第 29 卷 第 12 期
Vol. 29 No. 12

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 12 月
Dec. 2014

文章编号: 1001-0920 (2014) 12-2253-06　　DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.1137

考虑多个RMAs的单机调度问题

吴花平[1], 黄　敏[2], 王兴伟[2]

(1. 重庆理工大学 会计学院，重庆 400054；2. 东北大学 a. 信息科学与工程学院，b. 流程工业综合自动化国家重点实验室，沈阳 110004)

摘　要: 在处理时间不断恶化的情况下, 针对插入多个机器维护阶段 (RMAs) 和考虑交货期安排的单机调度问题展开研究, 目标是最小化提前和拖期惩罚. 产品加工过程中, 在处理工件之前插入多个 RMAs 可以降低恶化现象从而恢复机器的生产效率, 目的是同时找到最优序列、最优松弛时间和 RMAs 的最优位置以使提前和拖期惩罚最小. 根据问题的特点, 提出了相关的性质和定理, 通过证明得出了最优的松弛时间. 最后, 证明了该问题在多项式时间内是可解的.

关键词: 单机调度；交货期安排；恶化工件；松弛时间；多个机器维护阶段

中图分类号: TP18　　**文献标志码:** A

Single-machine scheduling problem with multi-RMAs

WU Hua-ping[1], *HUANG Min*[2], *WANG Xing-wei*[2]

(1. Accounting School，Chongqing University of Technology，Chongqing 400054，China；2a. College of Information Science and Engineering，2b. State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries Technology, Northeastern University，Shenyang 110004，China．Correspondent：WU Hua-ping，E-mail：wuhuaping2010@126.com)

Abstract: The single-machine scheduling problem with multi-rate-modifying activities(multi-RMAs) and due date assignment is considered under the case of processing time deteriorating. The object is to minimize earliness and tardiness penalties. In the processing of jobs, several rate-modifying activities are allowed to insert before processing a job in order to decrease deterioration phenomenon and recover the capability of a single machine. The aim is to minimize the total earliness and tardiness penalties through finding jointly the optimal scheduling sequence, the optimal common slack time and the optimal inserting positions of multi-RMAs. According to the characteristics of the problem, several propositions and theorem are proposed, and the optimal slack time is given by proof. Finally, it is proved that the problem is solvable in polynominal time.

Key words: single-machine scheduling；due date assignment；deteriorating jobs；slack time；multi-rate-modifying activities

0 引　言

在销售谈判过程中, 制造商提供给客户一个交货期, 当交货期延迟时, 会给客户一个折扣(即对自己的惩罚). 许多情况下, 交货期是通过协商而不是简单地由其中一方指定的. 从制造商的利益出发, 交货期越晚, 产品交货的准时性就越高. 但是, 制造商为了在客户中维持良好的声誉, 许多制造商宁愿容忍合理的惩罚而满足客户对交货期的要求, 在此情况下, 决策者需要在未准时交货时承担的惩罚和履行准时交货时获得的利益之间寻找一个平衡点, 使其损失降到最低[1-2]. 针对该问题, 许多学者从不同的角度对其进行了研究[3-5]. 另一方面, 制造商需要考虑在生产过程中由于机器磨损、发热以及劳动力疲惫等因素造成处理效率不断恶化的现象, 为提高处理效率, 引入了恢复过程, 又称为速率修改操作 (RMA), 也称为机器维护阶段. Lee 等[6]首先提出了 RMA 的概念, 即如

收稿日期: 2013-08-21；**修回日期:** 2014-01-14.

基金项目: 国家杰出青年科学基金项目(71325002, 61225012)；国家自然科学基金项目(71071028, 70931001, 71021061)；高等学校博士学科点专项科研基金优先发展领域项目(20120042130003)；高等学校博士学科点专项科研基金项目(20110042110024)；中央高校基本科研业务费专项资金项目(N110204003, N120104001).

作者简介: 吴花平(1982−), 女, 讲师, 博士, 从事调度理论与优化、风险管理的研究；黄敏(1968−), 女, 教授, 博士生导师, 从事物流与供应链管理、生产计划与调度、风险管理和软计算等研究.

果机器被停止工作一段时间或维护之后, 机器的处理效率将从次优状态恢复到原先的正常状态. 之后, Lodree 等[7]将人类的特点引入到调度模型中. 受此启发, Lodree 等[8]将 RMA 与机器调度问题结合在一起, 并假设每个工件的处理时间为常数 1, 以及处理时间的恶化依赖于一个简单的线性恶化模型. 关于恶化效应和 RMA 仅有少数文献对此进行了研究, 主要基于在恶化效应情况下, 针对带有一个 RMA 的单机调度问题展开了研究, 目的是在使目标函数最优化的同时确定一个 RMA 的位置[9-14]. 上述研究主要集中于在单机调度过程中加入一个 RMA, 而对于多个机器维护阶段 (RMAs) 以及同时最小化提前和拖期惩罚的调度问题在现有文献中并未考虑.

在实际生产过程中, 多个 RMAs 的调度问题更为一般化. 例如在一个订单的完成过程中, 企业需要多次对机器进行日常维护保养, 安排工人适当休息等以提高订单的完成效率. 对此, 本文研究了处理时间非线性恶化和多个 RMAs 最小化提前和拖期惩罚的交货期安排的单机调度问题. 根据问题的特点, 提出了相关的性质和定理, 通过证明得出了最优的松弛时间, 并证明了该问题在多项式时间内是可解的.

1 问题描述

首先给出下列参数定义.

n: 被加工工件的总数;

$J=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$: 需要被加工的工件集合;

a_j: 工件 $J_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 正常的处理时间 ($a_j>0$);

$a_{[r]}$: 在序列调度中第 r 个位置被加工工件的正常处理时间, 其中 $1\leqslant r\leqslant n$;

b: 恶化率 ($b>0$);

p_{jr}: 在位置 $r\,(1\leqslant r\leqslant n)$ 工件 J_j 的实际处理时间, 即 $p_{jr}=(1+a_{[1]}+a_{[2]}+\cdots+a_{[r-1]})^b a_j$;

$C_j(S)$: 在调度 S 中工件 J_j 的完工时间;

q: 松弛时间;

d_j: 工件 J_j 被安排的交货期;

T_j: 工件 J_j 的拖期时间, 即 $T_j=\max\{0,C_j-d_j\}$, 也可表示为 $T_j=\lceil C_j-d_j\rceil^+$;

s_j: 工件 J_j 开始被处理的时间;

w_j: 工件 J_j 的等待时间;

E_j: 工件 J_j 的提前时间, $E_j=\max\{0,d_j-C_j\}$;

α: 每单位提前惩罚系数, $\alpha>0$;

β: 每单位拖期惩罚系数, $\beta>0$;

t: 维护阶段的持续时间, 即 RMA 的持续时间;

M: 安排 RMA 的总数;

k_m: 在位置 $k_m(1<k_m\leqslant n,m=1,2,\cdots,M)$ 安排 RMA.

假设机器每次只能加工一个工件, 每个工件只加工一次, 工件无优先权, 且一旦开始加工工件将不可打断, 直到该工件处理完成.

基于以上假设, 处理时间非线性恶化和多个 RMAs 最小化提前和拖期惩罚的交货期安排的单机调度问题可以描述为: n 个工件 $J_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 需要在机器上加工, 目标是最小化总的提前和拖期惩罚 $\sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j)$, 在此, 交货期由 SLK 规则决定[15], 即每个工件具有相同的等待时间 (也称为松弛时间). 这种情况下, 每个工件的交货期由实际的处理时间和松弛时间决定, 即 $d_j=p_{jr}+q\,(j=1,2,\cdots,n)$. 目标是给出最优交货期的同时使得 $\sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j)$ 最小. 应用三参数 $\alpha|\beta|\gamma$ 方法[16], 该问题可表示为 $1\Big|p_{jr},d_j=p_{jr}+q,\mathrm{mrm}\Big|\sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j)$, 其中 mrm 表示可插入多个 RMAs. 图 1 给出了具有多个 RMAs 的单机调度过程.

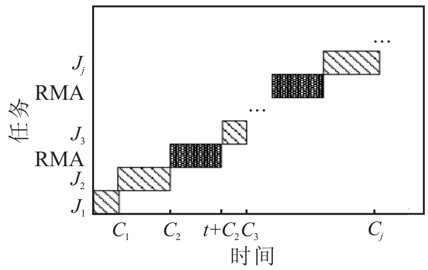

图 1 具有多个 RMAs 的单机调度过程

2 问题性质

为便于研究, 首先给出下列的分析以及与问题相关的性质. 设 $J_{[i]}$ 表示工件在位置 i 被加工, 由工件的实际处理时间可得工件的等待时间和完工时间如下.

当 $i=1,2,\cdots,k_1-1$ 时, 有

$$\begin{cases} w_{[i]}=C_{[i-1]}=\sum\limits_{r=1}^{i-1}p_r(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b,\\ C_{[i]}=C_{[i-1]}+p_i(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[i-1]})^b; \end{cases}$$

当 $i=k_1$ 时, 有

$$\begin{cases} w_{[i]}=C_{[i-1]}+t,\\ C_{[i]}=C_{[i-1]}+t+p_i; \end{cases}$$

当 $i=k_1+1,\cdots,k_2-1$ 时, 有

$$\begin{cases} w_{[i]}=C_{[i-1]},\\ C_{[i]}=C_{[i-1]}+p_i(1+p_{[k_1]}+\cdots+p_{[i-1]})^b; \end{cases}$$

$$\vdots$$

当 $i=k_l$ 时, 有

$$\begin{cases} w_{[i]}=C_{[i-1]}+t,\\ C_{[i]}=C_{[i-1]}+t+p_i; \end{cases}$$

当 $i=k_l+1,\cdots,k_{l+1}-1$ 时, 有

$$\begin{cases} w_{[i]}=C_{[i-1]}, \\ C_{[i]}=C_{[i-1]}+p_i(1+p_{[k_l]}+\cdots+p_{[i-1]})^b; \end{cases}$$

$$\vdots$$

当 $i=k_M$ 时, 有

$$\begin{cases} w_{[i]}=C_{[i-1]}+t, \\ C_{[i]}=C_{[i-1]}+t+p_i; \end{cases}$$

当 $i=k_M+1,\cdots,n$ 时, 有

$$\begin{cases} w_{[i]}=C_{[i-1]}, \\ C_{[i]}=C_{[i-1]}+p_i(1+p_{[k_m]}+\cdots+p_{[i-1]})^b. \end{cases}$$

其中: 令 $p_{[0]}=0, \sum\limits_{r=i}^{i-1}p_r(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b=0.$

性质 1 设 $J_{[i]}$ 表示工件在位置 i 被加工, 如果 $C_{[i]}\geqslant d_{[i]}$, 则 $C_{[i+1]}\geqslant d_{[i+1]}$.

证明 根据安排 RMA 的位置, 可将问题分为下列几种情况.

1) 当 $i\leqslant k_1-1$ 时, 工件 $J_{[i]}$ 位于所有安排的 RMA 之前, 其完成时间与交货期的关系为

$$\begin{aligned} &C_{[i]}=C_{[i-1]}+p_i(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[i-1]})^b\geqslant \\ &q+p_i(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[i-1]})^b=d_{[i]}\Rightarrow \\ &C_{[i-1]}\geqslant q\Rightarrow \\ &C_{[i+1]}=C_{[i-1]}+p_i(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[i-1]})^b+ \\ &\qquad p_{i+1}(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[i]})^b\geqslant \\ &q+p_{[i+1]}(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[i]})^b=d_{[i+1]}\Rightarrow \\ &C_{[i+1]}\geqslant d_{[i+1]}. \end{aligned}$$

2) 当 $k_l\leqslant i\leqslant k_{l+1}-1(1\leqslant l\leqslant m-1)$ 时, 工件 $J_{[i]}$ 位于两个 RMA 之间, 其完成时间与交货期的关系为

$$\begin{aligned} &C_{[i]}=C_{[i-1]}+st+p_i(1+p_{[k_l]}+\cdots+p_{[i-1]})^b\geqslant \\ &q+p_i(1+p_{[k_l]}+\cdots+p_{[i-1]})^b=d_{[i]}\Rightarrow \\ &C_{[i-1]}+lt\geqslant q\Rightarrow \\ &C_{[i+1]}=C_{[i-1]}+p_i(1+p_{[k_l]}+\cdots+p_{[i-1]})^b+ \\ &\qquad lt+p_{i+1}(1+p_{[k_l]}+\cdots+p_{[i]})^b\geqslant \\ &q+p_{i+1}(1+p_{[k_l]}+\cdots+p_{[i]})^b=d_{[i+1]}\Rightarrow \\ &C_{[i+1]}\geqslant d_{[i+1]}. \end{aligned}$$

3) 当 $i\geqslant k_m$ 时, 工件 $J_{[i]}$ 位于最后一个 RMA 之后, 其完成时间与交货期的关系为

$$\begin{aligned} &C_{[i]}=C_{[i-1]}+mt+p_i(1+p_{[k_m]}+\cdots+p_{[i-1]})^b\geqslant \\ &q+p_i(1+p_{[k_m]}+\cdots+p_{[i-1]})^b=d_{[i]}\Rightarrow \\ &C_{[i-1]}+mt\geqslant q\Rightarrow \\ &C_{[i+1]}=C_{[i-1]}+p_i(1+p_{[k_m]}+\cdots+p_{[i-1]})^b+ \\ &\qquad mt+p_{i+1}(1+p_{[k_m]}+\cdots+p_{[i]})^b\geqslant \\ &q+p_{i+1}(1+p_{[k_m]}+\cdots+p_{[i]})^b=d_{[i+1]}\Rightarrow \\ &C_{[i+1]}\geqslant d_{[i+1]}. \end{aligned}$$

从上述 3 种情况可知, 如果 $C_{[i]}\geqslant d_{[i]}$, 则 $C_{[i+1]}\geqslant d_{[i+1]}$. □

根据性质 1, 可得如下推论.

推论 1 在一个调度序列中, 对于位置 $\forall j>i$, 如果 $C_{[i]}\geqslant d_{[i]}$, 则 $C_{[j]}\geqslant d_{[j]}$.

证明类似于性质 1.

性质 2 对于任意的调度, 存在一个最优的相同松弛时间 q 且等于某个工件的等待时间.

证明 设 $J_{[i]}$ 表示工件在位置 i 被加工, 且对于调度中的某一个特定的工件 $J_{[i]}$ 满足 $W_{[j-1]}\leqslant q\leqslant W_{[j]}$. 令 $\delta=q-W_{[j-1]}$, 则可得 $0\leqslant\delta\leqslant p_{[j-1]}(1+p_{[k]}+\cdots+p_{[j-2]})^b$. 由性质 1 可推出, 位于 $J_{[i]}$ 之前的工件是提前的, 而 $J_{[i]}$ 本身和位于其后的工件是拖期的. 又因安排 RMA 的位置不同, 可分为下列几种情况, 即: $j-1\leqslant k_1-1$, $k_l\leqslant j-1\leqslant k_{l+1}-1$ 和 $k_m\leqslant j-1\leqslant n$.

1) 当 $j-1\leqslant k_1-1$ 时, 工件 $J_{[i]}$ 的 $E_{[i]}$ $(1\leqslant i\leqslant j-1)$ 可表示为

$$\begin{aligned} &E_{[1]}=d_{[1]}-C_{[1]}=\delta+W_{[j-1]}= \\ &\qquad \delta+\sum_{r=1}^{j-2}p_r(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b, \\ &E_{[2]}=d_{[2]}-C_{[2]}=\delta+W_{[j-1]}-p_1= \\ &\qquad \delta+\sum_{r=2}^{j-2}p_r(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b, \\ &\quad\vdots \\ &E_{[i]}=\delta+\sum_{r=i}^{j-2}p_r(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b, \\ &\quad\vdots \\ &E_{[j-1]}=\delta. \end{aligned}$$

此时, 工件 $J_{[i]}$ 的 $T_{[i]}$ $(j\leqslant i\leqslant n)$ 可表示为下列两种情况:

① 当 $j\leqslant i\leqslant k_1-1$ 时, 有

$$T_{[i]}=\sum_{r=j-1}^{i-1}p_r(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b-\delta;$$

② 当 $k_1\leqslant i\leqslant n$ 时, 有

$$\begin{aligned} T_{[i]}=lt+&\sum_{r=j-1}^{k_1-1}p_r(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+ \\ &\sum_{r=k_1}^{k_2-1}p_r(1+p_{[k_1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+\cdots+ \\ &\sum_{r=k_{l-1}}^{k_l-1}p_r(1+p_{[k_{l-1}]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+ \end{aligned}$$

$$\sum_{r=k_l}^{i-1} p_r(1+p_{[k_l]}+\cdots+p_{[r-1]})^b-\delta.$$

由此, 总的提前和延迟为

$$\mathrm{TC}=\sum_{i=1}^{n}(\alpha E_{[i]}+\beta T_{[i]})=$$
$$[\alpha(j-1)-\beta(n-j+1)]\delta+$$
$$\sum_{u=1}^{m}(k_{u+1}-k_u)ut+\alpha j-$$
$$\sum_{r=1}^{2} rp_r(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\beta\Big[\sum_{r=j-1}^{k_1-2}(n-r)p_r(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{u=1}^{m-1}\sum_{r=k_u}^{k_{u+1}-1}(n-r)p_r(1+p_{[k_u]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{r=k_m}^{n-1}(n-r)p_r(1+p_{[k_u]}+\cdots+p_{[r-1]})^b\Big].$$

因为上述函数是关于δ的线性函数, 所以当$\delta=0$或$\delta=p_{j-1}(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[j-2]})^b$时, TC获得最小值, 即存在一个松弛时间$q$使得其值等于某个工件的等待时间.

2) 当$k_l\leqslant j-1\leqslant k_{l+1}-1\,(1\leqslant l\leqslant m-1)$时, 工件$J_{[i]}$的$E_{[i]}(1\leqslant i\leqslant j-1)$可表示如下:

① 当$1\leqslant i\leqslant k_1-1$时, 有

$$E_{[i]}=$$
$$\delta+(l-1)t+$$
$$\sum_{r=i}^{k_2-1}p_r(1+p_{[k_1]}+p_{[k_1+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{r=k_2}^{k_3-1}p_r(1+p_{[k_2]}+p_{[k_2+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+\cdots+$$
$$\sum_{r=k_{l-1}}^{k_l-1}p_r(1+p_{[k_{l-1}]}+p_{[k_{l-1}+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{r=k_l}^{j-2}p_r(1+p_{[k_l]}+p_{[k_l+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b;$$

② 当$k_{s-1}\leqslant i\leqslant k_s-1\,(2\leqslant s\leqslant l)$时, 有

$$E_{[i]}=$$
$$\delta+(l-s+1)t+$$
$$\sum_{r=i}^{k_s-1}p_r(1+p_{[k_{s-1}]}+p_{[k_{s-1}+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{r=k_s}^{k_{s+1}-1}p_r(1+p_{[k_s]}+p_{[k_s+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+\cdots+$$
$$\sum_{r=k_{l-1}}^{k_l-1}p_r(1+p_{[k_{l-1}]}+p_{[k_{l-1}+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{r=k_l}^{j-2}p_r(1+p_{[k_l]}+p_{[k_l+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b;$$

③ 当$k_l\leqslant i\leqslant j-1$时, 有

$$E_{[i]}=\delta+\sum_{r=k_l}^{j-2}p_r(1+p_{[k_l]}+p_{[k_l+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b.$$

此时, 工件$J_{[i]}$的$T_{[i]}\ (j\leqslant i\leqslant n)$可表示为下列3种情况:

i) 当$j\leqslant i\leqslant k_{l+1}-1$时, 有

$$T_{[i]}=$$
$$\sum_{r=j-1}^{i-1}p_r(1+p_{[k_l]}+p_{[k_l+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b-\delta;$$

ii) 当$k_s\leqslant i\leqslant k_{s+1}-1(l+1\leqslant s\leqslant m-1)$时, 有

$$T_{[i]}=$$
$$\sum_{r=j-1}^{k_{l+1}-1}p_r(1+p_{[k_l]}+p_{[k_l+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{r=k_{l+1}}^{k_{l+2}-1}p_r(1+p_{[k_{l+1}]}+p_{[k_{l+1}+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\cdots+\sum_{r=k_s}^{i-1}p_r(1+p_{[k_s]}+p_{[k_s+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$(s-l)t-\delta;$$

iii) 当$k_m\leqslant i\leqslant n$时, 有

$$T_{[i]}=$$
$$\sum_{r=j-1}^{k_{l+1}-1}p_r(1+p_{[k_l]}+p_{[k_l+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{r=k_{l+1}}^{k_{l+2}-1}p_r(1+p_{[k_{l+1}]}+p_{[k_{l+1}+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\cdots+\sum_{r=k_m}^{i-1}p_r(1+p_{[k_s]}+p_{[k_s+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$(m-l)t-\delta.$$

由此, 总的提前和延迟为

$$\mathrm{TC}=\sum_{i=1}^{n}(\alpha E_{[i]}+\beta T_{[i]})=$$
$$[\alpha(j-1)-\beta(n-j+1)]\delta+$$
$$\alpha\sum_{u=0}^{l}(k_{u+1}-k_u)(l-u)t+$$
$$\beta\sum_{u=l+1}^{m}(k_{u+1}-k_u)(u-l)t+$$
$$\alpha\Big[\sum_{r=1}^{k_1-1}rp_r(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$

$$\sum_{u=1}^{l-1}\sum_{r=k_u}^{k_{u+1}-1} rp_r(1+p_{[k_u]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{r=k_l}^{j-2} rp_r(1+p_{[k_l]}+\cdots+p_{[r-1]})^b\Big]+$$
$$\beta\Big[\sum_{r=j-1}^{k_{l+1}-1}(n-r)p_r(1+p_{[k_l]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{u=l+1}^{m-1}\sum_{r=k_u}^{k_{u+1}-1}(n-r)p_r(1+p_{[k_u]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{r=k_m}^{n-1}(n-r)p_r(1+p_{[k_m]}+\cdots+p_{[r-1]})^b\Big].$$

因为上述函数是关于 δ 的线性函数, 所以当 $\delta=0$ 或 $\delta=p_{j-1}(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[j-2]})^b$ 时, TC 获得最小值, 即存在一个松弛时间 q 使得其值等于某个工件的等待时间.

3) 当 $k_m\leqslant j-1<n$ 时, 工件 $J_{[i]}$ 的 $E_{[i]}(1\leqslant i\leqslant j-1)$ 可表示如下:

① 当 $1\leqslant i\leqslant k_1-1$ 时, 有

$$E_{[i]}=\delta+\sum_{r=i}^{k_1-1}p_r(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{r=k_1}^{k_2-1}p_r(1+p_{[k_1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{r=k_m}^{j-2}p_r(1+p_{[k_m]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+mt;$$

② 当 $k_s\leqslant i\leqslant k_{s+1}-1$ $(1\leqslant s\leqslant m-1)$ 时, 有

$$E_{[i]}=\delta+\sum_{r=i}^{k_{s+1}-1}p_r(1+p_{[k_s]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{r=k_{s+1}}^{k_{s+2}-1}p_r(1+p_{[k_{s+1}]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{r=k_m}^{j-2}p_r(1+p_{[k_m]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+(m-s)t;$$

③ 当 $k_m\leqslant i\leqslant j-1$ 时, 有

$$E_{[i]}=\delta+\sum_{r=i}^{j-2}p_r(1+p_{[k_m]}+p_{[k_m+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b.$$

此时, 工件 $J_{[i]}$ 的 $T_{[i]}$ $(j\leqslant i\leqslant n)$ 可表示为

$$T_{[i]}=$$
$$\sum_{r=j-1}^{i-1}p_r(1+p_{[k_m]}+p_{[k_m+1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b-\delta.$$

由此, 总的提前和延迟为

$$\mathrm{TC}=\sum_{i=1}^{n}(\alpha E_{[i]}+\beta T_{[i]})=$$
$$[\alpha(j-1)-\beta(n-j+1)]\delta+$$
$$\sum_{u=1}^{m-1}(m-u)(k_{u+1}-k_u)t+$$
$$\alpha\Big[\sum_{r=1}^{k_1-1}rp_r(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{u=1}^{m-1}\sum_{r=k_u}^{k_{u+1}-1}rp_r(1+p_{[k_u]}+\cdots+p_{[r-1]})^b+$$
$$\sum_{r=k_m}^{j-2}rp_r(1+p_{[k_m]}+\cdots+p_{[r-1]})^b\Big]+$$
$$\beta\Big[\sum_{r=j-1}^{n-1}(n-r)p_r(1+p_{[k_m]}+\cdots+p_{[r-1]})^b\Big].$$

因为上述函数是关于 δ 的线性函数, 所以当 $\delta=0$ 或 $\delta=p_{j-1}(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[j-2]})^b$ 时, TC 获得最小值, 即存在一个松弛时间 q 使得其值等于某个工件的等待时间. □

性质 3　对于任意的调度, 如果最优松弛时间对于某个特定的工件 $J_{[j]}$ 满足 $q=C_{[j-1]}=W_{[j]}$, 则 $j=\lceil n\beta/(\alpha+\beta)\rceil$.

证明　下面通过移动松弛时间 q 并采用小参数方法对问题进行证明.

如果最优松弛时间满足 $q=C_{[j-1]}=W_{[j]}$, 将松弛时间向左移动 δ 个单位, 则总的提前和拖期惩罚在变化后与之前的差值 $\Delta\mathrm{TC}_1$ 可表示为

$$\Delta\mathrm{TC}_1=[\beta(n-j+1)-\alpha(j-1)]\delta.$$

若将松弛时间向右移动 δ 个单位, 则总的提前和拖期惩罚在变化后与之前的差值 $\Delta\mathrm{TC}_2$ 可表示为

$$\Delta\mathrm{TC}_2=[\alpha j-\beta(n-j)]\delta.$$

为确保当 $q=C_{[j-1]}=W_{[j]}$ 成立时获得最优解, 要求 $\Delta\mathrm{TC}_1$ 和 $\Delta\mathrm{TC}_2$ 一定是非负的, 则有:

当 $\Delta\mathrm{TC}_1\geqslant 0$ 时, 可得 $j\leqslant 1+n\beta/(\alpha+\beta)$;

当 $\Delta\mathrm{TC}_2\geqslant 0$ 时, 可得 $j\geqslant n\beta/(\alpha+\beta)$.

由于 j 是整数, 可得出 $j=\lceil n\beta/(\alpha+\beta)\rceil$. □

3　问题求解

基于性质3, 可确定松弛时间 q 的值对应于等待时间的工件 $J_{[j]}$, 且 $J_{[j]}$ 的位置是 $j=\lceil n\beta/(\alpha+\beta)\rceil$. 同时, 由性质2可知, $\delta=W_{[j]}-W_{[j-1]}=p_{j-1}(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[j-2]})^b$, 用 $p_{j-1}(1+p_{[1]}+\cdots+p_{[j-2]})^b$ 取代 δ. 下面给出问题的模型, 其中 TC 根据工件与 RMA 的位置关系有 3 种不同表达, 对应于第 2 节中的 3 种情况.

$$\min\ \mathrm{TC}. \tag{1}$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{r=1}^{n}x_{ir}=1,\ i=1,2,\cdots,n; \tag{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_{ir}=1,\ r=1,2,\cdots,n; \tag{3}$$
$$x_{ir}=1\text{ or }0,\ i=1,2,\cdots,n,\ r=1,2,\cdots,n. \tag{4}$$

其中: 式 (1) 为目标函数; 式 (2) 表示在一个位置上只有一个工件; 式 (3) 表示一个工件只位于一个位置; 式 (4) 表示当工件 $J_{[i]}$ 在位置 r 被加工时, x_{ir} 的值为 1, 否则, 值为 0.

上述安排问题当 k 确定时, 在时间复杂度 $O(n^3)$ 内能够得到求解[17], 具体求解过程见文献 [18-19]. 此外, 因为对于每个 $M(M=1,2,\cdots,n)$, k_u 可能为 2, $3,\cdots,n$, 所以 RMA 可能的位置上界为 n^m, 于是可得如下定理.

定理 1 问题 $1|p_{ir},d_i,\mathrm{mrm}|\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha E_i+\beta T_i)$ 的时间复杂度为 $O(n^{m+3})$.

由定理 1 可得如下推论.

推论 2 问题 $1|p_{ir},d_i,\mathrm{rm}|\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha E_i+\beta T_i)$ 的时间复杂度为 $O(n^4)$, 其中 rm 表示最多安排一个 RMA.

因为很容易得到上述两个结果, 所以定理 1 和推论 2 的证明在此省略.

4 结 论

本文针对在调度过程中安排多个机器维护阶段的情况, 研究了处理时间非线性恶化和多个 RMAs 的交货期安排问题. 根据问题的特点, 将其分为几种不同的情况进行了分析, 提出了相关的性质和定理, 并给出了最优的松弛时间. 最后, 证明了该问题在多项式时间内是可解的.

参考文献(References)

[1] Gordon V, Proth J, Chu C. A survey of the state-of-the-art of common due date assignment and scheduling research[J]. European J of Operational Research, 2002, 139(1): 1-25.

[2] Cheng T C E, Kang L Y, Ng C T. Due-date assignment and parallel-machine scheduling with deteriorating job[J]. J of the Operational Research Society, 2007, 58(8): 1103-1108.

[3] Wang J, Guo Q. A due-date assignment problem with learning effect and deteriorating jobs[J]. Applied Mathematical Modelling, 2010, 34(2): 309-313.

[4] Birman M, Mosheiov G. A note on a due-date assignment on a two-machine flow-shop[J]. Computers & Operations Research, 2004, 31(3): 473-480.

[5] Shabtay D, Steiner G. Optimal due date assignment in multi-machine scheduling environments[J]. J of Scheduling, 2008, 11(3): 217-228.

[6] Lee C Y, Leon V J. Machine scheduling with a rate-modifying activity[J]. European J of Operational Research, 2001, 128(1): 119-128.

[7] Lodree E J, Geiger C D, Jiang X. Taxonomy for integrating scheduling theory and human factors: Review and research opportunities[J]. Int J of Industrial Ergonomics, 2009, 39(1): 39-51.

[8] Lodree E J, Christopher D G. A note on the optimal sequence position for a rate-modifying activity under simple linear deterioration[J]. European J of Operational Research, 2010, 201(2): 644-648.

[9] Iranpoor M, Fatemi Ghomi S M T. Machine scheduling in the presence of sequence-dependent setup times and a rate-modifying activity[J]. Int J of Production Research, 2012, 50 (24): 7401-7414.

[10] He Y, Ji M, Cheng T C E. Single machine scheduling with a restricted rate-modifying activity[J]. Naval Research Logistics, 2005, 52(4): 361-369.

[11] Wang X Y, Wang M Z. Single machine common flow allowance scheduling with a rate-modifying activity[J]. Computers & Industrial Engineering, 2010, 59(4): 898-902.

[12] Zhao C, Tang H. A note to due-window assignment and single machine scheduling with deteriorating jobs and a rate-modifying activity[J]. Computers & Operations Research, 2012, 39(6): 1300-1303.

[13] Gordon V S, Tarasevich A A. A note: Common due date assignment for a single machine scheduling with the rate-modifying activity[J]. Computers & Operations Research, 2009, 36(2): 325-328.

[14] Zhu Z, Chu F, Sun L, et al. Single machine scheduling with resource allocation and learning effect considering the rate-modifying activity[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(7): 5371-5380.

[15] Adamopoulos G I, Pappis C P. Scheduling jobs with different, job-dependent earliness and tardiness penalties using the SLK method[J]. European J of Operational Research, 1996, 88(2): 336-344.

[16] Graham R L, Lawler E L, Lenstra J K, et al. Optimization and approximation in the deterministic sequencing and scheduling: A survey[J]. Annals of Discrete Mathematics, 1979, 5: 287-326.

[17] Ji M, Cheng T C E. Scheduling with job-dependent learning effects and multiple rate-modifying activities[J]. Information Processing Letters, 2010, 110(11): 460-463.

[18] Brucker P. Scheduling algorithms[M]. Berlin: Springer, 2001: 37-55, 243-256.

[19] Papadimitriou C H, Steiglitz K. Combinatorial optimization: Algorithms and complexity[M]. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1982: 137-150.

(责任编辑: 李君玲)