

迭代扩张状态观测器及其在迭代学习控制中的应用

李向阳

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广州 510641)

摘要: 针对一类迭代学习控制(ILC)系统的不确定项,根据时域中扩张状态观测器的思想,提出迭代域中线性迭代扩张状态观测器(LIESO),该线性迭代扩张状态观测器可以利用迭代过程的跟踪误差给出迭代学习控制系统的不确定项的显式估计.给出了基于该估计的迭代学习控制算法,并应用类Lyapunov方法证明其收敛性.仿真结果表明,所提出的迭代学习控制算法是有效的,应用迭代扩张状态观测器可以大幅度提高迭代学习效率.

关键词: 扩张状态观测器; 迭代学习控制; 迭代扩张状态观测器; 类Lyapunov方法

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Iterative extended state observer and its application in iterative learning control

LI Xiang-yang

(College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China. E-mail: xyangli@scut.edu.cn)

Abstract: For the uncertainty in a class of iterative learning control(ILC) systems, a linear iterative extended state observer(LIESO) in the iterative domain is presented based on the thought of extended state observer in time domain. This LIESO can estimate explicitly the uncertainty of the ILC system according to the tracking error during the process of iterations. The ILC algorithm based on the estimation of the uncertainty is presented, whose convergence is proved by using Lyapunov-like approach. Simulation results show the effectiveness of the proposed ILC algorithm and the iterative learning efficiency can be improved so much by using LIESO.

Keywords: extended state observer; iterative learning control; iterative extended state observer; Lyapunov-like approach

0 引言

迭代学习控制(ILC)适合具有重复运动性质的被控对象,通过以前的跟踪误差来修正当次的控制量,从而提高以后的跟踪精度.ILC不需要对系统模型进行精确建模,只需要系统的输入和输出信号,通过迭代就可以实现对目标轨迹的完全跟踪.为了提高迭代收敛速度,学者们提出了自适应迭代学习控制(AILC)^[1-8].自适应控制与迭代学习控制的结合为迭代学习控制的研究注入了新的活力,已成为ILC新的研究方向.但是,AILC要求被控系统的的部分满足线性参数化条件,缩小了ILC的适用范围.

本文在时域扩张状态观测器(ESO)^[9-13]原理的基础上,对一类ILC系统提出了迭代域的线性迭代扩张状态观测器(LIESO)概念,并在此基础上给出了相关控制算法.该方法不需要已知系统未知项的结构信息,比AILC具有更宽的适用范围.

1 问题描述

考虑如下所示的2-D形式非线性时变系统^[2,11]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, k) = x_2(t, k), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t, k) = x_n(t, k), \\ \dot{x}_n(t, k) = f(\mathbf{x}(t, k), t) + u(t, k). \end{cases} \quad (1)$$

其中: x_i 为可测的系统状态, u 为系统的控制输入, $t \in [0, T]$ 为时间, k 为迭代次数, n 为系统阶数, $r_i(t, k)$ 为期望轨迹. 记 $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $\mathbf{r}^T = [r_1, r_2, \dots, r_n]$.

假设1 期望轨迹 $\mathbf{r}(t)$ 有界,且在区间 $t \in [0, T]$ 上有 n 阶导数.

假设2 f 为有界局部Lipschitz连续的未知非线性时变函数,且 $\partial f / \partial t$ 有界. 设 \mathbf{x}^1 和 \mathbf{x}^2 为任意两状态,则有

收稿日期: 2013-12-18; 修回日期: 2014-03-23.

作者简介: 李向阳(1969—),男,副教授,博士,从事学习控制、嵌入式系统和工业自动化等研究.

$$|f(t, \mathbf{x}^1) - f(t, \mathbf{x}^2)| \leq L_f \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|, \quad (2)$$

$$|f(t, \mathbf{x})| \leq B_f. \quad (3)$$

假设 3 系统 (1) 具有零初始误差, 即有

$$\begin{cases} e_i(t, k) = x_i(t, k) - r_i(t, k), \\ e_i(0, k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (4)$$

由式 (4), 可将系统 (1) 写成如下误差形式:

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t, k) = e_2(t, k), \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1}(t, k) = e_n(t, k), \\ \dot{e}_n(t, k) = f(t, \mathbf{x}) + u(t, k) - \dot{r}_n. \end{cases} \quad (5)$$

其中 $t \in [0, T]$.

一般来说, 迭代学习控制是一种数据驱动控制方法^[14-15], 通过反复迭代将期望控制求出, 未知项 $f(t, \mathbf{x})$ 随迭代过程逐步隐式地被控制量补偿. 若能通过输入和输出数据显式地求出 $f(t, \mathbf{x})$, 将显著提高迭代的效率. 对于形如系统 (1) 的系统, 扩张状态观测器能对 $f(t, \mathbf{x})$ 进行很好的估计. 若选用线性扩张状态估计器 (LESO), 则采用系统 (1) 的时域线性扩张状态观测器表示为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i(t, k) = \hat{x}_{i+1} - \frac{a_{n+1-i}}{\varepsilon^i} (\hat{x}_1 - x_1), \\ \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n(t, k) = \hat{x}_{n+1} - \frac{a_1}{\varepsilon^n} (\hat{x}_1 - x_1) + u(t, k); \\ \dot{\hat{x}}_{n+1}(t, k) = -\frac{a_0}{\varepsilon^{n+1}} (\hat{x}_1 - x_1). \end{cases} \quad (6)$$

假设 4 对于式 (6) 的 LESO, 假设系统状态满足零初始条件, 即有

$$\hat{x}_i(t, k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (7)$$

对于式 (6) 的 LESO, 有如下引理.

引理 1 系统 (1) 在时域的 LESO 为系统 (6), 若 ε 满足 $0 < \varepsilon \leq 1$, 系统满足假设 1 和假设 2, 且多项式 $s^{n+1} + a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0$ 为 Hurwitz 多项式, 其中 $a_i > 0 (i = 0, 1, \dots, n)$, 则有如下结论:

1) 给定任意正数 T_ε , 对于 $t \geq T_\varepsilon$, 下式一致收敛:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |x_i(t, k) - \hat{x}_i(t, k)| = 0; \quad (8)$$

2) 系统 (1) 的状态 x_i 和估计 \hat{x}_i 之差的上限满足

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |x_i(t, k) - \hat{x}_i(t, k)| &\leq O(\varepsilon^{(n+2-i)}), \\ i &= 1, 2, \dots, n+1, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $x_{n+1} = f(t, \mathbf{x})$ 为系统 (1) 的扩张状态.

引理 1 的证明和说明参见文献 [9-12].

虽然引理 1 给出了 $f(t, \mathbf{x})$ 的估计方法, 但是不能直接将 $f(t, \mathbf{x})$ 的估计应用在迭代学习控制中. 主要原因在于: LESO 对状态的估计在时间域中进行, 不会随着迭代次数的增加而提高精度; LESO 与原系统的时间区间有差异, 迭代学习控制系统 (1) 是有限时间

区间, 当 ε 不充分小时, 若引理 1 中的 T_ε 不在 $[0, T]$ 内, 则无法得到对 $f(t, \mathbf{x})$ 的精确估计. 因此, 需将时间域 LESO 改造为适合迭代学习控制的扩张状态观测器.

2 提出的方法

先根据时间域 LESO 引出迭代域 LIESO, 然后给出相关算法和定理, 并进行严格的理论证明.

2.1 线性迭代扩张状态观测器

对 LESO 系统 (6) 进行如下的坐标变换:

$$\begin{cases} z_1(t, k) = \hat{x}_1(t, k); \\ z_i(t, k) = \hat{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{n+1-j}}{\varepsilon^j} (z_{i-j} - x_{i-j}), \\ \quad \quad \quad i = 2, 3, \dots, n+1. \end{cases} \quad (10)$$

且定义

$$\begin{cases} z_0(t, k) = \int_0^t z_1(\tau, k) d\tau, \\ x_0(t, k) = \int_0^t x_1(\tau, k) d\tau. \end{cases} \quad (11)$$

考虑到系统零初始条件, LESO 系统 (6) 可变为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t, k) = z_2, \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t, k) = z_n, \\ \dot{z}_n(t, k) = -\sum_{j=0}^n \frac{a_j}{\varepsilon^{n+1-j}} \delta_j(t, k) + u. \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$\begin{cases} \delta_j(t, k) = x_j(t, k) - z_j(t, k), \\ \delta_j(0, k) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n. \end{cases} \quad (13)$$

由式 (10) 有

$$\begin{aligned} x_i(t, k) - z_i(t, k) &= \\ x_i(t, k) - \hat{x}_i(t, k) &+ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{n+1-j}}{\varepsilon^j} (x_{i-j} - z_{i-j}), \end{aligned} \quad (14)$$

式 (14) 两边取绝对值, 有

$$\begin{aligned} |x_i - z_i| &= |x_i - \hat{x}_i| + \\ &\left| \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{n+1-j}}{\varepsilon^j} (x_{i-j} - z_{i-j}) \right|. \end{aligned} \quad (15)$$

由引理 1 的式 (8) 和 (15), 同样有

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |x_i(t, k) - z_i(t, k)| \leq O(\varepsilon^{(n+2-i)}). \quad (16)$$

因此, z_i 和 \hat{x}_i 一样是 x_i 的近似. 将式 (10) 写成误差方程如下:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1(t, k) = \delta_2(t, k), \\ \vdots \\ \dot{\delta}_{n-1}(t, k) = \delta_n(t, k), \\ \dot{\delta}_n(t, k) = \hat{f}(t, k) + u(t, k) - \dot{x}_n. \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$\hat{f}(t, k) = -\sum_{j=0}^n \frac{a_j}{\varepsilon^{n+1-j}} \delta_j. \quad (18)$$

可以看出, 迭代学习控制系统的误差方程 (5) 和线性扩张状态估计器 (16) 具有相同的结构和参数, 只是 e_i 和 δ_i 的变量记号不同. 式 (16) 是利用 LESO 自身的状态 z_i 对被控系统的状态 x_i 进行逼近并估计扩张状态 $f(t, \mathbf{x})$; 式 (5) 利用当前系统状态 x_i 对未来系统状态 r_i 进行逼近并估计未来的扩张状态 $f(t, \mathbf{r})$. 因此, 系统误差方程 (4) 本身蕴含对扩张状态 $f(t, \mathbf{r})$ 的估计. 系统 (1) 和系统 (12) 以及系统 (5) 和系统 (17) 互为对偶系统, 对比式 (5) 和 (16) 可以看出, 可采用如下的迭代学习算法对系统 (1) 的控制状态进行估计:

$$\begin{cases} w_r(t, 0) = 0; \\ w_r(t, k) = \\ w_r(t, k-1) + \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{\varepsilon^{n+1-j}} e_j(t, k), k \in Z^+. \end{cases} \quad (19)$$

其中

$$e_0(t, k) = \int_0^t e_1(\tau, k) d\tau. \quad (20)$$

则 $w_r(t, k)$ 可以作为 $f(t, \mathbf{r})$ 的估计, 每次迭代中实时估计出建模误差 $\sigma(t, k)$, 并在下次进行补偿, 从而逐步显式地得到 $f(t, \mathbf{r})$ 的精确估计. 式 (19) 可以作为系统 (1) 的 LIESO.

2.2 迭代学习控制算法设计

为了更简洁地表示迭代学习控制算法, 并方便后续的理论推导, 定义如下的综合误差 $\sigma(t, k)$, 使其中 $e_n(t, k)$ 的系数为 1.

$$\sigma(t, k) = \frac{\varepsilon}{a_n} \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{\varepsilon^{n+1-j}} e_j(t, k). \quad (21)$$

则式 (19) 可变为

$$\begin{cases} w_r(t, 0) = \sigma(t, 0) = 0; \\ w_r(t, k) = w_r(t, k-1) + \frac{a_n}{\varepsilon} \sigma(t, k), k \in Z^+. \end{cases} \quad (22)$$

其中 $w_r(t, k)$ 是对 $f(t, \mathbf{r})$ 的估计. 为了保证迭代过程的时间域稳定性和迭代域收敛性, 每次迭代时需对 $f(t, \mathbf{x})$ 进行估计. 对 $\sigma(t, k)$ 求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t, k) = \\ \frac{\varepsilon}{a_n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{\varepsilon^{n+1-j}} e_{j+1}(t, k) + \dot{e}_n(t, k), \end{aligned} \quad (23)$$

将误差方程 (5) 代入 (23), 有

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t, k) = \frac{\varepsilon}{a_n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{\varepsilon^{n+1-j}} e_{j+1}(t, k) + \\ f(t, \mathbf{x}) + u(t, k) - \dot{r}_n. \end{aligned} \quad (24)$$

取控制律为

$$u(t, k) = \dot{r}_n - w_x(t, k) - \beta \sigma(t, k). \quad (25)$$

其中: $\beta \geq 0$ 为反馈增益, $w_x(t, k)$ 为

$$\begin{aligned} w_x(t, k) = \\ w_r(t, k) + \frac{\varepsilon}{a_n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{\varepsilon^{n+1-j}} e_{j+1}(t, k). \end{aligned} \quad (26)$$

将控制算法式 (25) 代入 (24), 有

$$\dot{\sigma}(t, k) = -\beta \sigma + (f(t, \mathbf{x}) - w_r(t, k)). \quad (27)$$

在 $w_r(t, k)$ 基础上, 通过式 (26) 的误差修正得到 $f(t, \mathbf{x})$ 的估计 $w_x(t, k)$. 而 $f(t, \mathbf{r})$ 的估计 $w_r(t, k)$ 是通过式 (22) 的迭代学习获得的, 应该在 $f(t, \mathbf{r})$ 界的范围内. 考虑到计算过程的数值稳定性, 可进一步采用如下的限幅迭代学习律:

$$w_r(t, k) = \text{sat}(w_r(t, k-1)) + \frac{a_n}{\varepsilon} \sigma(t, k), \quad (28)$$

其中

$$\text{sat}(w_r) = \begin{cases} B_f, w_r > B_f; \\ w_r, |w_r| \leq B_f; \\ -B_f, w_r < -B_f. \end{cases} \quad (29)$$

将式 (28) 代入 (27), 有

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t, k) = -\left(\beta + \frac{a_n}{\varepsilon}\right) \sigma(t, k) + \\ (f(t, \mathbf{x}) - \text{sat}(w_r(t, k-1))). \end{aligned} \quad (30)$$

由于 $f(t, \mathbf{r})$ 有界, 而 β, a_n 和 ε 都为正数, 式 (30) 说明 $\sigma(t, k)$ 为有界指数衰减函数. 在上述分析基础上, 有如下定理.

定理 1 对于系统 (1) 在时间区间 $[0, T]$ 上的迭代学习控制, 当满足假设 1、假设 2 和假设 3 时, 可以在迭代学习律 (22) 对 $f(t, \mathbf{r})$ 进行估计和式 (26) 对 $f(t, \mathbf{x})$ 进行估计的基础上, 应用控制律 (25) 实现系统 (1) 的完全跟踪, 即下式成立:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(t, k) = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (31)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w_r(t, k) = f(t, \mathbf{r}). \quad (32)$$

证明 分两步证明. 第 1 步. 首先给出 $\mathbf{e}(t, k)$ 和 $\sigma(t, k)$ 关系, 由式 (5) 和 (23), 有

$$\dot{\mathbf{e}}(t, k) = A_c \mathbf{e}(t, k) + B_c \dot{\sigma}(t, k). \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned} A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \\ \frac{\varepsilon^n a_n}{\varepsilon^n a_n} & \frac{-a_1}{\varepsilon^{n-1} a_n} & \cdots & \frac{-a_{n-1}}{\varepsilon a_n} \end{bmatrix}, \\ B_c = [0 \ 0 \ \cdots \ 1]^T. \end{aligned}$$

对式 (33) 两边积分, 考虑到零初始条件, 有

$$\mathbf{e}(t, k) = \int_0^t A_c \mathbf{e}(\tau, k) d\tau + B_c \sigma(\tau, k). \quad (34)$$

对式 (34) 两边取范数, 并根据矩阵范数和向量范数的相容性有

$$|\mathbf{e}(t, k)| \leq \int_0^t \|A_c\| \cdot |\mathbf{e}(\tau, k)| d\tau + |\sigma(\tau, k)|. \quad (35)$$

根据 Bellman-Gronwall 引理, 由式 (35) 有

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}(t, k)| \leq \\ \|A_c\| \cdot e^{\|A_c\| T} \int_0^t |\sigma(\tau, k)| d\tau + |\sigma(\tau, k)|, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (36)$$

式(36)说明,当 $\sigma(t, k)$ 收敛到零时, $e(t, k)$ 也收敛到零. 采用类Lyapunov方法证明 $\sigma(t, k)$ 和 $w_r(t, k)$ 的收敛性, 定义类Lyapunov函数^[16] $L(t, k)$ 为

$$L(t, k) = \frac{1}{2}\sigma^2(t, k) + \frac{\varepsilon}{2a_n} \int_0^t (f(\tau, \mathbf{r}) - w_r(\tau, k))^2 d\tau. \quad (37)$$

第2步. 先证明 $L(t, k)$ 的单调性, 然后在此基础上证明 $\sigma(t, k)$ 和 $w_r(t, k)$ 的收敛性.

$$\begin{aligned} \Delta L(t, k) &= L(t, k) - L(t, k-1) = \\ &= -\frac{1}{2}\sigma^2(t, k-1) + \text{PartA} + \text{PartB}. \end{aligned} \quad (38)$$

考虑到 $\sigma(t, k)$ 的零初始条件, 式(38)中PartA为

$$\text{PartA} = \frac{1}{2}\sigma^2(t, k) = \int_0^t \sigma(\tau, k) \dot{\sigma}(\tau, k) d\tau, \quad (39)$$

式(38)的PartB为

$$\begin{aligned} \text{PartB} &= \frac{\varepsilon}{2a_n} \int_0^t ((f(\tau, \mathbf{r}) - w_r(\tau, k))^2 - \\ &= (f(\tau, \mathbf{r}) - w_r(\tau, k-1))^2) d\tau. \end{aligned} \quad (40)$$

将式(27)代入(39), 有

$$\begin{aligned} \text{PartA} &= \\ &= -\beta \int_0^t \sigma^2(\tau, k) d\tau + \int_0^t \sigma(\tau, k) (f(\tau, \mathbf{x}) - w_r(\tau, k)) d\tau. \end{aligned} \quad (41)$$

式(40)中的被积函数第2项可化为

$$\begin{aligned} &(f(\tau, \mathbf{r}) - w_r(\tau, k-1))^2 = \\ &(f - \text{sat}(w_r) + \text{sat}(w_r) - w_r)^2 = \\ &(f - \text{sat}(w_r))^2 - (w_r - \text{sat}(w_r))(2f - \text{sat}(w_r) - w_r). \end{aligned} \quad (42)$$

由 $\text{sat}(w_r)$ 的定义(29), 可以验证下式成立:

$$(w_r - \text{sat}(w_r))(2f - \text{sat}(w_r) - w_r) \leq 0. \quad (43)$$

因此, 由式(42)和(43), 有

$$\begin{aligned} &(f(\tau, \mathbf{r}) - w_r(\tau, k-1))^2 \geq \\ &(f(\tau, \mathbf{r}) - \text{sat}(w_r(\tau, k-1)))^2. \end{aligned} \quad (44)$$

从而由式(40)有

$$\begin{aligned} \text{PartB} &\leq \frac{\varepsilon}{2a_n} \int_0^t ((f(\tau, \mathbf{r}) - w_r(\tau, k))^2 - \\ &= (f(\tau, \mathbf{r}) - \text{sat}(w_r(\tau, k-1)))^2) d\tau. \end{aligned} \quad (45)$$

根据等式

$$(d-b)^2 - (d-c)^2 = -(b-c)^2 - 2(b-c)(d-b),$$

由式(45)有

$$\begin{aligned} \text{PartB} &\leq -\frac{\varepsilon}{2a_n} \int_0^t ((w_r(\tau, k) - \\ &= \text{sat}(w_r(\tau, k-1)))^2) d\tau - \\ &= \frac{\varepsilon}{2a_n} \int_0^t (f(\tau, \mathbf{r}) - w_r(\tau, k)) \times \\ &= (w_r(\tau, k) - \text{sat}(w_r(\tau, k-1))) d\tau. \end{aligned} \quad (46)$$

将学习律(28)代入(46), 有

$$\begin{aligned} \text{PartB} &\leq -\frac{a_n}{2\varepsilon} \int_0^t \sigma(\tau, k)^2 d\tau - \\ &= \int_0^t \sigma(\tau, k) (f(\tau, \mathbf{r}) - w_r(\tau, k)) d\tau. \end{aligned} \quad (47)$$

将式(41)和(47)代入(38), 有

$$\begin{aligned} \Delta L(t, k) &\leq -\frac{1}{2}\sigma^2(t, k-1) - \\ &= \left(\beta + \frac{a_n}{2\varepsilon}\right) \int_0^t \sigma^2(\tau, k) d\tau + \text{PartC}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\text{PartC} = \int_0^t \sigma(\tau, k) \cdot (f(\tau, \mathbf{x}) - f(\tau, \mathbf{r})) d\tau. \quad (49)$$

式(49)右边取绝对值, 有

$$\text{PartC} \leq \int_0^t |\sigma(\tau, k)| \cdot |f(\tau, \mathbf{x}) - f(\tau, \mathbf{r})| d\tau. \quad (50)$$

根据假设2中 f 的Lipschitz连续条件, 有

$$\text{PartC} \leq L_f \int_0^t |\sigma(\tau, k)| \cdot |e(\tau, k)| d\tau. \quad (51)$$

考虑到式(36), 有

$$\begin{aligned} \text{PartC} &\leq \\ &= L_f \int_0^t |\sigma(\tau, k)|^2 d\tau + \\ &= L_f \|A_c\| e^{\|A_c\|T} \cdot \int_0^t |\sigma(\tau, k)| \left(\int_0^\tau |\sigma(\tau_1, k)| d\tau_1 \right) d\tau. \end{aligned} \quad (52)$$

由于 $\tau \in [0, t]$, 由式(52)有

$$\begin{aligned} \text{PartC} &\leq \\ &= L_f \int_0^t |\sigma(\tau, k)|^2 d\tau + \\ &= L_f \|A_c\| e^{\|A_c\|T} \cdot \int_0^t |\sigma(\tau, k)| \left(\int_0^\tau |\sigma(\tau_1, k)| d\tau_1 \right) d\tau. \end{aligned} \quad (53)$$

对式(53)利用二重积分的性质, 有

$$\begin{aligned} \text{PartC} &\leq L_f \int_0^t |\sigma(\tau, k)|^2 d\tau + \\ &= L_f \|A_c\| e^{\|A_c\|T} \left(\int_0^t |\sigma(\tau, k)| d\tau \right)^2. \end{aligned} \quad (54)$$

对式(54)应用Cauchy-Schwarz不等式, 有

$$\begin{aligned} \text{PartC} &\leq L_f \int_0^t \sigma^2(\tau, k) d\tau + \\ &= L_f \|A_c\| e^{\|A_c\|T} t \int_0^t \sigma^2(\tau, k) d\tau. \end{aligned} \quad (55)$$

由于 $0 \leq t \leq T$, 由式(55)有

$$\text{PartC} \leq L_f (1 + \|A_c\| e^{\|A_c\|T} T) \int_0^t \sigma^2(\tau, k) d\tau. \quad (56)$$

将式(56)代入(48), 有

$$\begin{aligned} \Delta L(t, k) &\leq \\ &= -\frac{1}{2}\sigma^2(t, k-1) - \\ &= \left(\beta + \frac{a_n}{2\varepsilon} - L_f(1 + T\|A_c\|e^{\|A_c\|T})\right) \int_0^t \sigma^2 d\tau. \end{aligned} \quad (57)$$

选择 β 和 ε , 使得下式成立:

$$\beta + \frac{a_n}{2\varepsilon} \geq L_f(1 + T\|A_c\|e^{\|A_c\|T}), \quad (58)$$

则由式(57)有

$$\Delta L(t, k) \leq -\frac{1}{2}\sigma^2(t, k-1). \quad (59)$$

因此, $L(t, k)$ 在迭代域单调衰减. 下面证明 $L(t, k)$ 的有界性. $L(t, k)$ 的第1次迭代值为

$$L(t, 1) = \Delta L(t, 1) + L(t, 0). \quad (60)$$

将式(38)中 $k=1$ 的情况代入式(60), 同时考虑到 $w_r(t, 0) = 0$, 并采用从式(38)获得(59)相同的推导

过程, 有

$$L(t, 1) \leq \frac{\varepsilon}{2a_n} \int_0^t (f(\tau, \mathbf{r}))^2 d\tau - \left(\beta + \frac{a_n}{2\varepsilon} - L_f(1 + T\|A_c\|e^{\|A_c\|T}) \right) \int_0^t \sigma^2(\tau, 1) d\tau. \quad (61)$$

根据式(58)和 $f(t, \mathbf{r})$ 的有界性假设, 由式(61)有

$$L(t, 1) \leq \frac{\varepsilon}{2a_n} \int_0^t (f(\tau, \mathbf{r}))^2 d\tau \leq \frac{\varepsilon}{2a_n} \int_0^T (f(\tau, \mathbf{r}))^2 d\tau \leq \infty. \quad (62)$$

由式(62)可知 $L(t, 1)$ 有界. 又由 $L(t, k) \geq 0$ 及其随 k 单调下降可知, $L(t, k)$ 必有极限, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L(t, k) = 0. \quad (63)$$

由式(59)有

$$\begin{aligned} L(t, k) &= (L(t, k) - L(t, k-1)) + \dots + \\ & (L(t, 2) - L(t, 1)) + L(t, 1) = \\ & L(t, 1) + \sum_{j=2}^k \Delta L(t, j) \leq \\ & L(t, 1) - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^k \sigma^2(t, j-1). \end{aligned} \quad (64)$$

对式(64)的两边取极限, 有

$$\sum_{j=2}^{\infty} \sigma^2(t, j-1) \leq 2L(t, 1). \quad (65)$$

根据级数收敛的必要条件, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(t, k) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (66)$$

再根据式(36)有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(t, k) = 0, \quad t \in [0, T],$$

即式(31)成立. 由式(37)、(63)和(66)有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w_r(t, k) = f(t, \mathbf{r}).$$

即式(32)成立. \square

定理1显式地给出了系统不确定项 $f(t, \mathbf{x})$ 的估计方法. 该迭代学习控制方法不需要 $f(t, \mathbf{x})$ 的结构信息, 比自适应迭代学习控制有更好的适应性; 由于LIESO充分利用了其迭代机制, 不需要LESO中 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的条件也能保证估计误差的收敛, 因此可以避免控制峰值现象^[17-18], 能够保证控制量的平滑性.

3 仿真研究

考虑如下的二阶非线性不确定系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, k) = x_2(t, k), \\ \dot{x}_2(t, k) = f(t, \mathbf{x}) + u(t, k). \end{cases} \quad (67)$$

假设 $f(t, \mathbf{x})$ 满足定理1的条件, 但是结构和具体参数都未知. 仿真时取

$$f(t, \mathbf{x}) = \frac{g \sin x_1 - \frac{ml(x_2)^2 \cos x_1 \cdot \sin x_1}{m_c + m}}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m(\cos x_1)^2}{m_c + m} \right)}. \quad (68)$$

其中: $g = 9.8, m_c = 1, m = 0.1, l = 0.5$. 期望轨迹为

$$\begin{cases} r_1(t) = \sin t + \sin 2t, \\ r_2(t) = \cos t + 2 \cos 2t, \\ r_3(t) = \sin t - 4 \sin 2t. \end{cases} \quad (69)$$

系统状态初值为 $x_1(0, k) = 0, x_2(0, k) = 1$. 取式(22)中的参数 $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 3, \varepsilon = 0.05$; 式(25)的反馈增益 $\beta = 5$, 迭代10次后结果如图1~图5所示.

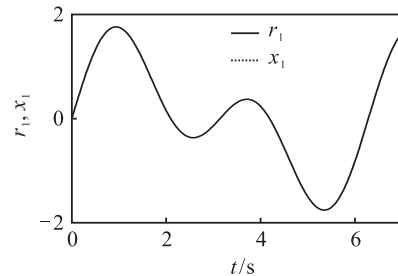


图1 迭代10次的 r_1 和 x_1

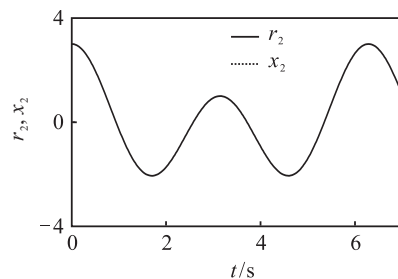


图2 迭代10次的 r_2 和 x_2

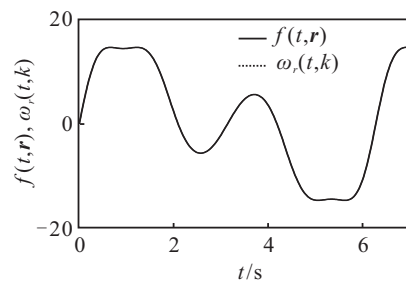


图3 未知项 $f(t, \mathbf{r})$ 及其估计 $w_r(t, k)$

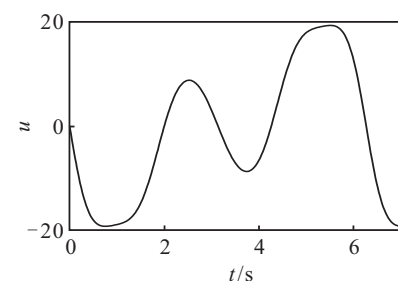


图4 迭代10次的控制输入 u

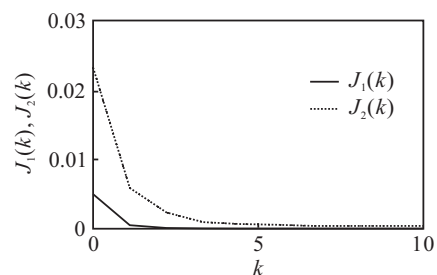


图5 性能评价指标 $J_1(k)$ 和 $J_2(k)$

上述仿真采用完全跟踪误差的最大值来评价控制效果. 图 5 中, $J_1(k) = \max_{t \in [0, T]} |e_1(t, k)|$, $J_2(k) = \max_{t \in [0, T]} |e_2(t, k)|$. 从仿真结果可以看出, x_i 迭代 10 次后几乎与 r_i 重合, 而 $w_r(t, k)$ 实现了对 $f(t, \mathbf{r})$ 的估计. 仿真结果表明, 对于形如系统 (1) 的不确定项的结构和参数都未知, 因不满足线性参数化条件而不能采用自适应迭代学习控制方法时, 可以应用本文的迭代学习控制方法.

4 结 论

本文提出了迭代扩张状态观测器的概念, 并给出了其在迭代学习控制中的应用, 理论证明和仿真结果都表明了所提出的方法是有效的. 该方法不要求未知项满足线性参数化条件, 具有比自适应迭代学习控制更宽的适用范围. 下一步的研究工作是对迭代扩张状态观测器的概念进行推广, 以便适合更复杂的被控对象, 并进一步研究非线性迭代扩张状态观测器的结构.

参考文献(References)

- [1] Yin C K, Xu J X, Hou Z S. An ILC scheme for a class of nonlinear systems with time-varying parameters subject to second-order internal model[C]. Proc of the 48th IEEE Conf on Decision and Control. Shanghai: IEEE, 2009: 452-457.
- [2] Yin C K, Xu J X, Hou Z S. A high-order internal model based iterative learning control for nonlinear systems with time-iteration-varying parameters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(11): 2665-2670.
- [3] 朱胜, 孙明轩, 何熊熊. 严格反馈非线性时变系统的迭代学习控制[J]. 自动化学报, 2010, 36(3): 454-458. (Zhu S, Sun M X, He X X. Iterative learning control of strict- feedback nonlinear time-varying systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(3): 454-458.)
- [4] Park B H, Kuct Y, Lee J S. Adaptive learning control of uncertain robotic systems[J]. Int J of Control, 1996, 65(5): 725-744.
- [5] Xu J X. Recent advances in iterative learning control[J]. Acta Automatica Sinica, 2005, 31(1): 132-142.
- [6] Xu J X, Xu J. On iterative learning from different tracking tasks in the presence of time-varying uncertainties[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2004, 34(1): 589-597.
- [7] Chi R H, Hou Z S, Xu J X. Adaptive ILC for a class of discrete-time systems with iteration-varying trajectory and random initial condition[J]. Automatica, 2008, 44(8): 2207-2213.
- [8] 池荣虎, 侯忠生. 基于学习自适应估计的迭代学习控制[J]. 仪器仪表学报, 2005, 26(8): 800-802. (Chi R H, Hou Z S. Iterative learning control scheme with learning adaptive estimate loop[J]. Chinese J of Scientific Instrument, 2008, 26(8): 800-802.)
- [9] 韩京清. 自抗扰控制技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008: 207-211. (Han J Q. Active Disturbance Rejection Control Technique[M]. Beijing: Press of National Defense Industry, 2008: 207-211.)
- [10] Han J Q. From PID to active disturbance rejection control[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2009, 56(3): 900-906.
- [11] Guo B Z, Zhao Z L. On the convergence of an extended state observer for nonlinear systems with uncertainty[J]. Systems & Control Letters, 2011, 60(6): 420-430.
- [12] Yang X X, Huang Y. Capability of extended state observer for estimating uncertainties[C]. Proc of the 2009 American Control Conf. St. Louis: IEEE, 2009: 3700-3705.
- [13] 黄一, 薛文超, 赵春哲. 自抗扰控制纵横谈[J]. 系统科学与数学, 2011, 31(9): 1111-1129. (Huang Y, Xue W C, Zhao C Z. Active disturbance rejection control: Methodology and theoretical analysis[J]. Journal of Systems Science & Mathematical Sciences, 2011, 31(9): 1111-1129.)
- [14] 侯忠生, 许建新. 数据驱动控制理论及方法的回顾和展望[J]. 自动化学报, 2009, 35(6): 650-667. (Hou Z S, Xu J X. On data-driven control theory: the state of the art and perspective[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(6): 650-667.)
- [15] Janssens P, Pipeleers G, Swevers J. A data-driven constrained norm-optimal iterative learning control framework for LTI systems[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2013, 21(2): 546-551.
- [16] Xu J X, Ying T. A composite energy function- based learning control approach for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(11): 1940-1945.
- [17] Cunba J P V S, Costa R R, Lizarralde F, et al. Peaking free variable structure control of uncertain linear systems based on a high-gain observer[J]. Automatica, 2009, 45(5): 1156-1164.
- [18] 王新华, 刘金琨. 微分器设计与应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2010: 144-155. (Wang X H, Liu J K. Differentiator design and application[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2010: 144-155.)

(责任编辑: 齐 霖)