

## 基于旋转矩阵描述的航天器无角速度测量姿态跟踪无源控制

郑 重, 宋申民

(哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术研究中心, 哈尔滨 150001)

**摘 要:** 利用系统无源性和旋转矩阵性质研究无角速度测量下的姿态跟踪控制问题. 为了避免姿态参数的奇异性和模糊性, 提出基于三维特殊正交群(SO(3))的控制策略. 首先利用旋转矩阵建立姿态跟踪误差方程, 然后分析了系统的内在无源性, 从而揭示了闭环系统的稳定性. 当角速度无法获得时, 利用新的无源滤波提出一种无角速度测量控制律, 并给出了严格的 Lyapunov 稳定性分析. 最后, 通过数值仿真验证了所提出的控制方法的有效性.

**关键词:** 姿态跟踪; 旋转矩阵; 无源控制; 无速度反馈; Barbalat 引理

中图分类号: V448.2

文献标志码: A

## Rotation matrix based passive attitude tracking control of spacecraft without angular velocity measurements

ZHENG Zhong, SONG Shen-min

(Center of Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China.  
Correspondent: SONG Shen-min, E-mail: songshenmin@hit.edu.cn)

**Abstract:** Attitude tracking control without angular velocity measurements is investigated by using the passivity of the system and the property of rotation matrix. The control scheme developed on the special orthogonal group(SO(3)) is proposed to avoid ambiguities and singularities of attitude parameters. Firstly, the equations of attitude tracking error are established by using the rotation matrix. Then, the inherent passivity of the system is analyzed to reveal the stability of the closed-loop system. With the use of a novel passive filter, a controller without angular velocity is proposed while the velocity measurements may not be available. The strict Lyapunov stability analysis is also presented. Finally, numerical simulations validate the effectiveness of the proposed control method.

**Key words:** attitude tracking; rotation matrix; passivity-based control; velocity-free feedback; Barbalat's lemma

### 0 引 言

在深空探测、交会对接、对地观测等空间活动中, 航天器需要进行姿态控制以完成在轨任务, 因此航天器姿态控制引起了人们的广泛兴趣和深入研究<sup>[1-3]</sup>. 姿态控制问题的一个重要特征是, 旋转矩阵组成的集合即特殊正交群 SO(3) 不是线性的, 因此, 在 SO(3) 中不存在全局稳定的连续反馈控制律<sup>[4]</sup>. 由于四元数与旋转矩阵不是一一对应的, 采用四元数进行姿态控制可能导致姿态展开现象<sup>[4-5]</sup>, 即航天器初始姿态虽然位于期望姿态附近, 但仍需经过接近 360° 的大角度机动才能到达期望姿态. 从燃料消耗和振动抑制的角度看, 这种现象对航天器是不利的.

为了克服姿态展开现象, 目前主要有两种方法较

为常见: 一种是采用基于四元数的非连续控制律<sup>[6]</sup>和四元数混杂控制律<sup>[7-9]</sup>, 然而, 以上控制律是非连续的, 在非连续点附近可能会导致抖振现象, 同时, 航天器姿态控制执行机构如飞轮、控制力矩陀螺、磁力矩器等无法提供非连续的控制输入; 另一种方法是采用旋转矩阵作为姿态参数设计连续控制律, 事实上旋转矩阵满足了姿态描述的全局性和非奇异性, 与航天器姿态在物理意义上是一一对应的. 文献[10-11]分别基于旋转矩阵和无源控制的思想得到了几乎全局稳定的姿态控制律; 文献[12]基于旋转矩阵得到了指数稳定的姿态跟踪控制律, 且稳定性是几乎全局的. 然而, 上述文献设计的控制律均需要利用航天器的角速度信息. 为了满足节省费用、空间和重量的要求, 航

收稿日期: 2013-04-01; 修回日期: 2013-06-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174037); 国家 973 计划项目(2012CB821205); CAST 创新基金项目(CAST2012 0602).

作者简介: 郑重(1986—), 男, 博士生, 从事航天器姿态控制和编队飞行控制的研究; 宋申民(1968—), 男, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、智能优化与智能控制、飞行器控制等研究.

天器可能未携带角速度传感器,即使航天器装备了角速度传感器,由于太空环境的复杂性,传感器也容易发生故障.可见,在角速度不可获得的情况下,研究无需角速度测量的姿态跟踪控制律是十分必要的.文献[13-14]利用系统无源性方法分别设计了基于四元数和罗德里格参数的无角速度测量姿态控制律;文献[15]利用自适应控制设计了无需转动惯量阵和角速度的自适应姿态跟踪控制律;文献[16]提出一种四元数观测器,设计了无角速度的姿态跟踪输出反馈控制律;文献[17]设计了自适应神经网络控制律,控制律不需要角速度和转动惯量信息.但是,以上文献在设计姿态控制律时并未考虑姿态展开问题.

本文基于旋转矩阵和无源控制理论设计了无需角速度测量的姿态跟踪控制律,闭环系统期望平衡点对应于唯一的旋转矩阵,因此能够避免姿态展开.数值仿真结果表明,所提出的控制律精度较高,对于大角度机动的姿态跟踪问题也不会发生姿态展开现象.

## 1 航天器姿态跟踪数学模型

航天器姿态动力学和运动学模型<sup>[12]</sup>为

$$J\dot{\omega} = -\omega^\times J\omega + u, \quad (1)$$

$$\dot{R} = R\omega^\times. \quad (2)$$

其中:  $J \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  为转动惯量阵;  $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^\text{T} \in \mathbf{R}^3$  为体坐标系下的角速度;  $u$  为控制力矩;  $R \in \text{SO}(3)$  表示体坐标系到惯性坐标系的旋转矩阵;  $\omega^\times$  表示由  $\omega$  生成的反对称阵,即

$$\omega^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

式(3)所定义的叉乘运算的逆运算记为  $\vee$ , 它将任意三维反对称阵映射为三维向量,即

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}^\vee = [a_1 \ a_2 \ a_3]^\text{T}. \quad (4)$$

姿态跟踪的目的是设计控制律  $u$ , 使系统跟踪给定的期望姿态信号  $R_d \in \text{SO}(3)$ , 其运动学方程为

$$\dot{R}_d = R_d \omega_d^\times, \quad (5)$$

其中  $\omega_d \in \mathbf{R}^3$  为期望的角速度.若定义误差旋转矩阵  $\tilde{R} = R_d^\text{T} R$ , 以及误差角速度  $\tilde{\omega} = \omega - \tilde{R}^\text{T} \omega_d$ , 则可以得到姿态跟踪误差运动学和动力学方程为

$$\dot{\tilde{R}} = \tilde{R} \tilde{\omega}^\times, \quad (6)$$

$$J\dot{\tilde{\omega}} = \{ (J\omega)^\times - (\tilde{R}^\text{T} \omega_d)^\times J - J(\tilde{R}^\text{T} \omega_d)^\times \} \tilde{\omega} - (\tilde{R}^\text{T} \omega_d)^\times J(\tilde{R}^\text{T} \omega_d) - J\tilde{R}^\text{T} \dot{\omega}_d + u. \quad (7)$$

本文的目的是: 对于给定的任意参考姿态信号  $R_d \in \text{SO}(3)$  和  $\omega_d \in \mathbf{R}^3$ , 设计无角速度反馈控制律  $u$ , 使得

当  $t \rightarrow \infty$  时,  $R \rightarrow R_d$  和  $\omega \rightarrow \tilde{R}^\text{T} \omega_d$  成立, 即  $\tilde{R} \rightarrow I$ ,  $\tilde{\omega} \rightarrow 0$ .

## 2 主要结果

本节首先分析姿态跟踪控制系统(6)和(7)的无源性, 然后利用无源滤波方法提出一种无需角速度的姿态跟踪控制方法, 并分析闭环系统的Lyapunov稳定性.

### 2.1 姿态跟踪控制系统无源性分析

基于单位四元数或罗德里格参数的姿态跟踪系统的无源性已经得到了充分的研究<sup>[1,13-14]</sup>. 受文献[1,13-14]的启发, 本节分析基于旋转矩阵的姿态跟踪控制系统(6)和(7)的无源性. 针对系统(6)和(7), 姿态误差函数和姿态误差向量定义<sup>[12]</sup>为

$$\psi(\tilde{R}) = 2 - \sqrt{1 + \text{tr}(\tilde{R})}, \quad (8)$$

$$e_{\tilde{R}} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \text{tr}(\tilde{R})}} (\tilde{R} - \tilde{R}^\text{T})^\vee. \quad (9)$$

定义集合  $L = \{R \in \text{SO}(3) | \psi(R) < 2\}$ , 则  $e_{\tilde{R}}$  在集合  $L$  上是有定义的, 其导数为

$$\dot{e}_{\tilde{R}} = \frac{\text{tr}(\tilde{R})I - \tilde{R}^\text{T} + 2e_{\tilde{R}}e_{\tilde{R}}^\text{T}}{2\sqrt{1 + \text{tr}(\tilde{R})}} \tilde{\omega} \equiv E(\tilde{R})\tilde{\omega}, \quad (10)$$

其中  $E(\tilde{R}) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ , 并且  $E(\tilde{R})$  在集合  $L$  上是可逆的.

**定义1** 考虑非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ y = h(x). \end{cases} \quad (11)$$

对于所有  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $u \in \mathbf{R}^m$ ,  $f$  是局部李普希茨函数且  $f(0, 0) = 0$ ,  $h$  是连续的且  $h(0) = 0$ . 如果存在连续可微的半正定函数  $V(x)$  (存储函数), 使得

$$u^\text{T} y \geq \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \quad (12)$$

成立, 则上述非线性系统是无源的<sup>[18]</sup>.

**定理1** 1) 如果姿态跟踪控制系统(6)和(7)的控制律  $u$  设计为

$$u = -k_{\tilde{R}} e_{\tilde{R}} + (\tilde{R}^\text{T} \omega_d)^\times J(\tilde{R}^\text{T} \omega_d) + J(\tilde{R}^\text{T} \dot{\omega}_d) + v, \quad (13)$$

其中  $k_{\tilde{R}} > 0$ , 则系统的输入  $v$  到输出  $\tilde{\omega}$  是无源的;

2) 假设系统的轨迹总是位于集合  $L$  上, 则系统的输入  $y = E^{-\text{T}}(\tilde{R})v$  到输出  $\dot{e}_{\tilde{R}} = E(\tilde{R})\tilde{\omega}$  是无源的.

**证明** 1) 令存储函数  $V_1 = 0.5\tilde{\omega}^\text{T} J\tilde{\omega} + k_{\tilde{R}}\psi(\tilde{R})$ , 经计算得  $\dot{V}_1 = \tilde{\omega}^\text{T} e_{\tilde{R}}$ . 因为  $(J\omega)^\times - (\tilde{R}^\text{T} \omega_d)^\times J - J(\tilde{R}^\text{T} \omega_d)^\times$  是反对称阵, 所以在控制律(13)的作用下,  $\dot{V}_1 = \tilde{\omega}^\text{T} v$ , 从而系统输入  $v$  到输出  $\tilde{\omega}$  是无源的.

2) 如果系统轨迹总位于集合  $L$  上, 则  $E^\text{T}(\tilde{R})$  是可逆的且  $y$  总是有定义的, 因此

$$e_{\tilde{R}}^\text{T} y = \tilde{\omega}^\text{T} E^\text{T}(\tilde{R})E^{-\text{T}}(\tilde{R})v = \tilde{\omega}^\text{T} v. \quad (14)$$

取系统存储函数为  $V_1$ , 则系统输入  $\mathbf{y}$  到输出  $\dot{\mathbf{e}}_{\tilde{\mathbf{R}}}$  是无源的.  $\square$

**注 1** 在式 (13) 中, 控制律包含 4 项, 第 1 项为姿态误差项, 第 2 和第 3 项为前馈补偿项, 第 4 项为输入  $\mathbf{v}$ . 本文定义了新的输入  $\mathbf{y}$  和输出  $\dot{\mathbf{e}}_{\tilde{\mathbf{R}}}$ , 并且新的输入到输出是无源的. 针对级联无源系统 (6) 和 (7), 可以设计无角速度反馈控制律, 使得系统  $\dot{\mathbf{e}}_{\tilde{\mathbf{R}}}$  到  $\mathbf{y}$  是严格无源的, 从而能够利用无源控制理论<sup>[6-7,18]</sup>设计无速度反馈控制律并证明系统的渐近稳定性.

## 2.2 无角速度控制律设计

假设  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  ( $n \geq 3$ ) 是 Hurwitz 矩阵,  $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times 3}$  为列满秩矩阵, 且  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  可控. 令  $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为任意正定对称矩阵,  $\mathbf{P}$  为 Lyapunov 方程  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$  的正定解.

**定理 2** 对于给定连续的期望姿态  $\mathbf{R}_d(t)$  和期望角速度  $\boldsymbol{\omega}_d(t)$ , 设计控制律为

$$\mathbf{u} = -k_{\tilde{\mathbf{R}}} \mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}} - k_z \mathbf{E}^T(\tilde{\mathbf{R}}) \mathbf{z} + (\tilde{\mathbf{R}}^T \boldsymbol{\omega}_d)^\times \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{R}}^T \boldsymbol{\omega}_d) + \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{R}}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_d). \quad (15)$$

其中:  $k_{\tilde{\mathbf{R}}} > 0, k_z > 0, \mathbf{z}$  为下面无源滤波器的输出:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}}, \quad (16)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}}. \quad (17)$$

则在控制律 (15) 的作用下集合  $L$  为正不变集. 同时, 闭环系统渐近稳定到平衡点  $\{\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I}, \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}\}$ , 吸引区的估计由下面不等式给出:

$$\psi(\tilde{\mathbf{R}}(0)) < 2, \quad (18)$$

$$\|\tilde{\boldsymbol{\omega}}(0)\|^2 < \frac{4k_{\tilde{\mathbf{R}}} - 2k_{\tilde{\mathbf{R}}}\psi(\tilde{\mathbf{R}}(0)) - k_z \dot{\mathbf{x}}(0)^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}(0)}{\lambda_{\max}(\mathbf{J})}. \quad (19)$$

其中:  $\lambda_{\max}(\mathbf{J})$  为转动惯量阵  $\mathbf{J}$  的最大特征值, 式 (18) 和 (19) 分别表示初始姿态和角速度吸引区范围.

**证明** 选取 Lyapunov 函数为

$$V_2 = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \mathbf{J} \tilde{\boldsymbol{\omega}} + k_{\tilde{\mathbf{R}}} \psi(\tilde{\mathbf{R}}) + \frac{k_z}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}. \quad (20)$$

$V_2$  的导数沿闭环系统的轨迹为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \mathbf{J} \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} + k_{\tilde{\mathbf{R}}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}} + \frac{k_z}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} + \frac{k_z}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = \\ &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T (-k_{\tilde{\mathbf{R}}} \mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}} - k_z \mathbf{E}^T(\tilde{\mathbf{R}}) \mathbf{z}) + k_{\tilde{\mathbf{R}}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}} + \\ &= \frac{k_z}{2} \dot{\mathbf{x}}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \dot{\mathbf{x}} + k_z \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}} = \\ &= \frac{k_z}{2} \dot{\mathbf{x}}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \dot{\mathbf{x}} = \\ &= -\frac{k_z}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}} \leq 0, \end{aligned} \quad (21)$$

因此, 对于  $t \geq 0, V_2(t) \geq V_2(0)$ . 由式 (19) 可得

$$V_2(0) \leq \frac{1}{2} \lambda_{\max} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}(0)\|^2 + k_{\tilde{\mathbf{R}}} \psi(\tilde{\mathbf{R}}(0)) +$$

$$\frac{k_z}{2} \dot{\mathbf{x}}(0)^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}(0) < 2k_{\tilde{\mathbf{R}}}, \quad (22)$$

所以

$$k_{\tilde{\mathbf{R}}} \psi(\tilde{\mathbf{R}}(t)) \leq V_2(t) \leq V_2(0) < 2k_{\tilde{\mathbf{R}}}. \quad (23)$$

因此  $\psi(\tilde{\mathbf{R}}(t)) < 2$ , 在条件 (18) 和 (19) 下集合  $L$  是正不变集. 在控制律 (13) 的作用下, 闭环系统为

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} &= \{(\mathbf{J} \boldsymbol{\omega})^\times - (\tilde{\mathbf{R}}^T \boldsymbol{\omega}_d)^\times \mathbf{J} - \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{R}}^T \boldsymbol{\omega}_d)^\times\} \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \\ &= k_{\tilde{\mathbf{R}}} \mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}} - k_z \mathbf{E}^T(\tilde{\mathbf{R}}) \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (24)$$

下面用 Barbalat 引理<sup>[18]</sup>分析系统的稳定性.

首先,  $V_2$  是正定的且  $\dot{V}_2 \leq 0$  表明状态  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}}, \dot{\mathbf{x}}$  是有界的. 由式 (10) 可知,  $\dot{\mathbf{e}}_{\tilde{\mathbf{R}}}$  和  $\dot{V}_2$  是有界的, 因此  $\dot{V}_2$  是一致连续的. 注意到  $V_2 > 0$  和  $\dot{V}_2 \leq 0$  表明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{V}_2(\tau) d\tau$$

存在且有限, 应用 Barbalat 引理, 有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}_2(t) = 0$ , 因此当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\dot{\mathbf{x}} \rightarrow 0$ .

其次, 因为  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{e}}_{\tilde{\mathbf{R}}}$  和  $\mathbf{z}$  是有界的, 所以  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}$  和  $\ddot{\mathbf{x}}$  也是有界的. 由于在集合  $L$  上  $\text{tr}(\tilde{\mathbf{R}}) + 1 > 0$ , 通过计算  $\dot{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{R}})$  可知  $\dot{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{R}})$  在  $L$  上是有界的,  $\ddot{\mathbf{e}}_{\tilde{\mathbf{R}}}$  也是有界的. 由式 (16) 可知  $\ddot{\mathbf{x}}$  是有界的, 从而  $\dot{\mathbf{x}}$  是一致连续的. 注意到,  $\dot{\mathbf{x}} \rightarrow 0$  表明  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \ddot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau$  存在且有限, 再次应用 Barbalat 引理可得  $\ddot{\mathbf{x}} \rightarrow 0$ . 由式 (16),  $\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rightarrow 0$  以及矩阵  $\mathbf{B}$  是列满秩的, 可得  $\dot{\mathbf{e}}_{\tilde{\mathbf{R}}} \rightarrow 0$ , 从而由式 (10) 可知  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \rightarrow 0$ . 对式 (24) 求导可知  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}$  是有界的, 因此  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}$  是一致连续的, 再次应用 Barbalat 引理可得, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \rightarrow 0$ .

综上可得出, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \rightarrow 0, \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \rightarrow 0$  和  $\mathbf{z} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \rightarrow 0$ . 由式 (24) 和 (16) 可得  $\mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}} \rightarrow 0$  和  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ , 因此闭环系统渐近稳定到平衡点  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}} = \mathbf{x} = 0$ . 由式 (9) 可知  $(\tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{R}}^T)^\vee = 0$ , 即  $\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}}^T$ . 由于  $\tilde{\mathbf{R}}$  是正交矩阵且行列式为 1,  $\tilde{\mathbf{R}}$  的特征值是实数或成对出现的复数. 因此  $\tilde{\mathbf{R}}$  的特征值为 1、 $e^{i\theta}$  和  $e^{-i\theta}$ , 其中  $\theta \in \mathbf{R}$ . 矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}$  的酉分解表示为

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{U}^H \text{diag}\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\} \mathbf{U}, \quad (25)$$

其中  $\mathbf{U}$  为酉阵. 由  $\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}}^T = \tilde{\mathbf{R}}^{-1}$  可得

$$\mathbf{I} = \tilde{\mathbf{R}}^2 = \mathbf{U}^H \text{diag}\{1, e^{i2\theta}, e^{-i2\theta}\} \mathbf{U}, \quad (26)$$

因此  $2\theta = 2k\pi, k$  为一整数. 从而  $\tilde{\mathbf{R}}$  的特征值是  $\{1, 1, 1\}$  或者  $\{1, -1, -1\}$ , 即  $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I}$  或者  $\text{tr}(\tilde{\mathbf{R}}) = -1$ . 由于在集合  $L$  中  $\text{tr}(\tilde{\mathbf{R}}) \neq -1$ , 在平衡点处必然有  $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I}$  成立. 于是, 在无角速度控制律 (15) 的作用下, 系统轨迹渐近收敛到平衡点  $\{\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I}, \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}\}$ , 实现了姿态跟踪的目的.  $\square$

**注 2** 控制律 (15) 由 4 项组成. 其中: 第 1 项为姿态跟踪误差项; 第 2 项包含了无源滤波器的输出, 在闭环系统中起到了角速度阻尼的作用; 最后两项为与姿态跟踪相关的前馈补偿项.

**注3** 由吸引区(18)可看出设计的控制律是几乎全局收敛的,即只要初始姿态满足  $\text{tr}\tilde{\mathbf{R}}(0) \neq -1$  即可,因此吸引区覆盖了除零测度集  $\{\mathbf{R}_d(0) \exp(\pi \mathbf{s}^\times) | \mathbf{s} \in S^2\}$  以外的  $\text{SO}(3)$  集合. 由于姿态控制中连续反馈控制律无法实现全局渐近稳定<sup>[10]</sup>,式(18)对于吸引区的估计是最优的. 由式(19)可知,航天器转动惯量最大特征值越小,初始姿态误差越小,初始角速度误差的估计范围越大. 同时,可以选择较大的控制律参数  $k_{\tilde{\mathbf{R}}}$ ,使得

$$k_{\tilde{\mathbf{R}}} > \frac{\lambda_{\max} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}(0)\|^2 + k_z \dot{\mathbf{x}}(0)^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}(0)}{2(2 - \psi(\tilde{\mathbf{R}}(0)))} \quad (27)$$

即可满足式(19).

特别地,对于航天器姿态调节问题,即  $\boldsymbol{\omega}_d(t) = 0$  和  $\mathbf{R}_d(t) = \mathbf{R}_d(0)$ ,控制律(15)变为如下的与模型无关的无角速度控制律:

$$\mathbf{u} = -k_{\tilde{\mathbf{R}}} e_{\tilde{\mathbf{R}}} - k_z \mathbf{E}^T(\tilde{\mathbf{R}}) \mathbf{z}. \quad (28)$$

控制律(28)不含有转动惯量  $\mathbf{J}$ ,对于模型不确定性具有鲁棒性,由此得到下面推论.

**推论1** 对于  $\boldsymbol{\omega}_d(t) = 0$  和  $\mathbf{R}_d(t) = \mathbf{R}_d(0)$  的姿态调节问题,在与模型无关的控制律(28)的作用下,系统渐近稳定到平衡点  $\{\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I}, \tilde{\boldsymbol{\omega}} = 0\}$ .

### 3 仿真结果

为了验证所提出的控制方法的有效性,对无角速度测量控制律(15)、文献[12]的有角速度测量控制律以及文献[13]基于四元数的无角速度测量控制律进行仿真对比. 仿真场景设定为使一颗失控自旋航天器经过大角度(179°)的姿态机动跟踪期望的姿态,其初始姿态、初始角速度、转动惯量阵、转动惯量阵不确定性和空间扰动力矩分别为

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}, \boldsymbol{\omega}(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T \text{ rad/s},$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$\Delta \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & -0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ -0.5 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$\mathbf{d} =$$

$$[0.1 \sin(0.1t) \ 0.06 \cos(0.2t) \ 0.05 \sin(0.2t)]^T \text{ N} \cdot \text{m};$$

期望的角速度和期望初始姿态由下式给出:

$$\boldsymbol{\omega}_d = 0.1[\sin(t/40) \ \cos(t/50) \ \sin(t/60)]^T \text{ rad/s},$$

$$\mathbf{R}_d(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{179}{180}\pi\right) & \sin\left(\frac{179}{180}\pi\right) \\ 0 & -\sin\left(\frac{179}{180}\pi\right) & \cos\left(\frac{179}{180}\pi\right) \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{R}_d(t)$ 可由式(5)解算得出. 文献[12]控制律的参数选取为  $k_{\tilde{\mathbf{R}}} = 0.2, k_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} = 2$ . 控制律(15)和文献[13]控制律参数选取为  $k_{\tilde{\mathbf{R}}} = 0.1$  和  $k_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} = 30$ ,滤波器的参数选为  $\mathbf{A} = -\mathbf{I}, \mathbf{B} = \mathbf{Q} = \mathbf{I}$  和  $\mathbf{P} = 0.5\mathbf{I}$ . 姿态误差角定义为

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}(\text{tr}(\tilde{\mathbf{R}}) - 1)\right),$$

$\theta$ 表示姿态跟踪系统的误差.

仿真结果如图1~图4所示. 图1和图2分别给出了上述3种控制律作用下的姿态误差角和角速度误差范数比较曲线,从图中可以看出姿态误差角和角速度误差在3种控制律作用下均渐近收敛到0,同时控制律(15)收敛速度更快,最终误差比文献[13]的无角速度测量控制律小,而文献[13]的四元数无角速

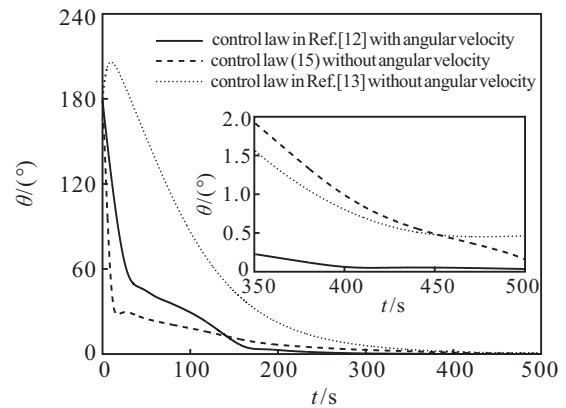


图1 姿态误差角比较曲线

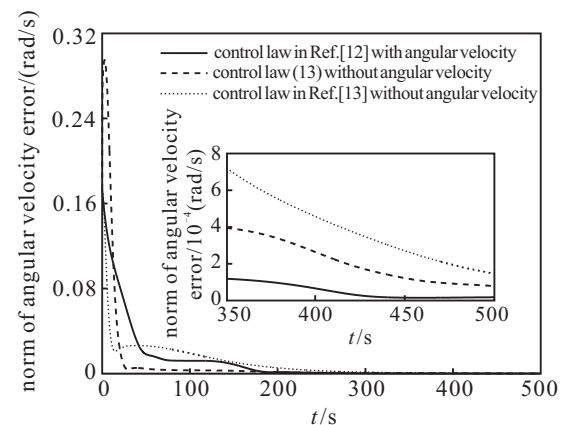


图2 角速度误差范数比较曲线

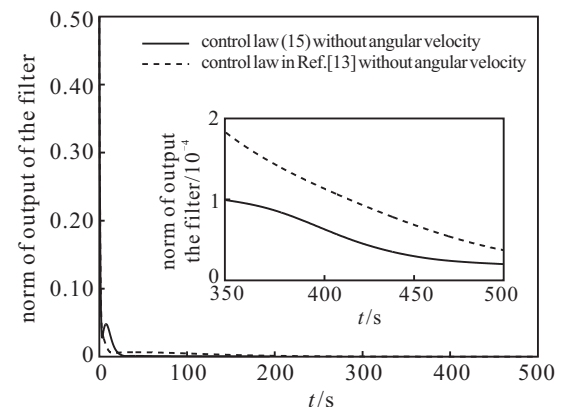


图3 滤波器输出范数比较曲线

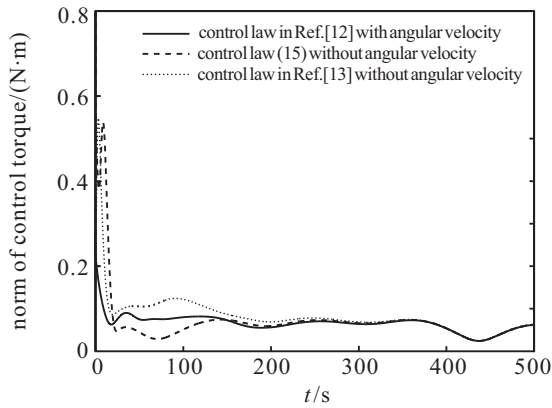


图 4 控制力矩范数比较曲线

度测量控制律发生了姿态展开现象. 图 3 为控制律 (15) 和文献 [13] 的无角速度测量控制律作用下滤波器输出范数比较曲线, 两种控制律作用下滤波器输出均收敛到 0. 图 4 为控制力矩范数比较曲线, 可见控制力矩小于  $1 \text{ N} \cdot \text{m}$ , 符合实际要求.

#### 4 结 论

本文利用非线性系统无源性和旋转矩阵设计了一种航天器无角速度测量姿态跟踪控制律. 采用旋转矩阵建立了航天器姿态跟踪数学模型, 设计了一种无源滤波器和无需角速度的姿态跟踪控制律, 并证明了闭环系统是渐近稳定的, 且吸引区是几乎全局的. 仿真结果表明, 所提出的控制律能够达到令人满意的姿态跟踪性能, 本文所得结果可用于航天器无角速度反馈大角度姿态跟踪机动控制. 对于存在扰动力矩情况的无角速度鲁棒姿态跟踪控制和多航天器姿态协同控制尚待进一步深入研究.

#### 参考文献(References)

- [1] Wen J T, Kreuta-Delgado K. The attitude control problem[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(10): 1148-1162.
- [2] Du H B, Li S H. Finite-time attitude stabilization for a spacecraft using homogeneous method[J]. *J of Guidance Control and Dynamics*, 2012, 35(3): 740-748.
- [3] 程小军, 崔祜涛, 徐瑞, 等. 几何约束下的航天器姿态机动控制[J]. *控制与决策*, 2012, 27(5): 724-730.  
(Cheng X J, Cui H T, Xu R, et al. Attitude maneuver control of spacecraft under geometric constraints[J]. *Control and Decision*, 2012, 27(5): 724-730.)
- [4] Bhat S, Bernstein D. A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon[J]. *Systems and Control Letters*, 2000, 39(1): 63-70.
- [5] Chaturvedi N, Sanyal A, Mcclamroch N. Rigid-body attitude control[J]. *IEEE Control System Magazine*, 2011, 31(3): 30-51.
- [6] Fragopoulos D, Innocenti M. Stability considerations in quaternion attitude control using discontinuous Lyapunov functions[J]. *IEE Proc of Control Theory and Applications*, 2004, 151(3): 253-258.
- [7] Mayhew C G, Sanfelice R G, Teel A R. Quaternion-based hybrid control for robust global attitude tracking[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2011, 56(11): 2555-2566.
- [8] Mayhew C G, Sanfelice R G, Sheng J S, et al. Quaternion-based hybrid feedback for robust global attitude synchronization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2122-2127.
- [9] Schlanbusch R, Loria A, Nicklasson P J. On the stability and stabilization of quaternion equilibria of rigid bodies[J]. *Automatica*, 2012, 48(12): 3135-3141.
- [10] Sanyal A K, Fosbury A, Chaturvedi N A, et al. Inertia-free spacecraft attitude trajectory tracking with disturbance rejection and almost global stabilization[J]. *J of Guidance Control and Dynamics*, 2009, 32(4): 1167-1178.
- [11] Wang H L, Xie Y C. On passivity based attitude synchronization with communication time delays[C]. *The 18th IFAC World Congress*. Milano: IFAC, 2011: 8774-8779.
- [12] Lee T. Exponential stability of an attitude tracking control system on  $SO(3)$  for large-angle rotation maneuvers[J]. *Systems and Control Letters*, 2012, 61(1): 231-237.
- [13] Lizarralde F, Wen J T. Attitude control without angular velocity measurement: A passivity approach[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(13): 468-472.
- [14] Tsiotras P. Further passivity results for the attitude control problem[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(11): 1597-1600.
- [15] Costic B T, Dawson D M, de Queiroz M S, et al. Quaternion-based adaptive attitude tracking controller without velocity measurements[J]. *J of Guidance Control and Dynamics*, 2001, 24(6): 1214-1222.
- [16] Tayebi A. Unit quaternion-based output feedback for the attitude tracking problem[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2008, 53(6): 1516-1520.
- [17] Zou A M, Kumar K D. Adaptive attitude control of spacecraft without velocity measurements using Chebyshev neural network[J]. *Acta Astronautica*, 2010, 66(5/6): 769-779.
- [18] Khalil H. *Nonlinear systems*[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 2002.

(责任编辑: 曹洪武)