不仅取决于波带的数目，也取决于每个波带露出部分的面积
* 由对称性. 衍射图样是一组亮暗交替的同心圆环，中心可能亮也可能暗



(a) 含 4 个完整半波带　　(b) 含 2 个完整半波带　　(c) 无完整半波带

4-7

圆屏的菲涅耳衍射



也采用波带法，

但要注意 $\tilde{E}_{N\to\infty} \to 0$

* P_0 总“亮”不“暗”，复振幅应为第 1 波带复振幅的一半，强度为第1波带强度的 1/4。

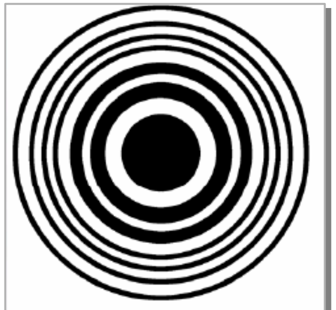
----波动理论的强力证据

* 中心为亮点，周围有一些亮暗相间的圆环条纹

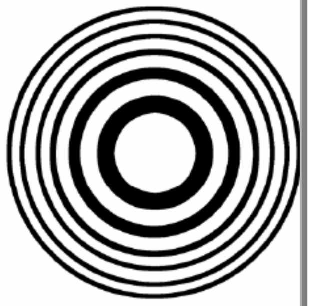
* 当圆屏较大时，第 1 波带对 P_0 点的作用甚微，P_0 强度接近于零

4-7

菲涅耳波带片 (Fresnel zone plate)

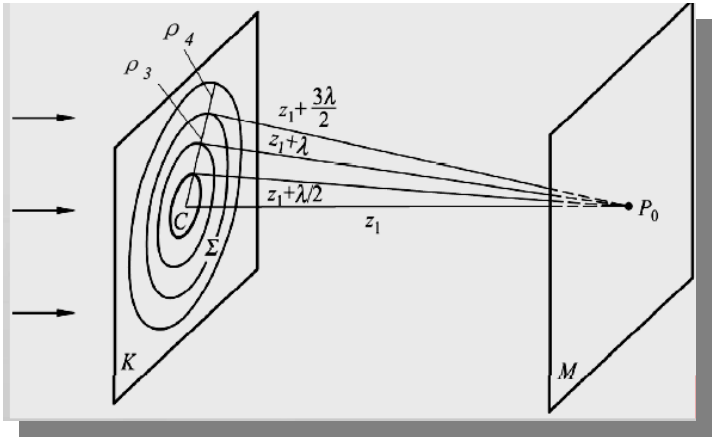


(a) 挡住奇数波带



(b) 挡住偶数波带

原理、结构



* 相邻波带相位相反，作用相消

* 使偶（奇）数波带全被阻，奇（偶）数波带全畅通，各通光波带复振幅将同相位叠加，呈现纯相长干涉，P_0的振幅和光强会大大增加

* 设$|\tilde{E}_\infty|$为无光阑时P_0的振幅，10个偶/奇数波带通光

$$|\tilde{E}|=|\tilde{E}_1|+|\tilde{E}_3|+\cdots+|\tilde{E}_{19}|\approx 10|\tilde{E}_1|=20|\tilde{E}_\infty|$$

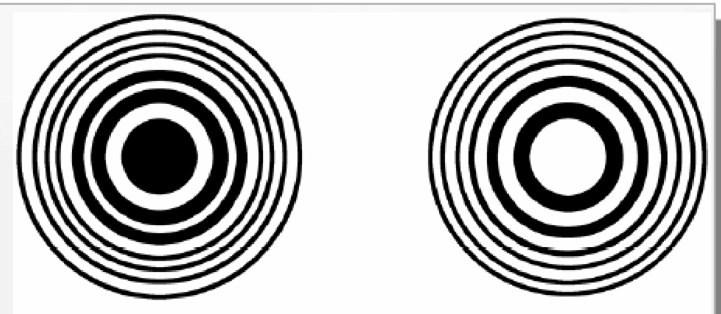
$$I\approx(20|\tilde{E}_\infty|)^2=400I_\infty$$ 光强大幅度提高

4-7

菲涅耳波带片

焦距

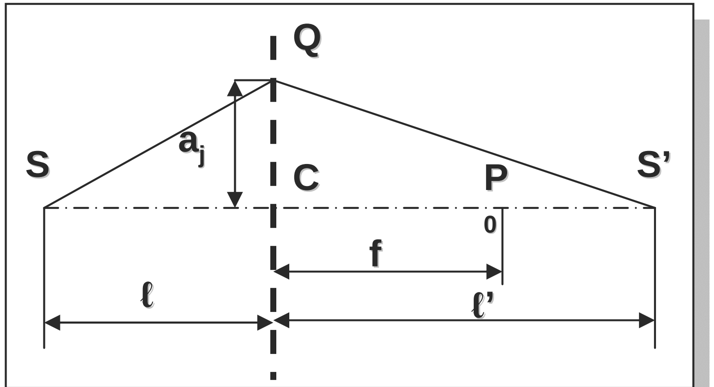
假设波带片是对应距离 z_1 点 P_0 而设计，当用单色平面波垂直照明波带片时，P_0 将呈现一亮点，与透镜的类似，这亮点称为焦点，而距离 z_1 就是焦距



(a) 挡住奇数波带　　(b) 挡住偶数波带

J 波带的外圆半径　　$\rho_j = \sqrt{jz_1\lambda}$

因此，焦距　　$f = z_1 = \dfrac{\rho_j^2}{j\lambda}$



成像关系： 亮点 S' 应满足：

$$SQ + QS' - SS' = j\lambda / 2 \ldots\ldots(1)$$

$$SQ = (SC^2 + CQ^2)^{1/2} = (l^2 + a_j^2)^{1/2}$$

$$QS' = (l' + a_j^2)^{1/2}$$

二项式展开，只保留前　　两位：

$$SQ = l(1 + \frac{a_j^2}{2l^2}), QS' = l'(1 + \frac{a_j^2}{2l'^2})$$

代入（1）式：

$$l(1 + \frac{a_j^2}{2l^2}) + l'(1 + \frac{a_j^2}{2l'^2}) - (l + l') = \frac{j\lambda}{2}$$

$$\because a_j = \sqrt{jf\lambda}$$

$$\therefore \frac{1}{l'} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$$