

## 高维多目标多方向协同进化算法

毕晓君<sup>a</sup>, 张永建<sup>a</sup>, 沈继红<sup>b</sup>

(哈尔滨工程大学 a. 信息与通信工程学院, b. 理学院, 哈尔滨 150001)

**摘要:** 提出一种高维多目标多方向协同进化算法(HMMCA), 该算法利用目标空间内的一组方向向量将多目标优化问题分解成多个方向进行寻优, 并提出一种混合变异策略以加强算法在每个方向上的收敛能力; 同时, 该算法采用改进的交互式模糊支配和拥挤度估计因子来维护外部归档集的规模, 增强种群的收敛性和分布性. 将该算法与目前性能最好的3种多目标进化算法在标准测试函数集上进行对比实验, 所得结果表明HMMCA与其他算法相比具有更好的收敛性和分布性.

**关键词:** 高维多目标优化; 多方向协同进化; 混合变异策略; 模糊支配

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## High-dimensional multi-objective multi-directional co-evolutionary algorithm

BI Xiao-jun<sup>a</sup>, ZHANG Yong-jian<sup>a</sup>, SHEN Ji-hong<sup>b</sup>

(a. School of Information and Communication Engineering, b. School of Science, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China. Correspondent: ZHANG Yong-jian, E-mail: zhangyongjian1226@163.com)

**Abstract:** A high-dimensional multi-objective multi-directional co-evolutionary algorithm(HMMCA) is proposed. Firstly, the multi-objective optimization problem is decomposed into multiple directions for optimization by using a set of direction vector, and a hybrid mutation strategy is proposed to improve the convergence performance in every direction. Then, an innovative interactive fuzzy dominance and crowding factor are used to maintain the size of external archive. The proposed algorithm is compared to 3 state-of-the-art MOEAs on benchmark test problems. Simulation results show that the HMMCA has obvious advantage in convergence and distribution than other algorithms.

**Key words:** high-dimensional multi-objective optimization; multi-directional co-evolution; hybrid mutation strategy; fuzzy dominance

### 0 引言

在科学研究和工程实践中优化问题是最常见的问题之一, 如机械设计、航空航天、网络通信、作业调度、图像处理、生命科学等诸多领域都存在如何科学合理地寻求多个目标的最佳设计方案. 但是现有研究成果还远远不能满足随着社会的进步而日益增长的技术需求, 特别是高维多目标优化问题已成为信息领域和数学领域所共同面临亟待解决的研究热点之一. 在多目标优化中, 一个子目标的改善有可能会引起另外一个或几个子目标的性能降低, 为了达到总目标的最优化, 通常需要对相互冲突的子目

标进行综合考虑, 即对各子目标进行折衷. 因此, 不同于单目标优化问题, 多目标优化不存在绝对的或唯一的最好解, 而是存在一组由众多的 Pareto 最优解构成的最优解集<sup>[1]</sup>. 为解决此类问题, 大量的多目标优化算法(MOEAs)被相继提出, 这些 MOEAs 算法在求解2目标和3目标优化问题时取得了较好的效果, 但当目标的个数增加到4个或以上时(称为高维多目标), 这些基于 Pareto 排序的 MOEAs 的性能将大大降低. 这是因为随着目标数的增加, 种群中个体间相互不支配的概率增加, 使得用来表示 Pareto 前沿的非支配个体的数量呈指数增长, 大大削弱了算法的选择压

收稿日期: 2013-08-27; 修回日期: 2013-11-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61175126); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(HEUCFZ1209); 高等学校博士学科点专项科研项目(20112304110009); 黑龙江省博士后基金项目(LBH-Z12073); 辽宁省博士科研启动基金项目(201205118); 辽宁省教育厅科学技术研究一般项目(L2012458).

作者简介: 毕晓君(1964—), 女, 教授, 博士生导师, 从事智能信息处理和图像处理等研究; 张永建(1987—), 男, 博士生, 从事高维多目标优化的研究.

力和搜索能力<sup>[2]</sup>. 为此, 人们提出了多种改进算法, 归纳起来主要分为以下 4 类.

1) 权重系数法<sup>[3-4]</sup>. 该类算法通过设计一组权重系数将高维多目标优化问题转化为单目标优化问题, 所引入的权重系数相当于引入了偏好信息, 但该信息不够准确和全面, 会导致算法寻优的结果偏离真正的 Pareto 前沿.

2) 降维法<sup>[5-7]</sup>. 该类算法在通过某种策略忽略或排除某些目标的情况下比较各解之间的支配关系, 但目标的减少会造成信息的丢失, 所以该类算法是在最小允许误差下的优化, 并且应用效果将受到 Pareto 前沿维数增加的影响.

3) 基于宽松支配法<sup>[8-9]</sup>. 该类算法的思想是在将个体的目标函数值按照一定的比例缩小或放大之后, 再与其他个体进行支配比较, 实际上是对 Pareto 支配的宽松改进. 此类算法中的参数难以确定, 而且改变了个体的真实目标函数值, 会导致算法无法收敛到真实的 Pareto 前沿.

4) 混合算法<sup>[10-12]</sup>. 该类算法将其他领域的技术引入进化算法中, 加强了算法的寻优能力, 但算法复杂度较高, 难以实现.

高维多目标优化 Pareto 最优解集中的每一个解都可以看作是在各目标上的不同折衷, 如果事先设定一些折衷, 使之能够代表所有 Pareto 最优解的折衷情况, 则可将高维多目标优化分解成多个单目标优化, 由这些折衷上求得的最优解构成的解集将是高维多目标优化问题的 Pareto 最优解集. 此类算法在解决高维多目标优化问题上取得了较好的效果, 其中以 Zhang 等<sup>[3]</sup>提出的 MOEA/D 算法最具代表性. 但其还存在不足: 1) 转化过程没有考虑各目标的取值范围; 2) 进化操作还不够完善, 导致收敛性不足; 3) 外部归档集的维护采用 Pareto 支配, 无法较好地权衡种群的收敛性与分布性. 为此, 本文通过深入研究提出一种高维多目标多方向协同进化算法 (HMMCA), 其创新点主要体现在: 1) 改进转化公式, 利用一组方向向量使高维多目标优化算法在多个方向上同时搜索, 并设计了新的混合进化策略以增强算法在每一个单方向上的收敛能力, 增强算法的整体寻优能力; 2) 采用改进的模糊支配关系和拥挤度估计法来维持外部归档集的规模, 进一步提高种群的收敛性和分布性.

## 1 高维多目标优化问题的数学描述

不失一般性, 一个具有  $n$  维决策变量、 $M$  维目标函数的多目标优化问题, 以最小化为例, 可表述为如下形式:

$$\min F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)),$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \subset R^n,$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_M) \in Y \subset R^M. \quad (1)$$

其中:  $x$  为决策变量,  $X$  为  $n$  维的决策空间;  $y$  为目标向量,  $Y$  为  $M$  维的目标空间; 目标函数  $F$  定义了映射函数和同时需要优化的  $M$  个目标, 当  $M > 4$  时, 称式 (1) 为高维多目标优化问题. 对于决策空间内的任意两点  $x, x^* \in X$ , 当  $x^*$  的目标函数都不大于且至少存在一个小于  $x$  的目标函数时, 称  $x^*$  Pareto 支配  $x$ , 记为  $x^* \succ x$ . 若  $x^*$  不受种群中其他个体支配, 则称  $x^*$  为 Pareto 非支配解, 种群中所有非支配解构成的集合称为 Pareto 最优解, 对应的目标函数构成的解集称为 Pareto 前沿.

## 2 高维多目标多方向协同进化算法

为提高高维复杂多目标优化算法的收敛性和解集分布性, 本文通过一组方向向量将高维多目标优化问题分解成多个寻优方向, 并提出新的混合进化策略以求得每个方向上的最优解, 采用新型支配关系和拥挤密度法维护外部归档集的规模, 从而实现 MOEAs 整体求解性能的进一步提升.

### 2.1 多方向协同进化

高维多目标优化的目的是求解均匀散布在前沿面上的非支配解集, 而解集中的每一个非支配个体都可以看作是在不同方向上的折衷最优解. 如果在寻优之前设定足够多的方向, 并求得每个方向上的最优解, 则由所有方向上的最优解构成的解集就是高维多目标优化问题所求得 Pareto 最优解. 在归档集中, 任一方向上的次优解都是其他方向上的最优解, 各解之间的信息交互有利于各方向的协同进化, 提高算法的寻优能力.

#### 2.1.1 高维多目标多方向分解

将高维多目标优化问题分解成多个方向上寻优的优点是, 方向向量可以指明进化方向, 指引种群朝着真正的 Pareto 前沿进化, 并且在单一的方向上可以将复杂的高维多目标优化问题简化为简单的单目标优化问题, 可有效提高算法的寻优能力. 假定种群中的每一个个体都代表着一个方向, 则方向向量矩阵的规模应等于种群的规模  $N$ , 目标数为  $M$  时的方向向量矩阵可表示为  $[\lambda_{ij}]_{N \times M}$ , 且需满足如下约束条件:

$$\sum_{j=1}^M \lambda_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

为了适应不同形状的前沿面, 本文采用随机的方式生成该方向矩阵.

在单一的某个方向上, 高维多目标优化问题需转化为带有方向向量的单目标优化问题, 本文采用文献 [3] 的方法, 即

$$\min g(x | \lambda, z) = \max_{1 \leq i \leq M} \{\lambda_i | f_i(x) - z_i\}. \quad (3)$$

其中:  $z = (z_1, z_2, \dots, z_M)$  为参考点,  $z_i = \min(f_i(x))$ .

对于每一个方向向量  $\lambda$  都可以求出式 (3) 的一个最优解, 所有方向向量的最优解便构成了式 (1) 的最优解集. 但式 (3) 没有考虑各目标函数的取值范围. 如果某个目标函数的取值范围相对于其他目标较大, 则在种群中各解的该目标函数值差异就会较大, 在转换过程中该目标将起主导作用, 但这种作用并不是由目标函数的重要性而引起的, 因此会影响到折衷系数的作用, 从而导致算法只搜索到局部最优解. 本文对其进行改进, 将目标函数值进行量化处理以消除上述影响, 即

$$\min g(x | \lambda, z) = \max_{1 \leq i \leq M} \left\{ \lambda_i \left| \frac{f_i(x) - z_{\min i}}{z_{\max i} - z_{\min i}} \right| \right\}, \quad (4)$$

其中  $z_{\min i}$ 、 $z_{\max i}$  分别为种群中的个体在第  $i$  个目标上求得的最小值和最大值.

### 2.1.2 混合进化策略

在高维多目标优化中, 大多数进化算法寻优效果不理想的原因是种群中不存在一般意义上的唯一最优解, 使得最好个体的选择十分困难: 当条件严格时, 会导致算法过于贪婪而陷入局部最优; 当条件宽松时, 会削弱算法的收敛能力. 但是在本文多方向寻优中并不存在这种情况, 在任意一个单一的方向上都存在唯一的最优解, 且无需担心选择的条件过于贪婪, 可充分发挥进化算法的寻优能力. 为此, 本文对差分算法进行了改进, 提出了方向角差分算子, 并与 SBX 算子结合构成混合进化策略.

方向角差分进化算子为

$$x_d = x_{\text{best1}} + F_{\text{rand}}(x_{\text{best2}} - x_{\text{best1}}), \quad (5)$$

$$v_i = x_i + F_2(x_d - x_i) + \text{rand}(x_{r1} - x_{r2}). \quad (6)$$

其中:  $x_{\text{best1}}$  和  $x_{\text{best2}}$  为一个方向上适应度最好的两个个体,  $F_{\text{rand}}$  为 (0, 1) 上的随机数,  $x_{r1}$  和  $x_{r2}$  为随机选择的个体. 以两个最优个体的综合信息为指引, 加强了搜索方向的正确性, 而且相比于单独的最优个体增大了搜索空间, 有利于增强种群的多样性.

SBX 进化算子为

$$x'_{ik} = \begin{cases} 0.5[(1 + \beta)x_{\text{best1}k} + (1 - \beta)x_{\text{best2}k}], & \text{rand}() > 0.5; \\ 0.5[(1 - \beta)x_{\text{best1}k} + (1 + \beta)x_{\text{best2}k}], & \text{otherwise;} \end{cases} \quad (7)$$

$$\beta_k = \begin{cases} 2\mu^{1/\eta_e+1}, & \mu \leq 0.5; \\ 2(1 - \mu)^{-1/(\eta_e+1)}, & \text{else.} \end{cases} \quad (8)$$

该进化策略以方向向量为进化基础, 针对每一个方向, 选取该方向上适应度最好的两个个体, 执行方向角差分算子和 SBX 算子以生成两个新的个体, 保

留适应度好的个体进入归档集. SBX 进化算子的引入弥补了方向角差分算子的不足: 当两个最优个体  $x_{\text{best1}}$  和  $x_{\text{best2}}$  分布在该方向的同一侧时, 方向角差分更有可能搜索到更好的个体; 而当两个最优个体分布在该方向的两侧时, SBX 更容易搜索到更好的个体.

### 2.2 外部归档集的维护

外部归档集用来保存在寻优过程中发现的非支配个体, 是高维多目标优化问题的最终解集, 其规模的维护策略直接影响着算法的收敛性和种群的均匀性, 因此, 外部归档集的维护策略是高维多目标优化的关键技术. 为进一步提升 HMMCA 算法的性能, 本文采用新型的交互式模糊支配策略和拥挤密度估计法来维护外部归档集的规模.

1) 交互式模糊支配. 对于任意两点  $X_1, X_2 \in R^n$ , 设  $B_t(X_1, X_2)$  表示  $X_1$  比  $X_2$  表现好的目标个数,  $E_q(X_1, X_2)$  表示  $X_1$  与  $X_2$  表现相同的目标个数,  $W_s(X_1, X_2)$  表示  $X_1$  比  $X_2$  表现差的目标个数, 当下式成立时,  $X_1$  模糊支配  $X_2$ , 记为  $X_1 \succ_{\text{fuzzy}} X_2$ :

$$\begin{cases} \frac{B_t(X_1, X_2)}{B_t(X_1, X_2) + W_s(X_1, X_2)} \geq \\ P_r \wedge P_w(X_1) < P_w(X_2), \\ P_w(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^M (F_i(X) - z(i))}. \end{cases} \quad (9)$$

其中:  $P_r \in (0.5, 1]$  为阈值,  $P_w$  为能量参数,  $z(i) = \min F_i(X)$  为参考点. 设当代种群中的非支配个体的数量为  $N_{\text{now}}$ , 而所期望的非支配个体数量的范围为  $[N_{\text{min}}, N_{\text{max}}]$ , 阈值  $P_r$  的交互式调整策略如下式所示:

$$P_r = \begin{cases} P_r + l, & N_{\text{now}} < N_{\text{min}}, \\ \text{if } P_r > 1, \text{ then } P_r = 1; \\ P_r - l, & N_{\text{now}} > N_{\text{max}}, \\ \text{if } P_r < 0.5, \text{ then } P_r = P_r + l. \end{cases} \quad (10)$$

其中  $l$  为调整步长, 最小的有效值为  $l = 1/M$ .

2) 拥挤密度估计法. 为了保证高维多目标优化算法具有较好的分布性, 一般引入拥挤密度估计策略, 并且常常是通过计算个体在目标空间的距离实现的. 本文的拥挤密度估计为

$$D_i = \frac{1}{\frac{\text{kn}}{\sum_{k=1}^{\text{kn}} \left[ 1 - \left( \frac{d_{ik}}{d_{i\text{kn}}} \right)^2 \right]} + 1}, \quad (11)$$

其中  $\text{kn}$  为种群规模的平方根取整.

本文设计的外部归档集维护策略是: 首先, 利用交互式模糊支配对种群进行支配分层, 并截取不小于设定规模的最少层来构成过渡种群; 然后, 按照

式(11)计算过渡种群中个体的拥挤度,并令极值点的拥挤度为零;最后,以个体的支配度和拥挤度为个体的总适应度,并选取适应度小的个体构成新的归档集。

### 2.3 HMMCA 算法流程及性能分析

基于上述维护策略,本文提出了高维多目标多方向协同进化算法 HMMCA,其具体流程如图 1 所示。

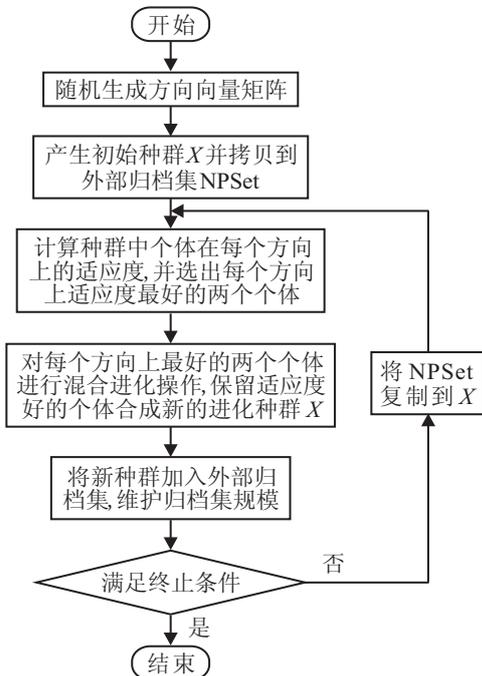


图 1 HMMCA 算法流程

HMMCA 算法采用了多种策略来提升求解性能。首先,将高维多目标优化分解成多个方向上简单的单目标优化,而差分算子具有很好的单目标求解能力,增强了算法对真实 Pareto 前沿面的收敛能力,同时,SBX 算子父代的交叉遗传增强了不同方向间的信息交互,增强了算法的横向搜索能力,二者相互结合进行横纵向搜索,加强了算法的全局寻优能力,从而提升了算法整体的收敛性。分解成多个方向进行搜索,在一定程度上能够保证算法在较大的区域内进行搜索,使种群具有较好的多样性,而式(11)的拥挤度估计因子使种群中的个体会因为具有共同的相邻个体而联系在一起,所以能够在一定程度上反映出该个体在种群中的整体分布。另外,采取在该局部区域内距离不同的个体对其拥挤度的影响不同的放大策略可以保证个体具有较好的邻域分布,能够进一步促进种群分布的均匀性,二者结合改善了算法整体的分布性。HMMCA 算法采用的模糊支配将个体间  $m$  个目标的比较转换成两个值的比较,使个体优劣的评价不再受目标数量的影响,降低了求解难度;通过减小参数  $P_r$  的值可放宽支配的条件,减少非支配个体的数量,提高种群的先进性,这会进一步提升算法的收敛性,并且可以通过控制  $P_r$  值的大小来控制归档集中非支

配个体的数量,促进了在维护归档集规模时收敛性与分布性之间的平衡。

HMMCA 算法的计算复杂度包括以下 3 个方面:

1) 分解进化操作,与 MOEA/D 算法相比, HMMCA 增加了一个差分算子,整个种群需进行  $N$  次差分操作,复杂度增加  $O(N)$ ; 2) 非支配分层,与其他现有的高维多目标优化算法相同,复杂度小于  $O(MN^3)$ ; 3) 拥挤度计算,式(11)比 Harmonic 平均距离少计算  $W - kn$ ,计算复杂度为  $O(MW \log W - W + kn)$ 。

### 3 实验仿真与结果分析

为了验证本文提出的 HMMCA 算法在高维多目标优化问题上的求解性能,分别在 4、10、20 目标的 DTLZ1 ~ DTLZ4 函数上测试算法的收敛能力、运算能力、全局寻优能力和分布性,并将其与 MOGA、MOGLS、MOEA/D 三种目前性能较优的 MOEAs 进行对比分析。算法性能对比采用通用的 3 个评价标准 GD、SP 和 MS<sup>[12]</sup>。GD 指标用来测量算法最终获得的非支配解集与理论 Pareto 最优解集的逼近程度, GD 越小说明算法的收敛性越好; SP 指标用来评价所得解集在目标空间上的分布情况, SP 越小代表所得解的分布越均匀,算法分布性越好; MS 指标用来评价所得解集的宽广度, MS 越接近于 1, 所得解集的宽广度越好。

所有实验在硬件配置为 Intel Pentium, CPU: G620、4G 内存、2.6GHz 主频, Win7 64 位操作系统的计算机上进行,程序采用 Matlab R2010b 编写。

4 目标优化实验参数设置为: DTLZ 函数目标个数为 4, 变量  $x$  的维数为 8, 各算法的迭代次数为 1000。10 目标优化实验参数设置为: DTLZ 函数目标个数为 10, 变量  $x$  的维数为 14, 各算法的迭代次数为 1000。20 目标优化实验参数设置为: DTLZ 函数目标个数为 20, 变量  $x$  的维数为 24, 各算法的迭代次数为 1000。为了保证比较的公平性,所有算法在每个测试函数上的种群规模设置为 100, 采用 5000 个均匀分布的 Pareto 最优解作为真实 Pareto 前沿的近似解集, 每个算法独立运行 20 次, 实验结果箱线图如图 2 ~ 图 5 所示。

从图 2 可以看出,对于测试函数 DTLZ1, 当目标数分别为 4、10、20 时, 本文算法 HMMCA 的 GD 和 SP 值都略小于 MOEA/D 算法, 而明显小于其他两种对比算法, 说明本文算法求得的解集最接近真实的 Pareto 前沿面, 收敛性最好, 且分布的最均匀; 而 MOEA/D 算法次之, MOGA 和 MOGLS 算法较差。对于指标 MS, 当目标为 4 时, MOGA 算法最接近 1, 剩下的依次为 MOEA/D、本文算法 HMMCA 和 MOGLS,

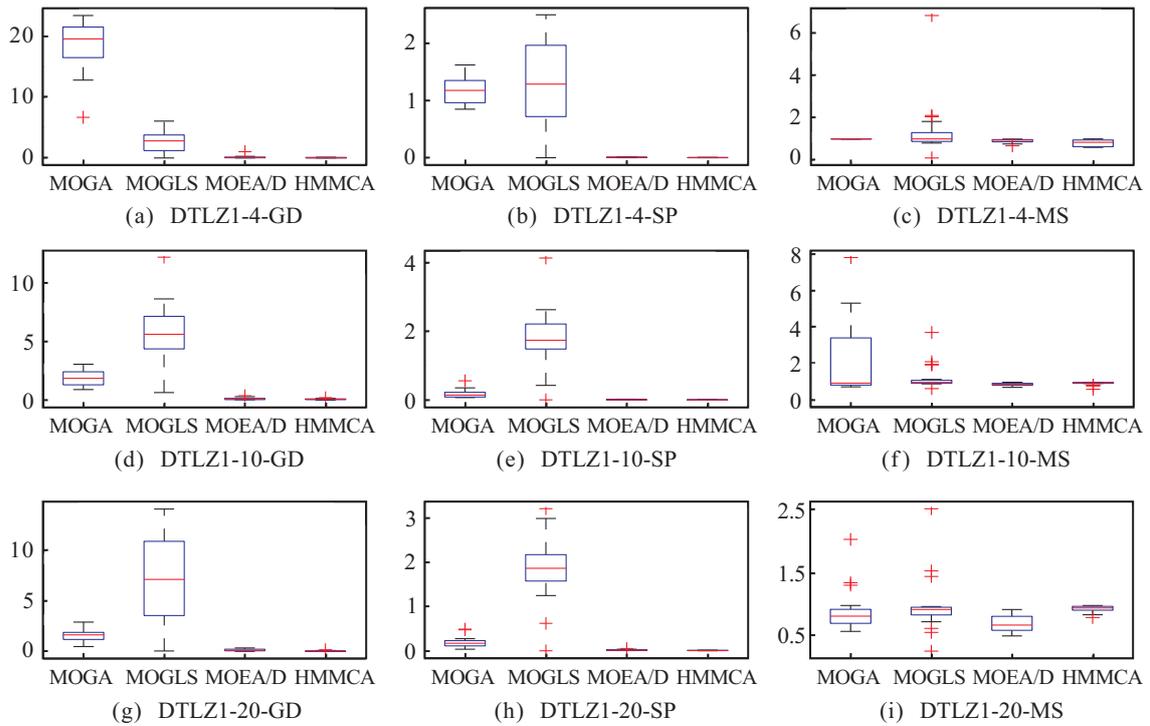


图 2 4 种算法在 DTLZ1 上的实验结果箱线图

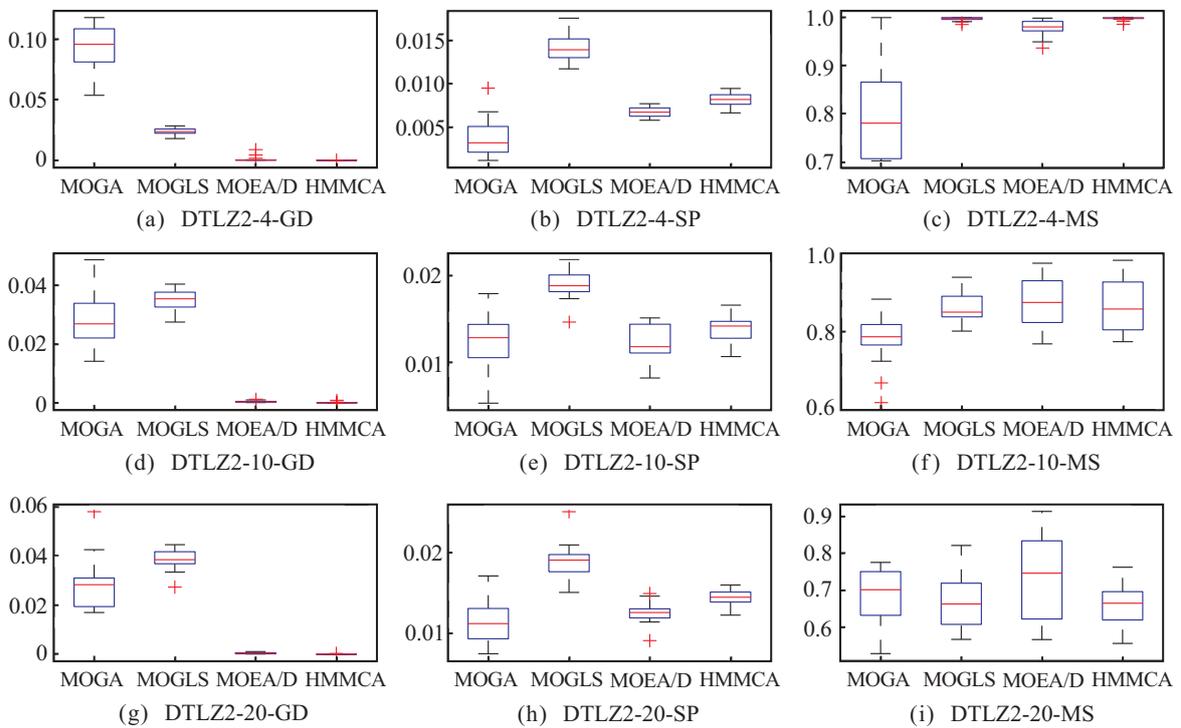


图 3 4 种算法在 DTLZ2 上的实验结果箱线图

说明本文算法求得的解集宽广度比 MOGA 和 MOEA/D 算法差, 而好于 MOGLS 算法; 当目标数为 10 时, 各算法获得的 MS 值距 1 由近及远依次为 MOEA/D、HMMCA、MOGLS、MOGA, 说明本文算法 HMMCA 的宽广度差于 MOEA/D 算法而好于其他两种算法; 当目标数为 20 时, 本文算法的 MS 最接近 1, 说明本文算法宽广度最好. 对比不同目标数时的实验结果可以发现, 随着目标数的增多, MOGA 和 MOGLS 两种算

法数值变化较大, 而 MOEA/D 和本文算法 HMMCA 变化很小, 说明 MOGA 和 MOGLS 的性能受到目标数的影响, 而 MOEA/D 和本文算法的求解性能不受目标数量的影响. 实验结果表明本文算法具有很好的收敛能力, 适合求解高维多目标优化问题.

从图 3 可以看出, 对于测试函数 DTLZ2, 目标数为 4、10、20 时, 本文算法 HMMCA 获得的 GD 值都略小于 MOEA/D 算法而明显小于其他两种算法, 说明

本文算法求得的解集最逼近 Pareto 前沿, 具有最好的收敛能力. 本文算法获得的 SP 值均大于 MOGA 和 MOEA/D 算法, 而小于 MOGLS 算法, 说明本文算法在分布性上差于 MOGA 和 MOEA/D 算法, 好于 MOGLS 算法. 从各算法获得的 MS 值到 1 的距离看, 本文算法与 MOGLS 算法相似: 当目标数为 4 时比 MOGA 和 MOEA/D 算法更近; 当目标数为 10 时, 比 MOGA 近但比 MOEA/D 远; 当目标数为 20 时, 比 MOGA 和

MOEA/D 都远. 说明本文算法的宽广度随目标数的增多而下降.

从图 4 可以看出, 对于目标数分别为 4、10、20 的测试函数 DTLZ3, 本文算法 HMMCA 获得的 GD 和 SP 值都略小于 MOEA/D 算法而明显小于另外两种对比算法, 说明本文算法求得的最优解集最接近 Pareto 前沿, 具有最好的收敛性且分布最均匀. 4 种算法获得的 MS 值都比较接近于 1 值, 都具有较好的宽

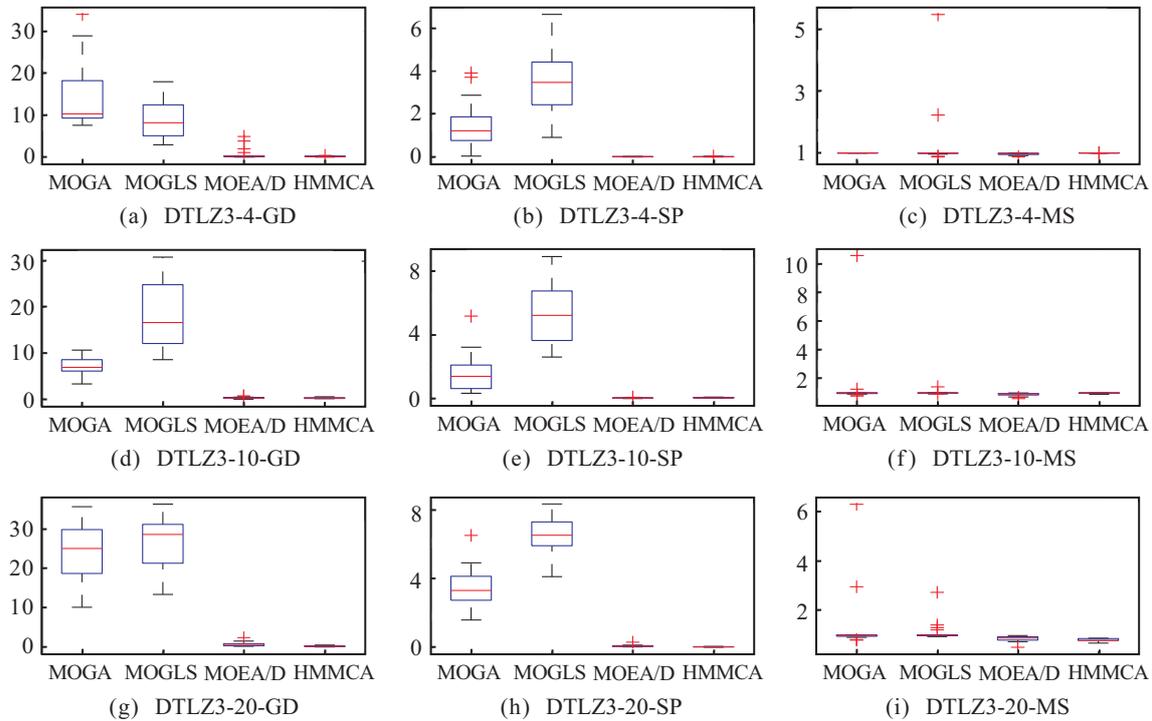


图 4 4 种算法在 DTLZ3 上的实验结果箱线图

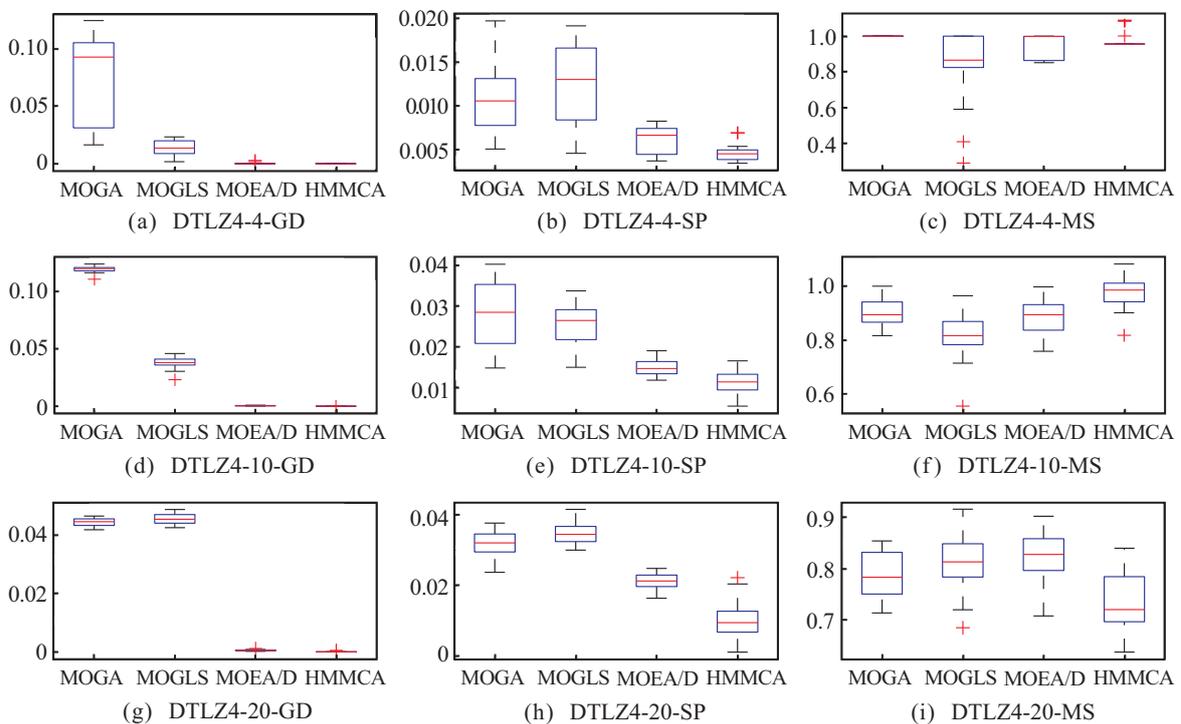


图 5 4 种算法在 DTLZ4 上的实验结果箱线图

广度, 而本文算法最稳定. 此实验中, 本文算法能够获得很好的 3 个指标值, 且都不随目标数量的增加而恶化, 表明本文算法具有很好的全局寻优能力, 不易陷入局部最优, 适合求解高维复杂多目标优化问题.

从图 5 可以看出, 对于测试函数 DTLZ4, 本文算法 HMMCA 获得的 GD 和 SP 值小于 3 种对比算法, 说明本文算法求得的最优解集最接近 Pareto 前沿, 具有最好的收敛性且分布最均匀. 而本文算法获得的 MS 值随目标数的增加距 1 的距离增大, 说明本文算法的宽广度随着目标数量的增加而有所下降. 此实验表明本文算法在求解高维多目标优化问题上具有很好的分布性.

从以上实验结果可以看出, 本文提出的 HMMCA 求得的多目标最优解集在宽广度上有所欠缺, 但能获得较理想的收敛性和均匀性, 且不受目标数量的影响, 能够保持明显的优势, 在解决高维复杂多目标优化问题上, 大大改善了现有 MOEAs 的求解性能.

## 4 结 论

针对现有高维多目标优化算法存在的解集收敛性不佳、分布性差的问题, 本文提出了一种高维多目标多方向协同进化算法——HMMCA, 将高维多目标优化问题分解成多个方向上的简单问题, 设计并提出了合适的进化策略和外部归档集维护策略, 使 HMMCA 能在保证收敛到真实 Pareto 前沿的同时, 获得分布更均匀的近似 Pareto 最优解集. 通过对 4、10、20 目标在测试函数集 DTLZ 上的实验表明, 本文提出的 HMMCA 与现有的 MOEAs 相比, 在解决高维复杂多目标优化问题时收敛性和均匀性都有了较大幅度的提升. 未来的发展方向是将其应用于工程优化设计及管理决策中, 以获得更大的经济效益和社会效益.

## 参考文献(References)

- [1] 尚荣华, 胡朝旭, 焦李成. 多目标优化算法在多分类中的应用研究[J]. 电子学报, 2012, 40(11): 2264-2269.  
(Shang R H, Hu C X, Jiao L C. Research of multi-objective optimization algorithm's application in multi-class classification[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(11): 2264-2269.)
- [2] 章萌, 章卫国, 孙勇. 多目标强度 Pareto 混沌差分算法[J]. 控制与决策, 2012, 27(1): 41-52.  
(Zhang M, Zhang W G, Sun Y. Multi-objective strength Pareto chaotic differential evolution algorithm[J]. Control and Decision, 2012, 27(1): 41-52.)
- [3] Zhang Qingfu, Li Hui. MOEA/D: A multi-objective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2007, 11(6): 712-731.
- [4] Ikeda K, Kita H, Kobayashi S. Failure of Pareto-based MOEAs: Does non-dominated really mean near to optimal[C]. Proc of 2001 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Seoul: IEEE Service Center, 2001: 957-962.
- [5] Deb K, Saxena D K. On finding Pareto-optimal solutions through dimensionality reduction for certain large-dimensional multi-objective optimization problems[R]. India: Genetic Algorithms Laboratory(KanGAL), Institute of Technology Kanpur, 2005.
- [6] Jaimes A L, Coello C A C, Chakraborty D. Objective reduction using a feature selection technique[C]. Proc of the 10th Annual Conf on Genetic and Evolutionary Computation. New York: ACM, 2008: 673-680.
- [7] Farina M, Amato P. A fuzzy definition of optimality for many-criteria optimization problems[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, 2004, 34(3): 315-326.
- [8] Hernandez-Diaz A, Santana-Quintero L, Coello-Coello C, et al. Pareto-adaptive  $\epsilon$ -dominance[J]. Evolutionary Computation, 2007, 15(4): 493-517.
- [9] 郭思涵, 龚小胜. 正交设计的  $E$  占优策略求解高维多目标优化问题研究[J]. 计算机科学, 2012, 39(2): 276-310.  
(Guo S H, Gong X S. Research of orthogonal  $E$ -dominant (OE) strategy to solve large-dimensional objective optimization problems[J]. Computer Science, 2012, 39(2): 276-310.)
- [10] Qu Li, Chao Chen, Weihong Wang. An adaptive multi-phenotype GEP algorithm[C]. IEEE Int Conf on Natural Computation. Chongqing, 2012: 631-634.
- [11] Hyounjin Kim, Meng-Sing Liou. New fitness sharing approach for multi-objective genetic algorithm[J]. Spring Science+Business Media, 2012, 19(8): 579-595.
- [12] Jiao L C, Wang H D, Shang R H. A co-evolutionary multi-objective optimization algorithm based on direction vectors[J]. Information Science, 2013, 228: 90-112.
- [13] 王瑞琪, 张承慧, 李珂. 基于改进混沌优化的多目标遗传算法[J]. 控制与决策, 2011, 26(9): 1391-1397.  
(Wang R Q, Zhang C H, Li K. Multi-objective genetic algorithm based on improved chaotic optimization[J]. Control and Decision, 2011, 26(9): 1391-1397.)

(责任编辑: 李君玲)