

量子系统动态函数的跟踪控制

丛爽, 张慧, 刘建秀

(中国科学技术大学 自动化系, 合肥 230026)

摘要: 以随时间变化的二次函数为目标函数, 对采用薛定谔方程的量子系统进行轨迹跟踪研究. 根据 Lyapunov 稳定性定理, 选择误差的平方作为 Lyapunov 函数设计控制律, 实现系统从任意初始状态到目标函数的跟踪. 在 Matlab 环境下对不同初始状态进行了系统仿真及性能对比研究, 分析了系统初始值以及控制中观测量对跟踪性能的影响, 验证了控制律在跟踪目标函数上的优越性.

关键词: 量子系统; Lyapunov 控制方法; 跟踪控制

中图分类号: TP11

文献标志码: A

Dynamic function tracking control of quantum systems

CONG Shuang, ZHANG Hui, LIU Jian-xiu

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China. Correspondent: CONG Shuang, E-mail: scong@ustc.edu.cn)

Abstract: A time-varying quadratic function is selected as a target function. The Schrodinger equation of quantum systems is used to study the trajectory tracking. A error square Lyapunov function is selected based on the Lyapunov stability theorem to design control laws, so that realize tracking the target function from any initial state. System simulation experiments and the performances comparisons are studied under the Matlab with different initial states, which analyze the effects of initial states and observation to the system tracking performance, and verify the superiority of the proposed control laws tracking the target function.

Keywords: quantum system; Lyapunov control method; tracking control

0 引言

近年来, 随着量子通信^[1]、量子计算^[2]和量子信息^[3]的快速发展, 量子控制得到了越来越深入的研究. 在量子控制理论研究方面, 人们主要结合量子系统的自身特点, 采用控制理论设计能够控制量子系统的外加控制律^[4]. 量子控制的研究内容主要分为状态调控和轨迹跟踪. 状态调控方面, 国内外已发表了很多研究成果^[5-7], 包括对本征态、叠加态以及混合态的调控, 也包括收敛性分析等理论成果. 轨迹跟踪方面, 研究内容主要包括: 跟踪一个随时间自由演化的量子系统^[8]和随时间变化的任意函数^[9]. 文献 [10-13] 针对奇异值问题给出了解决方法, 提出了采用自适应算法的轨迹跟踪策略, 并研究了跟踪过程中的多解性; 同时在轨迹跟踪的控制方法、稳定性和收敛性分析方面也进行了深入研究. 笔者所在研究团队也发表了

一系列研究成果, 其中包括对自由演化量子系统的跟踪^[8]、量子轨道跟踪^[14]. 量子系统常用的控制方法有最优控制^[15]和基于 Lyapunov 理论的控制^[16-17]. 最优控制可使选定的系统性能指标全局最优, 不过其求解过程是通过迭代得到的数值解; 而量子 Lyapunov 方法能够获得解析解, 求解过程相对简单.

一般而言, 典型的目标函数, 包括阶跃、斜坡和加速度等函数, Cong 等^[18]已研究了斜坡函数 $S(t) = t$ 和指数函数 $S(t) = 1 - \exp(-t^2/2\tau^2)$ 的轨迹跟踪. 本文将针对目标函数为二次加速度函数, 研究初始状态为纯态的情况下, 在量子 Lyapunov 控制方法下的系统输出对目标函数的跟踪问题, 并通过调节控制参数进一步改善系统的跟踪时间和跟踪精度. 通过系统仿真实验研究在控制律作用下, 系统输出对目标函数的跟踪性能; 并对不同初始状态和观测量取值下的跟踪

收稿日期: 2014-01-17; 修回日期: 2014-06-04.

基金项目: 国家973计划项目(2011CBA00200).

作者简介: 丛爽(1961—), 女, 教授, 博士生导师, 从事量子系统状态调控与实现等研究; 张慧(1990—), 女, 硕士生, 从事量子系统跟踪及状态估计的研究.

性能进行对比研究。

1 系统描述与控制任务

考虑由薛定谔方程描述的量子系统

$$|\dot{\psi}(t)\rangle = -i\hbar H|\psi(t)\rangle. \quad (1)$$

其中: $H = H_0 + \sum u_m H_m$, $m = 1, 2, \dots, M$, u_m 为系统外加控制场, H_0 为系统内部哈密顿量, H_m 为外部控制哈密顿量, H_0 和 H_m 均为不含时间的线性厄米算符; $|\psi(t)\rangle$ 为系统状态, 满足 $|\psi(t)\rangle = c_1|\lambda_1\rangle + c_2|\lambda_2\rangle + \dots + c_n|\lambda_n\rangle$, $|\lambda_i\rangle$ 为本征态, c_1, \dots, c_n 为复数, 满足 $c_1^2 + \dots + c_n^2 = 1$; 当 $t = 0$ 时, 系统初始状态为 $\psi(0) = \psi_0$; \hbar 为普朗克常数, 为了计算简便, 取 $\hbar = 1$.

定义 $Y(t)$ 为系统输出函数, 观测量 P 的平均值记为 $\langle\psi(t)|P|\psi(t)\rangle$, 系统输出函数 $Y(t)$ 可表示为

$$Y(t) = \langle\psi(t)|P|\psi(t)\rangle, \quad (2)$$

其中 P 为厄米算符, 选取本征态投影之和, 即

$$P = \sum_{i=1}^n p_i |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i| = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}. \quad (3)$$

这里 p_i 表示系统输出值中某一个本征态所占观测量的概率, 满足 $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, 即系统对所有本征态观测的概率之和为 1. p_i 的取值决定系统对本征态 $|\lambda_i\rangle$ 的观测概率, 不同的 p_i 值可使系统输出不同。

将式 (3) 代入 (2), 可得

$$Y(t) = [c_1 \ \cdots \ c_n] \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}. \quad (4)$$

由式 (4) 可将系统输出进一步表示为

$$Y(t) = p_1 c_1^2 + p_2 c_2^2 + \dots + p_n c_n^2. \quad (5)$$

其中 $0 \leq c_i^2 \leq 1$, $0 \leq p_i \leq 1$, $0 \leq p_i c_i^2 \leq p_i \leq 1$, 所以有 $0 \leq p_1 c_1^2 + \dots + p_n c_n^2 \leq p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, 即 $0 \leq Y(t) \leq 1$. 由此可知, 本文研究跟踪的系统输出取值范围为 $0 \leq Y(t) \leq 1$.

目标函数是随时间变化的二次函数, 即

$$S(t) = \frac{1}{2}t^2. \quad (6)$$

定义误差为

$$e(t) = S(t) - Y(t). \quad (7)$$

将式 (2) 代入 (7), 可得

$$e(t) = S(t) - \langle\psi(t)|P|\psi(t)\rangle. \quad (8)$$

对式 (8) 求导, 可得误差的一阶导数为

$$\dot{e}(t) = \dot{S}(t) - \langle\dot{\psi}(t)|P|\psi(t)\rangle - \langle\psi(t)|P|\dot{\psi}(t)\rangle. \quad (9)$$

定义系统输出跟踪的性能指标为 $\varepsilon = 0.02$.

本文的控制任务为: 设计控制律以保证系统输出

$Y(t)$ 能够跟踪上目标函数 $S(t)$, 使得跟踪误差 $e(t)$ 降低至性能指标 ε , 并继续跟踪, 直至 $Y(t) = S(t) = 1$ 完成跟踪。

2 基于 Lyapunov 定理的控制律设计

基于 Lyapunov 稳定性定理设计控制律方法的最大优势是, 只要能构造对时间的一阶导数小于等于零的非负 Lyapunov 函数, 所设计的控制律便能保证系统稳定. Lyapunov 方法不要求解被控系统的微分方程, 能够避免类似最优控制中的迭代求解. 设计的关键点在于, 如何构造合适的 Lyapunov 函数 $V(t)$, 本文中选取误差函数 $e(t)$ 的平方作为 Lyapunov 函数 $V(t)$, 即

$$V(t) = \frac{1}{2}e^2(t). \quad (10)$$

对式 (10) 中的 Lyapunov 函数求一阶导数, 可得

$$\dot{V}(t) = e(t)\dot{e}(t). \quad (11)$$

把误差 (8) 和误差的一阶导数 (9) 代入式 (11), 可得

$$\dot{V}(t) = e(t)(\dot{S}(t) - 2\text{Im}\langle\psi(t)|PH_0|\psi(t)\rangle - 2\sum_{m=1}^M u_m \text{Im}\langle\psi(t)|PH_m|\psi(t)\rangle). \quad (12)$$

系统哈密顿量表示方法定义为

$$H = H_0 + \sum u_n H_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

其中: H_n 为外部哈密顿量; u 为系统外部控制量; u_n 表示系统外部的第 n 个控制场, n 为正整数. 控制律设计取 $n = 2$, 两个控制函数分别为 $u_1 = u$ 和 $u_2 = u^2$, 系统哈密顿量表示为

$$H = H_0 + uH_1 + u^2H_2. \quad (14)$$

将式 (14) 代入 (12), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & e(t)(\dot{S}(t) - 2\text{Im}\langle\psi(t)|P \cdot H_0|\psi(t)\rangle - \\ & 2u\text{Im}\langle\psi(t)|PH_1|\psi(t)\rangle - \\ & 2u^2\text{Im}\langle\psi(t)|PH_2|\psi(t)\rangle) = \\ & I_0 - uI_1 - u^2I_2 < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$I_0 = e(t) \cdot (\dot{S}(t) - 2\text{Im}\langle\psi(t)|P \cdot H_0|\psi(t)\rangle),$$

$$I_1 = 2e(t) \cdot \text{Im}\langle\psi(t)|P \cdot H_1|\psi(t)\rangle,$$

$$I_2 = 2e(t) \cdot \text{Im}\langle\psi(t)|P \cdot H_2|\psi(t)\rangle.$$

由 $\dot{V}(t) < 0$ 设计控制律来保证系统收敛. 系统跟踪可以分段进行控制: 第 1 阶段采用控制律 f_1 从任意初始值到达目标函数, 保证系统跟踪误差能够快速下降到性能指标; 第 2 阶段采用控制律 f_2 跟踪目标函数, 使得跟踪误差稳定在 $e(t) < 0.02$ 以保证跟踪精度。

为了确定控制律 f_1 和 f_2 的切换时间, 系统跟踪时间 t_1 需满足

$$e(t_1) = \frac{1}{2}t_1^2 - \langle \psi(t_1)|P|\psi(t_1) \rangle < 0.02. \quad (16)$$

跟踪时间 t_1 为系统输出 $Y(t)$ 与目标函数 $S(t)$ 误差首次减小到 $e(t) < \varepsilon$ 的时间, t_1 由下式计算:

$$t_1 = \sqrt{2\langle \psi(t_1)|P|\psi(t_1) \rangle + 0.04}. \quad (17)$$

系统跟踪上目标函数后的控制任务是保持跟踪精度 $e(t) < \varepsilon$, 系统的控制律可以设计如下:

1) 当 $0 < t \leq t_1, k_1 > 1$ 时, 有

$$f_1 = u = -k_1 \left| \frac{-I_1 - \sqrt{I_1^2 + 4I_2I_0}}{2I_2} \right|; \quad (18)$$

2) 当 $t_1 < t < t_f, k_2 > 0$ 时, 有

$$f_2 = u = \frac{-I_1 - \sqrt{I_1^2 + 4I_2I_0}}{2I_2} - \frac{1}{k_2} \left| \frac{-I_1 - \sqrt{I_1^2 + 4I_2I_0}}{2I_2} \right|. \quad (19)$$

系统的控制框图如图 1 所示, 从中可以看出, 系统跟踪控制过程为: 给定系统初始状态 ψ_0 和观测量 P , 计算系统初始误差 e_0 , 调节控制参数 k_1 , 确定跟踪时间 t_1 , 以 t_1 为分界点判断系统控制律采用 f_1 或 f_2 , 数值计算求解系统当前状态 $\psi(t)$. 系统中状态求解以观测量 P 的平均值 $Y(t)$ 反馈回系统, 与目标函数 $S(t)$ 相比较获得系统误差 $e(t)$, 由此获得控制律实时调节系统, 保持系统跟踪状态.

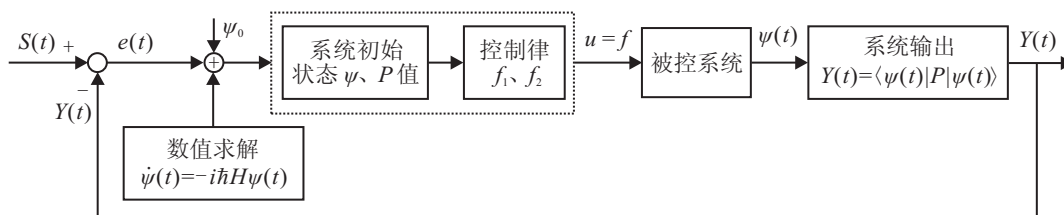


图 1 系统控制结构框图

3 系统仿真实验及其结果分析

选择一个四能级量子系统作为被控对象. 系统控制律 f_1 和 f_2 分别选择式(18)和(19), 系统内部哈密顿量为 $H_0 = \text{diag}(0.4948, 1.4529, 2.3691, 3.2434)$. H_0 的本征值为 $\lambda_1 = 0.4948, \lambda_2 = 1.4529, \lambda_3 = 2.3691, \lambda_4 = 3.2434$. 令四能级系统中任意两能级均有相互作用, 系统外部哈密顿量选择为

$$H_1 = [0 \ 1 \ 1 \ 0; 1 \ 0 \ 0 \ 1; 1 \ 0 \ 0 \ 1; 0 \ 1 \ 1 \ 0],$$

$$H_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 1; 1 \ 0 \ 1 \ 0; 0 \ 1 \ 0 \ 1; 1 \ 0 \ 1 \ 0].$$

仿真实验中, 当系统输出与目标函数相等且有 $Y(t_f) = S(t_f) = 0.5t_f^2 = 1$ 时完成跟踪. 经计算可得跟踪完成时间为 $t_f \approx 1.41$. 实验中对控制律进行限幅 $|u| \leq 1000$, 跟踪误差 $|e| \leq 0.02$, 输出函数 $0 < Y(t) \leq 1$, 时间采样间隔选为 $\Delta T = 0.01(\text{a.u.})$.

3.1 系统跟踪仿真实现及其结果分析

系统的初始状态为叠加态 $\psi_0 = [1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]^T$, 观测量取 $P = \text{diag}(1, 0, 0, 0)$, 初始值由 $Y_0 = \langle \psi_0|P|\psi_0 \rangle$ 计算得 $Y_0 = 0.3333$. 系统的控制参数先调节 k_1 , 确定跟踪时间 t_1 ; 再调节 k_2 以保证跟踪精度. 调节 k_1 时, 保持 k_2 不变, k_1 从 1 ~ 100 间隔 $\Delta = 0.1$ 取值, 由式(17)求解跟踪时间, 选出不同 k_1 值下最短的跟踪时间 t_1 . 选出满足式(16)的最短跟踪时间, 再调节 k_2 从 1 ~ 100 间隔 $\Delta = 1$ 连续取值.

根据式(17)采用龙格库塔方法求解被控系统以

获得状态 $\psi(t_1)$, 调节控制参数 k_1 , 判断系统跟踪误差是否小于性能指标, 若同时满足 $0 < t < 0.3$, 则保存这一时刻跟踪时间至数组 T . 在数组 T 中选择最小的跟踪时间 t'_1 , 调节控制参数 k_2 , 若系统在 $t_1 < t < t_f$ 阶段跟踪误差满足性能指标, 则完成跟踪; 否则需要重新在 T 中选择除 t'_1 之外最短跟踪时间 t''_1 , 调节控制参数 t_2 , 直至系统在 $t_1 < t < t_f$ 阶段跟踪误差始终小于性能指标, 完成系统输出对目标函数的跟踪. 本实验中满足 $e(t) < 0.02$ 且 $0 < t < 0.35$ 的控制参数 k_1 和跟踪时间 t_1 的参数组合如表 1 所示.

表 1 不同初始状态的系统参数对比

系统参数	1	2	3	4	5	6	7
t_1	0.34	0.32	0.31	0.29	0.25	0.22	0.15
k_1	2.40	2.50	2.70	3.00	3.30	4.50	8.30
k_2	69	17	38	40	$Y(t) > 1$	$Y(t) > 1$	$Y(t) > 1$

由表 1 中可以看出: 对应于不同控制参数 k_1 , 有不同的跟踪时间 t_1 ; 跟踪时间 t_1 只与 k_1 有关, 与 k_2 无关; k_1 取值越大, 跟踪时间 t_1 越小; 改变 k_2 , 不影响控制律 f_1 . 第 1 ~ 4 组的系统输出虽然都能够跟踪上目标函数, 但前 3 组的系统跟踪时间均比第 4 组长, 第 4 组的跟踪用时最短, $t_1 = 0.29$. 第 5 ~ 7 组的系统输出 $Y(t) > 1$ 且跟踪误差 $e(t) > \varepsilon$, 系统无法跟踪目标函数.

综上所述, 第 4 组中控制参数 $k_1 = 3.0$ 和跟踪时

间 $t_1 = 0.29$ 为最佳参数组合, 其系统跟踪实验结果如图 2 所示. 从图 2 中可以看出: 系统输出 $Y(t)$ 在 $0 < t \leq 0.29$ 时, 初始值从 $Y_0 = 0.3333$ 快速下降; 当 $t = 0.29$ 时, 跟踪误差首次减小到 $e(t_1) = 0.0048 < 0.02$, 系统输出跟踪上目标函数; 当 $t > 0.29$ 时, 误差保持

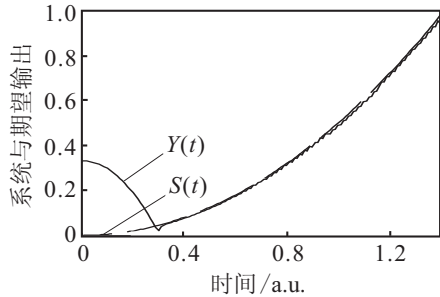


图 2 系统跟踪随时间的变化

$e(t) = 0.0100 \pm 0.0100$ 以内, 系统输出从 $Y(t_1)$ 随目标函数逐渐增加至输出 $Y(t_f) = 1$.

图 3 为系统控制律随时间变化曲线. 可以看出: 控制律以跟踪时间 $t_1 = 0.29$ 为切换点, 系统最大误差为 $e = 0.0111$, 控制精度为 98.89%.

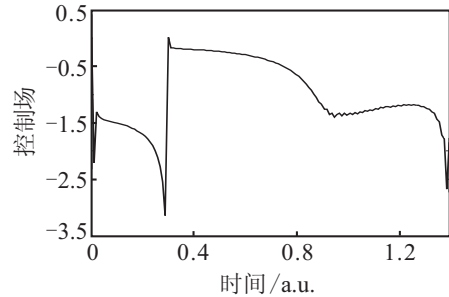


图 3 控制律 u 随时间的变化

表 2 不同初始状态的系统参数对比

系统参数	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5
观测值 P	diag(1, 0, 0, 0)	diag(1, 0, 0, 0)	diag(1, 0, 0, 0)	diag(1, 0, 0, 0)	diag(1, 0, 0, 0)
初始值 Y_0	0.2500	0.3333	0.5000	0.7500	0.8750
控制参数 k_1/k_2	2.0/11	3.0/53	4.1/12	5.7/35	6.3/23
跟踪时间 t_1	0.33	0.29	0.25	0.21	0.17
控制律 f_1	[-2.5590, 0]	[-2.2150, 0]	[-3.0300, 0]	[-5.2890, 0]	[-58.580, 0]
控制律 f_2	[-3.032, 0.847]	[-1.022, 0.426]	[-1.265, 1.188]	[-1.265, 0.721]	[-3.055, 1.626]
最大误差 e_{\max}	0.0097	0.0101	0.0116	0.0131	0.0238
最小误差 e_{\min}	2.6478×10^{-7}	2.4346×10^{-7}	1.2989×10^{-5}	2.0221×10^{-5}	1.1321×10^{-2}
精度/%	99.03	98.99	98.84	98.69	97.62

3.2 初始状态 ψ_0 对系统跟踪性能的影响

为了更深入地分析系统跟踪的性能, 本节主要研究初始状态 ψ_0 对跟踪性能的影响. 选取系统初始状态 ψ_0 分别为

$$\begin{aligned} \psi_1 &= [1/2, 0, 1/2, \sqrt{2}/2]^T, \\ \psi_2 &= [1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]^T, \\ \psi_3 &= [1/2\sqrt{2}, 0, 1/2, 1/2]^T, \\ \psi_4 &= [\sqrt{3}/2, 0, \sqrt{3}/4, 1/4]^T, \\ \psi_5 &= [\sqrt{56}/8, 0, \sqrt{6}/8, \sqrt{2}/8]^T. \end{aligned}$$

观测量固定为 $P = \text{diag}(1, 0, 0, 0)$, 分别进行 5 组仿真实验, 所获不同的系统及控制参数如表 2 所示. 从表 2 中可以看出: 1) 系统控制律取值范围很小. 2) 跟踪时间上, 初始状态 ψ_4 为较优跟踪; 跟踪精度上, 初始状态 ψ_1 为较优跟踪. 3) 系统初始值 $Y_0(t)$ 越大, 控制参数 k_1 的取值越大, 跟踪时间 t_1 越短; 但系统初始值 Y_0 越大, 系统的跟踪精度越低.

图 4 为 5 种情况下的系统跟踪曲线. 可以看出: 系统输出 $Y_5(t)$ 的初始值为 $Y_0^5 = 0.8750$, 下降速度最快, 跟踪时间为 $t_1 = 0.17$; 系统输出 $Y_1(t)$ 的初始值为

$Y_0^1 = 0.2500$, 下降速度最慢, 跟踪时间为 $t_1 = 0.33$. 由此可知, 初始值 Y_0 越大, 系统跟踪误差下降速度越快, 跟踪时间越短. 在 0.35 a.u. 后, 不同初始状态的系统输出均已跟踪上目标函数.

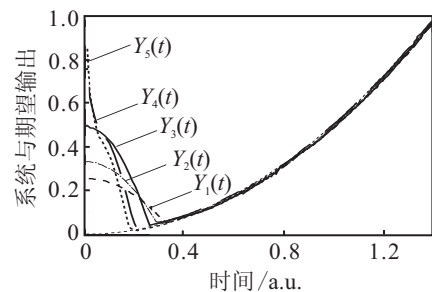


图 4 不同初始状态 ψ_0 下系统的跟踪情况

3.3 观测量 P 对系统跟踪性能的影响

下面通过对 p_i 的不同取值的系统仿真实验来研究观测量 P 值对系统的跟踪性能的影响. 仿真实验中, 固定初始状态为 $\psi_0 = [\sqrt{2}/2, 1/2, 1/2, 0]^T$, 取两个观测量 P 分别为 $P_1 = \text{diag}(0.95, 0.05, 0, 0)$ 和 $P_2 = \text{diag}(0.85, 0.05, 0.05, 0.05)$, 系统初始值分别为 $Y_0^6 = 0.4875$ 和 $Y_0^7 = 0.4500$. 表 3 为两组不同观测量 P_1 和

P_2 下的系统跟踪过程参数对比. 从中可以看出: P_1 值下的跟踪时间比 P_2 值下的时间短且跟踪速度快; 观测量 P 中所含本征态越少, 系统跟踪精度越高, 跟踪误差越小; 当 P 中包含系统所有本征态时, 系统的跟踪精度最低.

表3 不同观测量下的系统参数对比

系统参数	$[\sqrt{2}/2, 1/2, 1/2, 0]^T$	$[\sqrt{2}/2, 1/2, 1/2, 0]^T$
观测量 P	diag(0.95, 0.05, 0, 0)	diag(0.85, 0.05, 0.05, 0.05)
初始值 Y_0	0.4875	0.4500
控制参数 k_1/k_2	4.0/73	3.6/41
跟踪时间 t_1	0.20	0.43
控制律 f_1	$[-8.771, 0, 0]$	$[-7.287, 0, 0]$
控制律 f_2	$[-2.837, 0, 1.811, 0]$	$[-2.056, 0, 5.739, 0]$
最大误差 e_{\max}	0.0193	0.0216
最小误差 e_{\min}	3.8342×10^{-4}	2.0272×10^{-4}
精度/%	98.07	97.84

4 结 论

本文在已经对斜坡和指数型函数进行量子系统跟踪控制的基础上, 对于二次型加速度函数进行了系统跟踪控制的研究. 系统跟踪通过从系统初始状态向目标函数转移以及对目标函数的跟踪两个过程来完成. 本文采用量子 Lyapunov 控制方法设计出解析控制表达式, 并通过系统仿真实验研究了不同系统初始状态和不同观测量对系统跟踪性能的影响.

参考文献(References)

- [1] Smith G, Yard J. Quantum communication with zero-capacity channels[J]. Science, 2008, 321(5897): 1812-1815.
- [2] Knill E. Physics: Quantum computing[J]. Nature, 2010, 463(7280): 441-443.
- [3] Bennett C H, DiVincenzo D P. Quantum information and computation[J]. Nature, 2000, 404(6775): 247-255.
- [4] Cong S, Kuang S. Quantum control strategy based on state distance[J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(1): 28-31.
- [5] Bardeen C J, Yakovlev V V, Wilson K R. Feedback quantum control of molecular electronic population transfer[J]. Chemical Physics Letters, 1997, 280(1/2): 151-158.
- [6] Cong S. State manipulation in Lyapunov based quantum system control methods[J]. Control Theory & Applications, 2012, 29(3): 273-281.
- [7] Lou Y, Cong S, Yang J, et al. Path programming control strategy of quantum state transfer[J]. IET Control Theory & Applications, 2011, 5(2): 291-298.
- [8] Liu J, Cong S. Trajectory tracking of quantum states based on Lyapunov method[C]. The 9th IEEE Int Conf on Control and Automation(ICCAs). Santiago, 2011: 318-323.
- [9] Liu J, Cong S, Zhu Y. Adaptive trajectory tracking of quantum systems[C]. The 12th Int Conf on Control, Automation and Systems(ICCAS). Jeju Island, 2012: 322-327.
- [10] Zhu W, Rabitz H. Quantum control design via adaptive tracking[J]. The J of Chemical Physics, 2003, 119(7): 3619-3625.
- [11] Rothman A, Ho T S, Rabitz H. Quantum observable homotopy tracking control[J]. J of Chemical Physics, 2005, 123(13): 134104.
- [12] Jha A, Beltrani V, Rosenthal C, et al. Multiple Solutions in the tracking control of quantum systems[J]. J of Physical Chemistry, 2009, 113(26): 7667-7670.
- [13] Coron J M, Grigoriu A, Lefter C, et al. Quantum control design by Lyapunov trajectory tracking for dipole and polarizability coupling[J]. New J of Physics, 2009, 11(10): 105034.
- [14] Cong S, Liu J X. Trajectory tracking control of quantum systems[J]. Chinese Science Bulletin, 2012, 57(18): 2252-2258.
- [15] Doherty A C, Jacobs K. Feedback control of quantum systems using continuous state estimation[J]. Physical Review A, 1999, 60(4): 2700-2711.
- [16] Cong S, Zhu Y P, Liu J X. Dynamical trajectory tracking of quantum systems with different target functions[J]. J of Systems Science and Mathematical Sciences, 2012, 32(6): 719-730.
- [17] Kuang S, Cong S. Lyapunov control methods of closed quantum systems[J]. Automatica, 2008, 44(1): 98-108.
- [18] Cong S, Liu J. An orbit tracking algorithm in quantum systems[C]. The 5th Int Conf on Future Computational Technologies and Applications. Valencia, 2013: 7-13.

(责任编辑: 李君玲)