文章编号: 1001-0920 (2014) 12-2259-06 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.1096

混合变时滞不确定中立型系统鲁棒稳定性分析

惠俊军[1,2], 张合新[1], 孔祥玉[1], 李国梁[1]

(1. 第二炮兵工程大学 自动控制工程系，西安 710025；2. 宝鸡市 150信箱11分箱，陕西 宝鸡 721013)

摘 要: 研究一类含混合变时滞不确定中立系统时滞相关鲁棒稳定性问题. 基于时滞中点值, 把时滞区间均分成两部分, 通过构造包含时滞中点信息的增广泛函和三重积分项的Lyapunov-Krasovskii (L-K) 泛函, 利用L-K稳定性定理、积分不等式方法和自由权矩阵技术, 建立了一种基于线性矩阵不等式 (LMI) 的、与离散时滞和中立时滞均相关的鲁棒稳定性判据. 数值算例表明, 该判据改善了已有文献的结论, 具有更低的保守性.

关键词: 中立系统；Lyapunov-Krasovskii 泛函；鲁棒稳定；时变时滞；线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

Stability analysis for uncertain neutral systems with mixed time-varying delays

HUI Jun-jun[1,2], *ZHANG He-xin*[1], *KONG Xiang-yu*[1], *LI Guo-liang*[1]

(1. Department of Automatic Control Engineering，The Second Artillery Engineering University，Xi’an 710025, China；2. Mailbox 150 Extension 11 of Baoji City，Baoji 721013，China. Correspondent：HUI Jun-jun，E-mail: ep22stone@163.com)

Abstract: The delay-dependent robust stability problem for uncertain neutral system with mixed time-varying delays is studied. The whole delay interval is partitioned into two equidistant subintervals at its central point and a new Lyapunov-Krasovskii(L-K) which contains some triple-integral terms and augment terms are introduced on these intervals. Then, by using the L-K stability theorem, the integral inequalities method together with the free weighting matrix approach, a neutral and discrete delay-dependent stability criteria for the system is formulated in terms of linear matrix inequalities(LMIs). Finally, the simulation results show that the proposed criterion improves some exist results and have less conservatism.

Key words: neutral system；Lyapunov-Krasovskii functional；robust stability；time-varying delay；linear matrix inequality

0 引 言

中立型时滞系统大量存在于各种工程实际中[1], 如人口生态学、无损传输线内的分布网络、热交换器、刚性环境下的机器人等. 在这类系统中, 时滞与系统状态及其导数均相关, 因此对它的稳定性分析比一般的时滞型系统更具复杂性. 近年来, 关于中立型系统的稳定性研究引起了国内外学者的广泛关注[2-17].

针对中立型时滞系统的稳定性分析, 可分为时滞相关和时滞无关两类. 一般情况下, 由于时滞相关条件比时滞无关条件具有更低的保守性, 多数研究集中于时滞相关条件的分析. 在这些成果中, 研究的热点问题归结于如何降低所得结论的保守性. 就研究方法而言, 可分为模型变换法[2,6,11]、自由权矩阵方法[3,7,14]、积分不等式法[4,9,12-13,15-16]和时滞分割方法[5,8,10]等. 其中: 文献 [2-5] 只考虑了离散时滞和中立时滞是已知常数的情况, 没有考虑时变时滞, 不具普遍性; 文献 [6-10] 研究了变时滞中立型系统的稳定性问题, 但所得结论只与离散时滞以及离散时滞的导数相关, 并不包含中立时滞的相关信息, 因而具有一定的保守性. 最近, 文献 [11-17] 针对混合变时滞的中立型系统进行研究, 得到了与离散时滞和中立时滞均相关的稳定性判据, 然而所得结论的保守性还有进一步降低的空间. 关于如何选取合适的L-K泛函以及恰当的界定技术, 在减小结论保守性的同时不会过多地增加理论分析和计算的复杂性, 是一个值得进一步研究的问题.

收稿日期: 2013-08-08；**修回日期:** 2014-02-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61077412).

作者简介: 惠俊军(1977−), 男, 博士生, 从事时滞系统鲁棒稳定性分析与控制的研究；张合新(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器制导与控制等研究.

本文针对含混合变时滞的不确定中立型系统, 基于时滞分割法, 构造一种新的L-K泛函, 在每一分割区间利用缩放程度较小的不等式界定泛函导数产生的交叉项. 与以往的构造方法不同, 对于每一分割区间, 构造了包含时滞中点信息项的增广泛函和三重积分项的泛函, 这样在充分利用系统时滞信息的同时引入较少的待定矩阵, 可以减小结论的保守性, 简化判据的形式. 仿真算例表明, 该判据改善了已有文献的结论, 具有更低的保守性.

1 问题描述

考虑下面含混合时变时滞的不确定中立型系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)-(C+\Delta C(t))\dot{x}(t-\tau(t))=\\(A+\Delta A(t))x(t)+(B+\Delta B(t))x(t-h(t)),\\x(\theta)=\phi(\theta),\ \dot{x}(\theta)=\varphi(\theta),\ \forall\theta\in[-\max(h_M,\tau),0].\end{cases}\tag{1}$$

其中: $x(t)\in\boldsymbol{R}^n$ 为状态变量; $\phi(\theta)$、$\dot{\varphi}(\theta)$ 为初始函数, 在 $[-\max(h_M,\tau),0]$ 内是连续可微的; $h(t)$、$\tau(t)$ 分别为时变离散时滞和中立时滞, 且满足

$$\begin{cases}0\leqslant h_m\leqslant h(t)\leqslant h_M,\ \dot{h}(t)\leqslant\mu,\\0\leqslant\tau(t)\leqslant\tau,\ \dot{\tau}(t)\leqslant\eta<1;\end{cases}\tag{2}$$

A、B、C 为适当维数的已知定常矩阵; $\Delta A(t)$、$\Delta B(t)$、$\Delta C(t)$ 为具有时变结构不确定性的未知矩阵, 可描述为

$$[\ \Delta A(t)\ \ \Delta B(t)\ \ \Delta C(t)\ ]=DF(t)[\ E_a\ \ E_b\ \ E_c\ ].\tag{3}$$

这里: D、E_a、E_b 和 E_c 为适当维数的定常矩阵; $F(t)$ 是具有可测元的不确定矩阵, 且满足

$$F(t)^{\mathrm{T}}F(t)\leqslant I,\ \forall t,\tag{4}$$

I 为适当维数的单位矩阵. 当 $F(t)=0$ 时, 系统变为标称线性中立系统.

为便于证明, 现将文中将用到的引理归纳如下.

引理 1[18] 对于任意定常矩阵 $W\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, $W=W^{\mathrm{T}}>0$, 标量 $h:=h(t)>0$ 和向量函数 $\dot{x}:[-h,0]\to\boldsymbol{R}^n$, 假设以下相关积分项有定义, 则有

$$-h\int_{t-h}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)W\dot{x}(s)\mathrm{d}s\leqslant\varsigma_1^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}-W&W\\W&-W\end{bmatrix}\varsigma_1(t),$$

$$-\frac{h^2}{2}\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)W\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\leqslant$$

$$\varsigma_2^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}-W&W\\W&-W\end{bmatrix}\varsigma_2(t).$$

其中

$$\varsigma_1^{\mathrm{T}}(t)=[\ x^{\mathrm{T}}(t)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h)\ ],$$

$$\varsigma_2^{\mathrm{T}}(t)=\left[\ hx^{\mathrm{T}}(t)\ \ \int_{t-h}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \right].$$

引理 2[13] 假设 $h_1\leqslant h(t)\leqslant h_2$, 其中 $h(t):\boldsymbol{R}_+\to\boldsymbol{R}_+$, 则对于任意的 $R=R^{\mathrm{T}}>0$, 下面的不等式成立:

$$-\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{x}(s)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\delta^{\mathrm{T}}(t)\{(h_2-h(t))TR^{-1}T^{\mathrm{T}}+(h(t)-h_1)YR^{-1}Y^{\mathrm{T}}+$$

$$[\ Y\ \ -Y+T\ \ -T\ ]+[\ Y\ \ -Y+T\ \ -T\ ]^{\mathrm{T}}\}\delta(t).$$

其中

$$\delta^{\mathrm{T}}(t)=[\ x^{\mathrm{T}}(t-h_1)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h(t))\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h_2)\ ],$$

$$T=[\ T_1^{\mathrm{T}}\ \ T_2^{\mathrm{T}}\ \ T_3^{\mathrm{T}}\ ]^{\mathrm{T}},\ Y=[\ Y_1^{\mathrm{T}}\ \ Y_2^{\mathrm{T}}\ \ Y_3^{\mathrm{T}}\ ]^{\mathrm{T}}.$$

引理 3[19] 假设 $\gamma_1\leqslant\gamma(t)\leqslant\gamma_2$, 其中 $\gamma(\cdot):\boldsymbol{R}_+\to\boldsymbol{R}_+$, 则对于任意适当维数的常数矩阵 $\varXi_1$、$\varXi_2$ 和 $\varOmega$, 下面的矩阵不等式成立:

$$\varOmega+(\gamma(t)-\gamma_1)\varXi_1+(\gamma_2-\gamma(t))\varXi_2<0,$$

当且仅当

$$\varOmega+(\gamma_2-\gamma_1)\varXi_1<0,\ \varOmega+(\gamma_2-\gamma_1)\varXi_2<0.$$

引理 4[20] 给定具有适当维数的矩阵 $Q=Q^{\mathrm{T}}$ 以及 H 和 E, 则有 $Q+HF(t)E+E^{\mathrm{T}}F(t)^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}<0$, 对于任意满足 $F(t)^{\mathrm{T}}F(t)\leqslant I$ 的 $F(t)$ 成立的充要条件是存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$Q+\varepsilon^{-1}HH^{\mathrm{T}}+\varepsilon E^{\mathrm{T}}E<0.$$

2 主要结论

首先考虑系统 (1) 的标称系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)-C\dot{x}(t-\tau(t))=Ax(t)+Bx(t-h(t)),\\x(\theta)=\phi(\theta),\ \dot{x}(\theta)=\varphi(\theta),\ \forall\theta\in[-\max(h_M,\tau),0].\end{cases}\tag{5}$$

定理 1 对于给定常数 h_m、h_M、τ、μ 和 η, 如果存在正定对称矩阵

$$P=\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\ *&P_{22}&P_{23}\\ *&*&P_{33}\end{bmatrix},$$

$S_i\,(i=1,\cdots,4)$, $R_j\,(j=1,\cdots,5)$, Z 和适当维数的自由矩阵 K_1、K_2、T_a、$Y_a\,(a=1,2,3)$, 使得如下 LMIs 成立:

$$\begin{bmatrix}\varPhi&\sqrt{\delta}Y\\ *&-R_4\end{bmatrix}<0,\tag{6}$$

$$\begin{bmatrix}\varPhi&\sqrt{\delta}T\\ *&-R_4\end{bmatrix}<0,\tag{7}$$

则系统 (5) 是渐近稳定的. 其中

$$\varPhi=(\varPhi_{i,j})_{9\times9},$$

$$\varPhi_{11}=P_{12}+P_{12}^{\mathrm{T}}+S_1+S_2+S_3+$$

$$N-R_3-h_\delta^2Z+K_1A+A^{\mathrm{T}}K_1^{\mathrm{T}},$$

$$\varPhi_{12}=R_3-P_{12}+P_{13},\ \varPhi_{13}=K_1B,\ \varPhi_{14}=-P_{13},$$

$$\varPhi_{15}=P_{11}-K_1+A^{\mathrm{T}}K_2^{\mathrm{T}},\ \varPhi_{16}=K_1C,$$

$$\varPhi_{17}=P_{22}^{\mathrm{T}}+h_\delta Z,\ \varPhi_{18}=P_{32}^{\mathrm{T}},$$
$$\varPhi_{22}=-R_3-S_1+Y_1+Y_1^{\mathrm{T}},$$
$$\varPhi_{23}=-Y_1+T_1+Y_2^{\mathrm{T}},\ \varPhi_{24}=-T_1+Y_3^{\mathrm{T}},$$
$$\varPhi_{27}=-P_{22}^{\mathrm{T}}+P_{23}^{\mathrm{T}},\ \varPhi_{28}=-P_{32}^{\mathrm{T}}+P_{33}^{\mathrm{T}},$$
$$\varPhi_{33}=-(1-\mu)S_2-Y_2-Y_2^{\mathrm{T}}+T_2+T_2^{\mathrm{T}},$$
$$\varPhi_{34}=-T_2-Y_3^{\mathrm{T}}+T_3^{\mathrm{T}},\ \varPhi_{35}=B^{\mathrm{T}}K_2^{\mathrm{T}},$$
$$\varPhi_{44}=-S_3-T_3-T_3^{\mathrm{T}},\ \varPhi_{47}=-P_{23}^{\mathrm{T}},\ \varPhi_{48}=-P_{33}^{\mathrm{T}},$$
$$\varPhi_{55}=M-K_2-K_2^{\mathrm{T}},\ \varPhi_{56}=K_2C,\ \varPhi_{57}=P_{21}^{\mathrm{T}},$$
$$\varPhi_{58}=P_{31}^{\mathrm{T}},\ \varPhi_{66}=-(1-\eta)S_4,\ \varPhi_{77}=-R_1-Z,$$
$$\varPhi_{88}=-R_2,\ \varPhi_{99}=-R_5,\ \delta=(h_M-h_m)/2,$$
$$M=h_\delta^2R_3+(h_M-h_\delta)R_4+\tau^2R_5+S_4+\frac{1}{4}h_\delta^4Z,$$
$$N=h_\delta^2R_1+(h_M-h_\delta)^2R_2,\ h_\delta=(h_M+h_m)/2,$$
$$Y=[\,0\ \ Y_1^{\mathrm{T}}\ \ Y_2^{\mathrm{T}}\ \ Y_3^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,]^{\mathrm{T}},$$
$$T=[\,0\ \ T_1^{\mathrm{T}}\ \ T_2^{\mathrm{T}}\ \ T_3^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,]^{\mathrm{T}},$$
$$K=[\,K_1^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ K_2^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,]^{\mathrm{T}},$$

$\varPhi$ 中的其他未列项均为 0.

证明 首先基于时滞中点值 h_δ 把时滞区间 $[h_m, h_M]$ 均分成两部分, 即 $[h_m,h_\delta]$ 和 $[h_\delta,h_M]$. 下面分两种情况进行讨论.

1) 当 $h(t)\in[h_\delta,h_M]$ 时, 构造如下 L-K 泛函:

$$V_1(t)=V_{11}(t)+V_{12}(t)+V_{13}(t)+V_{14}(t). \tag{8}$$

其中

$$V_{11}(t)=\xi_1^{\mathrm{T}}(t)P\xi_1(t),$$
$$V_{12}(t)=\int_{t-h_\delta}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)S_1x(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)S_2x(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h_M}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)S_3x(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)S_4\dot x(s)\mathrm{d}s,$$
$$V_{13}(t)=h_\delta\int_{-h_\delta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)R_1x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+(h_M-h_\delta)\int_{-h_M}^{-h_\delta}\int_{t+\theta}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)R_2x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+h_\delta\int_{-h_\delta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)R_3\dot x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\int_{-h_M}^{-h_\delta}\int_{t+\theta}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)R_4\dot x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\tau\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)R_5\dot x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$
$$V_{14}(t)=\frac{h_\delta^2}{2}\int_{-h_\delta}^{0}\int_{\theta}^{0}\int_{t+\lambda}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)Z\dot x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta,$$
$$\xi_1^{\mathrm{T}}(t)=\left[\ x^{\mathrm{T}}(t)\ \ \int_{t-h_\delta}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \ \int_{t-h_M}^{t-h_\delta}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \right].$$

取 L-K 泛函 $V_1(t)$ 对时间的导数, 有

$$\begin{aligned}\dot V_1(t)=\ &\dot V_{11}(t)+\dot V_{12}(t)+\dot V_{13}(t)+\dot V_{14}(t)=\\&2\xi_1^{\mathrm{T}}(t)P\dot\xi_1(t)+x^{\mathrm{T}}(t)(S_1+S_2+S_3+N)x(t)-\\&x^{\mathrm{T}}(t-h_\delta)S_1x(t-h_\delta)-x^{\mathrm{T}}(t-h_M)S_3x(t-h_M)-\\&(1-\dot h(t))x^{\mathrm{T}}(t-h(t))S_2x(t-h(t))+\dot x^{\mathrm{T}}(t)M\dot x(t)-\\&(1-\dot\tau(t))\dot x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))S_4\dot x(t-\tau(t))-\\&h_\delta\int_{t-h_\delta}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)R_1x(s)\mathrm{d}s-\int_{t-h_M}^{t-h_\delta}\dot x^{\mathrm{T}}(s)R_4\dot x(s)\mathrm{d}s-\\&h_\delta\int_{t-h_\delta}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)R_3\dot x(s)\mathrm{d}s-\tau\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)R_5\dot x(s)\mathrm{d}s-\\&(h_M-h_\delta)\int_{t-h_M}^{t-h_\delta}x^{\mathrm{T}}(s)R_2x(s)\mathrm{d}s-\\&\frac{h_\delta^2}{2}\int_{-h_\delta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)Z\dot x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta.\end{aligned} \tag{9}$$

由系统方程 (5) 有

$$\begin{aligned}&2[x^{\mathrm{T}}(t)K_1+\dot x^{\mathrm{T}}(t)K_2]\times[Ax(t)+\\&Bx(t-h(t))+C\dot x(t-\tau(t))-\dot x(t)]=0.\end{aligned} \tag{10}$$

其中 K_1、K_2 为适当维数的自由权矩阵.

用 Jensen's 不等式处理 $\dot V_1(t)$ 中的交叉项

$$-h_\delta\int_{t-h_\delta}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)R_1x(s)\mathrm{d}s,\ -\tau\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)R_5\dot x(s)\mathrm{d}s,$$

和

$$-(h_M-h_\delta)\int_{t-h_M}^{t-h_\delta}x^{\mathrm{T}}(s)R_2x(s)\mathrm{d}s;$$

用引理 1 和引理 2 分别处理交叉项

$$h_\delta\int_{t-h_\delta}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)R_3\dot x(s)\mathrm{d}s,$$
$$-\frac{h_\delta^2}{2}\int_{-h_\delta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)Z\dot x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$
$$\int_{t-h_M}^{t-h_\delta}\dot x^{\mathrm{T}}(s)R_4\dot x(s)\mathrm{d}s,$$

并结合式 (2) 和 (10), 则 $\dot V_1(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned}\dot V_1(t)\leqslant\ &\zeta_1^{\mathrm{T}}(t)(\varPhi+(h_M-h(t))TR_4^{-1}T^{\mathrm{T}}+\\&(h(t)-h_\delta)YR_4^{-1}Y^{\mathrm{T}})\zeta_1(t).\end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}\zeta_1^{\mathrm{T}}(t)=\ &\Big[\ x^{\mathrm{T}}(t)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h_\delta)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h(t))\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h_M)\ \rightarrow\\&\leftarrow\ \ \dot x^{\mathrm{T}}(t)\ \ \dot x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\ \ \int_{t-h_\delta}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \rightarrow\\&\leftarrow\ \ \int_{t-h_M}^{t-h_\delta}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \ \int_{t-\tau(t)}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \Big].\end{aligned}$$

2) 当 $h(t)\in[h_m,h_\delta]$ 时, 构造如下 L-K 泛函:

$$V_2(t)=V_{21}(t)+V_{22}(t)+V_{23}(t)+V_{24}(t). \tag{12}$$

其中

$$V_{21}(t)=\xi_2^{\mathrm{T}}(t)P\xi_2(t),$$
$$V_{22}(t)=\int_{t-h_\delta}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)S_1x(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)S_2x(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h_m}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)S_3x(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)S_4\dot x(s)\mathrm{d}s,$$

$$V_{23}(t)=h_\delta\int_{-h_\delta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)R_1x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+ (h_\delta-h_m)\int_{-h_\delta}^{-h_m}\int_{t+\theta}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)R_2x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+ h_\delta\int_{-h_\delta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R_3\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+ \int_{-h_\delta}^{-h_m}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R_4\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+ \tau\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R_5\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

$$V_{24}(t)=\frac{h_\delta^2}{2}\int_{-h_\delta}^{0}\int_{\theta}^{0}\int_{t+\lambda}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta,$$

$$\xi_2^{\mathrm{T}}(t)=\left[\begin{array}{ccc}x^{\mathrm{T}}(t) & \int_{t-h_\delta}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s & \int_{t-h_\delta}^{t-h_m}x^{T}(s)\mathrm{d}s\end{array}\right].$$

其中: P, $S_i\,(i=1,\cdots,4)$, $R_j\,(j=1,\cdots,5)$ 和 Z 与 $V_1(t)$ 中定义的矩阵变量相同. 采用同样的推导方法并定义增广向量

$$\zeta_2^{\mathrm{T}}(t)= \Big[\,x^{\mathrm{T}}(t)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h_\delta)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h(t))\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h_m)\ \rightarrow \leftarrow\ \ \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\ \ \dot{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\ \ \int_{t-h_\delta}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \rightarrow \leftarrow\ \ \int_{t-h_\delta}^{t-h_m}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \ \int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\,\Big].$$

则有

$$\dot{V}_2(t)\leqslant\zeta_2^{\mathrm{T}}(t)(\varPhi+(h_\delta-h(t))TR_4^{-1}T^{\mathrm{T}}+ (h(t)-h_m)YR_4^{-1}Y^{\mathrm{T}})\zeta_2(t). \tag{13}$$

综合以上两种情况: 如果 $\forall h(t)\in[h_\delta,h_M]$, 有

$$\varPhi+(h_M-h(t))TR_4^{-1}T^{\mathrm{T}}+ (h(t)-h_\delta)YR_4^{-1}Y^{\mathrm{T}}<0; \tag{14}$$

如果 $\forall h(t)\in[h_m,h_\delta]$, 有

$$\varPhi+(h_\delta-h(t))TR_4^{-1}T^{\mathrm{T}}+ (h(t)-h_m)YR_4^{-1}Y^{\mathrm{T}}<0. \tag{15}$$

则存在 $\varepsilon_i>0\,(i=1,2)$ 使 $\dot{V}_i(t)<-\varepsilon_i||x(t)||^2$, $i=1,2$. 由 L-K 稳定性定理可知系统 (5) 渐近稳定.

对式 (14) 和 (15) 应用引理 3, 可得不等式组

$$\varPhi+(h_M-h_\delta)TR_4^{-1}T^{\mathrm{T}}<0, \tag{16}$$

$$\varPhi+(h_M-h_\delta)YR_4^{-1}Y^{\mathrm{T}}<0; \tag{17}$$

和不等式组

$$\varPhi+(h_\delta-h_m)TR_4^{-1}T^{\mathrm{T}}<0, \tag{18}$$

$$\varPhi+(h_\delta-h_m)YR_4^{-1}Y^{\mathrm{T}}<0. \tag{19}$$

因 $h_\delta-h_m=h_M-h_\delta=\delta$, 故不等式 (16)、(17) 分别等价于 (18)、(19). 对式 (16)、(17) 应用 Schur 补, 即可得 (6) 和 (7). □

注 1 在定理 1 中, 基于时滞中点值把时滞区间均分为两个子区间, 一方面, 针对每一分割区间构造了包含时滞中点信息的增广泛函和三重积分泛函项, 充分考虑了系统的时滞信息; 另一方面, 利用缩放程度更小的不等式 (引理 2) 在各自的区间处理泛函导数产生的交叉项, 减小了放大程度, 同时引入少数自由权矩阵表示相关项之间的关系, 有利于降低结论的保守性.

下面考虑不确定系统 (1) 的鲁棒稳定性问题.

定理 2 对于给定常数 h_m、h_M、τ、μ 和 η, 如果存在标量 $\varepsilon>0$, 正定对称矩阵

$$P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ * & P_{22} & P_{23}\\ * & * & P_{33}\end{bmatrix},$$

$S_i\,(i=1,\cdots,4)$, $R_j\,(j=1,\cdots,5)$, Z 和适当维数的自由矩阵 K_1、K_2、T_a、$Y_a\,(a=1,2,3)$, 使得如下 LMIs 成立:

$$\begin{bmatrix}\varPhi_1 & \varGamma_1^{\mathrm{T}}D & \varepsilon\varGamma_2^{\mathrm{T}}\\ * & -\varepsilon I & 0\\ * & * & -\varepsilon I\end{bmatrix}<0, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix}\varPhi_2 & \varGamma_1^{\mathrm{T}}D & \varepsilon\varGamma_2^{\mathrm{T}}\\ * & -\varepsilon I & 0\\ * & * & -\varepsilon I\end{bmatrix}<0, \tag{21}$$

则系统 (1) 是渐近稳定的. 其中

$$\varPhi_1=\begin{bmatrix}\varPhi & \sqrt{\delta}Y\\ * & -R_4\end{bmatrix},\ \varPhi_2=\begin{bmatrix}\varPhi & \sqrt{\delta}T\\ * & -R_4\end{bmatrix},$$

$$\varGamma_1=[\,K_1^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ K_2^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,],$$

$$\varGamma_2=[\,E_a\ \ 0\ \ E_b\ \ 0\ \ 0\ \ E_c\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,].$$

证明 仿照定理 1 的证明, 将式 (6) 和 (7) 中 $\varPhi$ 里的 A、B、C 分别替换成 $A+\Delta A$、$B+\Delta B$ 和 $C+\Delta C$, 结合引理 4 即可证明. □

3 数值例子

下面通过两个数值实例验证本文方法的有效性.

例 1 考虑不确定中立型系统 (1), 其中

$$A=\begin{bmatrix}-2+\delta_1 & 0\\ 0 & -1+\delta_2\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}-1+\delta_3 & 0\\ -1 & -1+\delta_4\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}c & 0\\ 0 & c\end{bmatrix}.$$

这里 $0\leqslant|c|<1$; δ_1、δ_2、δ_3 和 δ_4 为未知参数, 且满足 $|\delta_1|\leqslant1.6$, $|\delta_2|\leqslant0.05$, $|\delta_3|\leqslant0.1$, $|\delta_4|\leqslant0.3$.

下面分两种情况讨论系统的稳定性.

1) 当 $\mu=0.1$, $\eta=0$ 时, 对于不同的参数 c, 由本文定理 2 计算得到系统稳定所允许的最大时滞上界值见表 1. 由表 1 可以看出, 随着 c 的增加, 系统稳定所允许的最大时滞上界将逐渐减低. 与文献 [7,11,14-16] 相比, 本文定理 2 具有更低的保守性, 尤其当 c 取较小的数值时.

表 1　不同的 c 下系统允许的最大时滞上界 (例 1)

方法	c							
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
文献 [7]	0.92	0.73	0.55	0.41	0.29	0.19	0.11	0.04
文献 [11]	0.97	0.78	0.60	0.45	0.31	0.19	0.10	0.02
文献 [14]	1.1072	0.9208	0.7516	0.5991	0.4625	0.3402	0.2310	0.1277
文献 [15]	1.3209	1.0777	0.8701	0.6827	0.5123	0.3596	0.2419	0.1450
文献 [16]	1.3519	1.1127	0.8972	0.7055	0.5366	0.3882	0.2568	0.1355
本文定理 2	1.3913	1.1439	0.9158	0.7097	0.5366	0.3734	0.2445	0.1346

表 2　当 $\eta=0.1$ 时不同的 μ 下系统允许的最大时滞上界 (例 1)

方法	μ								
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	$\geqslant 1$
文献 [11]	0.81	0.77	0.73	0.68	0.62	0.57	0.50	0.42	—
文献 [14]	0.9404	0.9109	0.8825	0.8537	0.8253	0.7980	0.7711	0.7472	0.7216
文献 [15]	1.1454	1.0657	0.9974	0.9426	0.9007	0.8732	0.8592	0.8558	0.9376
文献 [16]	1.1485	1.1004	1.0576	1.0266	1.0032	0.9858	0.9754	0.9709	0.9708
本文定理 2	1.1859	1.1310	1.0779	1.0275	0.9866	0.9766	0.9748	0.9748	0.9748

2) 当 $c=0.1$, $\eta=0.1$ 时, 对于不同的 μ 系统允许的最大时滞上界如表 2 所示. 由表 2 可知, 相比文献 [11,14-16], 本文方法具有更低的保守性.

例 2　考虑另一不确定中立型系统 (1), 其中

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}c & 0\\ 0 & c\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0.01 & 0\\ 0 & 0.04\end{bmatrix},$$

$$E_a=\begin{bmatrix}160 & 0\\ 0 & 1.25\end{bmatrix},\ E_b=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 7.5\end{bmatrix},$$

$$E_c=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

1) 当 $\mu=0.1$, $\eta=0$ 时, 对于不同的 c, 系统允许的最大时滞上界如表 3 所示.

2) 当 $c=0.1$, $\eta=0.1$ 时, 对于不同的 μ, 系统允许的最大时滞上界如表 4 所示.

表 3　不同的 c 下系统允许的最大时滞上界 (例 2)

方法	c							
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
文献 [14]	1.107	0.920	0.751	0.599	0.462	0.340	0.231	0.127
文献 [17]	1.166	0.962	0.778	0.616	0.472	0.346	0.235	0.130
文献 [13]	1.177	0.971	0.786	0.622	0.478	0.349	0.235	0.130
本文定理 2	1.3933	1.1353	0.9024	0.6977	0.5215	0.3718	0.2453	0.1353

表 4　当 $\eta=0.1$ 时不同的 μ 下系统允许的最大时滞上界 (例 2)

方法	μ								
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	$\geqslant 1$
文献 [14]	0.9404	0.9109	0.8825	0.8537	0.8253	0.7980	0.7711	0.7472	0.7216
文献 [13]	0.9770	0.9608	0.9516	0.9503	0.9502	0.9501	0.9499	0.9499	0.9499
本文定理 2	1.1642	1.1220	1.0819	1.0444	1.0179	1.0148	1.0142	1.0142	1.0142

由表 3 和表 4 可以看出, 本文方法改善了文献 [13-14,17] 的结论, 具有更低的保守性.

4　结　论

本文研究了一类含混合变时滞不确定中立系统时滞相关鲁棒稳定性问题. 在考虑不确定性为泛数有界情况下, 基于 L-K 泛函、积分不等式、自由权矩阵和线性矩阵不等式方法, 建立了新的时滞相关鲁棒稳定性判据. 该稳定性判据不仅与离散时滞相关, 而且与中立时滞相关. 数值仿真算例表明了所提出判据的有效性.

参考文献(References)

[1] Niculescu S I. Delay effects on stability: A robust control approach[M]. Berlin: Springer, 2001: 1-8.

[2] Han Q L. Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type[J]. Automatica, 2002, 38(4): 719-723.

[3] He Y, Wu M, She J H, et al. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays[J]. Systems and Control Letters, 2004, 51(1): 57-65.

[4] Sun J, Liu G P, Chen J. Delay-dependent stability and stabilization of neutral time-delay systems[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19(10): 1364-1375.

[5] 李涛, 张合新, 孟飞. 混合时滞不确定中立系统鲁棒稳定的时滞分割方法[J]. 控制与决策, 2011, 26(1): 106-110. (Li T, Zhang H X, Meng F. Delay-partitioning approach to robust stability of uncertain neutral system with mixed delays[J]. Control and Decision, 2011, 26(1): 106-110.)

[6] Kwon O M, Park J H, Lee S M. On stability criteria for uncertain delay-differential systems of neutral type with time-varying delays[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 197(1): 864-873.

[7] Zhao Z, Wang W, Yang B. Delay and its time-derivative dependent robust stability of neutral control system[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 187(2): 1326-1332.

[8] Qiu F, Cui B T, Ji Y. A delay-dividing approach to stability of neutral system with mixed delays and nonlinear perturbations[J]. Applied Mathematical Modelling, 2010, 34(11): 3701-3707.

[9] 钱伟, 孙优贤. 中立型变时滞系统的鲁棒稳定性[J]. 控制理论与应用, 2010, 27(3): 358-362.
(Qian W, Sun Y X. New robust stability criterion for uncertain neutral systems with time-varying delay[J]. Control Theory & Applications, 2010, 27(3): 358-362.)

[10] Liu P L. A delay decomposition approach to stability analysis of neutral systems with time-varying delay[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(7): 5013-5026.

[11] Han Q L, Yu L. Robust stability of linear neutral systems with nonlinear parameter perturbations[J]. IEE Proc of Control Theory and Application, 2004, 151(5): 539-546.

[12] Kwon O M, Park J H, Lee S M. On delay-dependent robust stability of uncertain neutral systems with time-varying delay[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 203(2): 843-853.

[13] Ramakrishnan K, Ray G. Robust stability criteria for uncertain neutral systems with interval time-varying delay[J]. J of Optimal Theory and Application, 2011, 149(2): 366-384.

[14] Qiu F, Cui B T, Ji Y. Further results on robust stability of neutral system with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(2): 895-906.

[15] Rakkiyappan R, Balasubramaniam P, Krishnasamy R. Delay dependent stability analysis of neutral systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations[J]. J of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235(8): 2147-2156.

[16] Lakshmanan S, Senthilkumar T, Balasubramaniam P. Improved results on robust stability of neutral systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(11): 5355-5368.

[17] Yu K W, Lien C H. Stability criteria for uncertain neutral systems with interval time-varying delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 38(3): 650-657.

[18] Zhang X M, Han Q L. A delay decomposition approach to delay-dependent stability for linear systems with time-varying delays[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19(17): 1922-1930.

[19] Yue D, Tian D, Zhang Y. A piecewise analysis method to stability analysis of continuous/discrete systems with time-varying delay[J]. Int J of Robust Nonlinear Control, 2009, 19(13): 1493-1518.

[20] Petersen I R, Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems[J]. Automatica, 1986, 22(4): 397-411.

(责任编辑：李君玲)