

不确定切换时滞非线性系统状态切换的指数稳定性

刘正凡, 蔡晨晓, 段文勇, 邹云

(南京理工大学 自动化学院, 南京 210094)

摘要: 利用状态依赖控制策略对切换信号进行设计, 使得一类参数不确定时滞非线性切换系统指数稳定且具有一定的 H_∞ 抗干扰性能. 利用 Lyapunov-Krasovskii (LK) 函数方法, 以线性矩阵不等式组的方式, 给出了稳定切换律存在的充分条件, 并且该系统是指数稳定的. 通过引入自由矩阵并结合积分不等式技巧, 得到了保守性较低的稳定性条件. 仿真算例表明了所提出方法的有效性和较低的保守性.

关键词: 指数稳定; 非线性切换系统; 不确定; 时变时滞; 切换信号

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Exponential stability of uncertain switched nonlinear time-delay systems with state-dependent switching

LIU Zheng-fan, CAI Chen-xiao, DUAN Wen-yong, ZOU Yun

(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: CAI Chen-xiao, E-mail: ccx5281@vip.163.com)

Abstract: By using the state-dependent switching control strategy, the switching rule design for global exponential stability with H_∞ performance of uncertain switched nonlinear systems with time-varying delay is considered. By using a Lyapunov-Krasovskii(LK) function technique, sufficient conditions for the existence of a class of stabilizing switching laws are derived in terms of linear matrix inequalities(LMIs) to guarantee the switched time delay system to be exponentially stable. The free weighting matrix and integral-inequality approaches are used to find the less conservative stability results. Numerical examples are provided to show the effectiveness and less conservativeness of the proposed methods.

Key words: exponential stability; nonlinear switched system; uncertain; time-varying delay; switching signal

0 引言

切换系统是一类混杂动态控制系统, 它由一系列连续或离散的子系统以及协调这些子系统之间切换运作的规则组成. 子系统间的切换规则规定着各个子系统在哪个时间瞬间被激活^[1]. 近几年, 切换系统稳定性等问题引起众多学者的关注, 并取得了丰硕的成果^[2-3]. 此外, 在实际工业控制系统中, 时滞现象是极其普遍的, 时滞的存在使得系统的分析和综合变得更加复杂和困难, 它往往也是系统不稳定和系统性能变差的根源^[4]. 对时滞系统的研究, 已有大量的文献, 获得了诸多有意义的进展^[4-6]. 切换系统结合时滞, 即为切换时滞系统^[6]. 在对实际对象进行建模的过程中, 常常会存在一些未知因素, 因此对不确定切换时滞系统的研究具有重要的理论价值和实际意义^[7-8].

切换系统最基本的 3 个问题是: 1) 在任意切换信号下系统的稳定性; 2) 对于给定的某类切换序列下系统的稳定性; 3) 设计使系统能够稳定的切换序列, 即镇定问题^[3]. 本文主要研究切换信号的设计问题. 对于切换信号的设计, 可分为时间驱动切换策略和状态驱动切换策略. 时间驱动的设计方法有: 驻留时间^[9]、平均驻留时间^[2]和模型独立平均驻留时间^[10]等方法. 状态依赖的研究方法有: 分段 Lyapunov 函数^[11]、凸组合^[12]、抽象聚合^[13]等方法.

Lyapunov-Krasovskii (LK) 函数是对时滞系统进行稳定性分析的有效方法^[4]. 文献 [5] 针对切换时滞系统, 通过运用 LK 函数方法, 研究了使得系统渐近稳定的切换信号的设计问题. 文献 [14] 针对切换信号的设计问题, 考虑了一类非线性切换时滞系统的指数稳

收稿日期: 2013-07-02; 修回日期: 2013-10-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61104064, 61174038).

作者简介: 刘正凡(1986—), 男, 博士生, 从事切换系统控制、大系统理论的研究; 邹云(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 从事系统一体化设计、应急控制与评估等研究.

定性. 随后, 文献 [15] 通过运用自由矩阵结合非负不等式方法, 得到了保守性更低的结果. 文献 [16] 通过设计状态依赖切换信号, 研究了一类不确定切换时滞离散系统的鲁棒 H_∞ 性能问题. 尽管如此, 对于不确定切换时滞非线性连续系统的 H_∞ 镇定问题, 目前相关的研究结果却鲜有报道.

本文针对一类具有参数不确定和外部干扰的状态时滞切换非线性系统, 研究切换信号的设计问题. 在设定的切换规则下, 使得该切换时滞非线性系统指数稳定性且具有一定的 H_∞ 性能. 利用 LK 函数方法, 通过引入自由权衡矩阵并结合适当的积分不等式方法, 得到了保守性较低的结果. 基于线性矩阵不等式, 给出了新的切换信号设计方法.

1 问题描述

考虑下列非线性切换时滞系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A_{\sigma(t)} + \Delta A_{\sigma(t)}(t)]x(t) + \\ [A_{d\sigma(t)} + \Delta A_{d\sigma(t)}(t)]x(t - \tau(t)) + \\ [B_{\sigma(t)} + \Delta B_{\sigma(t)}(t)]w(t) + \\ f_{\sigma(t)}(x(t), x(t - \tau(t))), t > 0; \\ y(t) = [C_{\sigma(t)} + \Delta C_{\sigma(t)}(t)]x(t) + \\ [C_{d\sigma(t)} + \Delta C_{d\sigma(t)}(t)]x(t - \tau(t)) + \\ [D_{\sigma(t)} + \Delta D_{\sigma(t)}(t)]w(t); \\ x(t) = \phi(t), t \in [-r, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为系统状态向量; $y(t) \in R^m$ 为测量输出; $w(t) \in R^p$ 为外部扰动输入且属于 $l_2[0, \infty)$; 切换信号 $\sigma(t) : [0, \infty) \rightarrow \bar{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ 为分段右连续常函数; $\sigma(t) = i$ 表示第 i 个子系统正常运行; N 为切换系统所含子系统的个数; $\phi(t) \in C([-r, 0], R^n)$ 为系统初始状态函数, 其范数为

$$\|\phi\| = \sup_{-r \leq t \leq 0} |\phi(t)|;$$

对于已知常数 r 和 d , 时变时滞 $\tau(t)$ 满足

$$0 \leq \tau(t) \leq r, 0 \leq \dot{\tau}(t) \leq d; \quad (2)$$

非线性函数 $f_i(x(t), x(t - \tau(t))), \forall i \in \bar{N}$ 满足

$$f_i^T(x(t), x(t - \tau(t)))f_i(x(t), x(t - \tau(t))) \leq x^T(t)\Gamma_i^T \Gamma_i x(t) + x^T(t - \tau(t))A_i^T A_i x(t - \tau(t)), \quad (3)$$

矩阵 Γ_i 和 $A_i \in R^{n \times n}$ 为已知常矩阵; 系统矩阵 $A_i, A_{di}, B_i, C_i, C_{di}$ 和 $D_i (i \in \bar{N})$ 为适当维数的已知实矩阵; $\Delta A_i(t), \Delta A_{di}(t), \Delta B_i(t), \Delta C_i(t), \Delta C_{di}(t)$ 和 $\Delta D_i(t)$ 为系统不确定参数, 满足以下条件:

$$\begin{bmatrix} \Delta A_i(t) & \Delta A_{di}(t) & \Delta B_i(t) \\ \Delta C_i(t) & \Delta C_{di}(t) & \Delta D_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1i} \\ M_{2i} \end{bmatrix} \Delta_i(t) [N_{1i} \ N_{2i} \ N_{3i}], \quad (4)$$

$M_{1i}, M_{2i}, N_{1i}, N_{2i}$ 和 N_{3i} 为已知实矩阵, $\Delta_i(t)$ 是关

于时间 t 的不确定实函数且满足

$$\Delta_i^T(t)\Delta_i(t) \leq I. \quad (5)$$

本文旨在为系统 (1) 设计一个适当的切换信号, 使得该系统指数稳定且具有一定 H_∞ 性能指标. 首先考虑系统 (1) 所有参数都确定的情形, 然后考虑参数不确定情形. 若无不确定项, 则系统 (1) 可表示为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau(t)) + B_i w(t) + \\ f_i(x(t), x(t - \tau(t))), t > 0; \\ y(t) = C_i x(t) + C_{di} x(t - \tau(t)) + D_i w(t); \\ x(t) = \phi(t), t \in [-r, 0]. \end{cases} \quad (6)$$

定义 1^[14] 给定常数 $\gamma > 0$, 系统 (6) 称为 γ 指数稳定的, 若存在一个切换函数 $\sigma(\cdot)$ 和正数 c 使得系统的任何解 $x(t, \phi)$ 满足以下条件:

$$\|x(t)\| \leq c\|\phi\|e^{-\gamma(t-t_0)}, \forall t \geq t_0 > 0. \quad (7)$$

定义 2^[18] 若对于 $\forall x \in R^n \setminus \{0\}$ 都存在 $i \in \bar{N}$ 使得 $x^T L_i x < 0$ 成立, 则称系统矩阵 L_i 为严格紧的.

易知, 系统矩阵 $L_i (i \in \bar{N})$ 是严格紧的当且仅当 $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = R^n \setminus \{0\}$, 其中 $\Omega_i = \{x \in R^n : x^T L_i x < 0\}, i \in \bar{N}$.

引理 1^[18] 系统矩阵 $L_i (i \in \bar{N})$ 是严格紧的, 若存在 $\xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1$ 使得 $\sum_{i=1}^N \xi_i L_i < 0$, 并且, 当 $N = 2$ 时上述条件是充要条件.

引理 2^[15] 对于任意适当维数的矩阵 $Z, Y \in R^n$ 和正定对称矩阵 $X \in R^{n \times n}$, 下列不等式恒成立:

$$\pm 2Z^T Y \leq Z^T X^{-1} Z + Y^T X Y. \quad (8)$$

2 主要结果

本节先考虑参数确定的系统 (6), 为其设计适当的切换信号; 然后扩展到参数不确定情形. 为了设计镇定的切换信号, 这里将整个状态空间 R^n 划分为 N 个子区域, 然后在每个子区域上定义一个特殊的二次函数. 通过设计相应的切换规则, 使得特殊的二次函数在每个子区域内沿相关子系统解的轨迹递减, 以保持整个切换系统指数稳定.

对于给定的矩阵 $S_{1i} (i \in \bar{N})$ 和 $U > 0$, 定义

$$\Omega_i = \{x \in R^n : x^T (S_{1i} A_i + A_i^T S_{1i}^T - U)x < 0\}, \quad (9)$$

易知 $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = R^n \setminus \{0\}$. 构建如下切换区域:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_1 &= \Omega_1, \bar{\Omega}_2 = \Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_3 = \Omega_3 \setminus \bar{\Omega}_1 \setminus \bar{\Omega}_2, \dots, \\ \bar{\Omega}_N &= \Omega_N \setminus \bar{\Omega}_1 \setminus \dots \setminus \bar{\Omega}_{N-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

可知 $\bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i = R^n \setminus \{0\}$ 且 $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \emptyset, \forall i \neq j$, 其中 \emptyset 为空集. 根据以上切换区域设计如下切换信号:

$$\sigma(x(t)) = i, \forall x(t) \in \bar{\Omega}_i. \quad (11)$$

定理 1 对于给定的常数 $\gamma > 0$ 和 $0 \leq \xi_i \leq 1$ ($i \in \bar{N}$), $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$, 若存在适当维数的正定对称矩阵 P, Q, R, U 和矩阵 S_{ij}, G_j ($j = 1, 2, 3$), 使得

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & rG_1 & S_{i1} \\ * & T_{22} & T_{23} & rG_2 & S_{i2} \\ * & * & T_{33} & rG_3 & S_{i3} \\ * & * & * & -re^{-2\gamma r}R & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^N \xi_i (S_{i1}A_i + A_i^T S_{i1}^T) < U \quad (13)$$

成立, 则在 $w(t) = 0$ 时, 系统 (6) 在切换信号 (11) 下是全局指数稳定的, 且具有 γ 稳定裕度. 其中

$$T_{11} = U + G_1 + G_1^T + Q + 2\gamma P + \Gamma_i^T \Gamma_i,$$

$$T_{12} = S_{i1}A_{di} + A_i^T S_{i2}^T + G_2^T - G_1,$$

$$T_{13} = A_i^T S_{i3}^T + P - S_{i1} + G_3^T,$$

$$T_{22} = (d-1)e^{-2\gamma r}Q + S_{i2}A_{di} + A_{di}^T S_{i2}^T - G_2 - G_2^T + A_i^T A_i,$$

$$T_{23} = A_{di}^T S_{i3}^T - S_{i2} - G_3^T, \quad T_{33} = rR - S_{i3}^T - S_{i3}.$$

证明 考虑下列 LK 函数:

$$V(x_t, t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau(t)}^t e^{-2\gamma(t-s)} x^T(s)Qx(s)ds + \int_{-r}^0 \int_{t+\theta}^t e^{-2\gamma(t-s)} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta. \quad (14)$$

其中: $\gamma > 0, P = P^T > 0, Q = Q^T > 0, R = R^T > 0$. 则 LK 函数 (14) 沿系统 (6) 解的导数可以估计为

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t, t) \leq & 2\dot{x}^T(t)Px(t) - 2\gamma V(x_t, t) + \\ & x^T(t)(2\gamma P + Q)x(t) + r\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \\ & (1-d)e^{-2\gamma r}x^T(t-\tau(t))Qx(t-\tau(t)) - \\ & e^{-2\gamma r} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds. \end{aligned} \quad (15)$$

由牛顿-莱布尼兹公式可知, 对于适当维数的任意矩阵 G_j ($j = 1, 2, 3$), 以下等式恒成立:

$$2(x^T(t)e^{2\gamma r}G_1 + x^T(t-\tau(t))e^{2\gamma r}G_2 + \dot{x}^T(t)e^{2\gamma r}G_3) \times (x(t) - x(t-\tau(t)) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s)ds) = 0. \quad (16)$$

展开式 (16) 并运用引理 3, 容易得到

$$\begin{aligned} & -e^{-2\gamma r} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(t)R\dot{x}(t)ds \leq \\ & \zeta^T(t)\{re^{2\gamma r}GR^{-1}G^T + \tilde{G}\}\zeta(t). \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\zeta^T(t) = [x^T(t) \quad x^T(t-\tau(t)) \quad \dot{x}^T(t)],$$

$$G^T = [G_1^T \quad G_2^T \quad G_3^T],$$

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} G_1 + G_1^T & -G_1 + G_2^T & G_3^T \\ * & -G_2 - G_2^T & -G_3^T \\ * & * & 0 \end{bmatrix}.$$

另外, 对于适维的任意矩阵 $\bar{S}_i^T = [S_{i1}^T \quad S_{i2}^T \quad S_{i3}^T]$ ($i \in \bar{N}$), 下式恒成立:

$$0 = 2\zeta^T(t)\tilde{S}_i[A_i x(t) + A_{di}x(t-\tau(t)) + f_i(x(t), x(t-\tau(t))) - \dot{x}(t)]. \quad (18)$$

展开式 (18), 可得

$$\zeta^T(t)\tilde{S}_i\zeta(t) + 2\zeta^T(t)\bar{S}_i f_i(x(t), x(t-\tau(t))) = 0, \quad (19)$$

其中

$$\tilde{S}_i = \begin{bmatrix} S_{i1}A_i + A_i^T S_{i1}^T & S_{i1}A_{di} + A_i^T S_{i2}^T & A_i^T S_{i3}^T - S_{i1} \\ * & S_{i2}A_{di} + A_{di}^T S_{i2}^T & A_{di}^T S_{i3}^T - S_{i2} \\ * & * & -S_{i3}^T - S_{i3} \end{bmatrix}.$$

由条件 (3) 和引理 3, 结合式 (15)、(17) 和 (19), 易得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t, t) + 2\gamma V(x_t, t) \leq & 2\dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)(2\gamma P + Q + \Gamma_i^T \Gamma_i)x(t) + \\ & r\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) + x^T(t-\tau(t)) \times \\ & \{A_i^T A_i - (1-d)e^{-2\gamma r}Q\}x(t-\tau(t)) + \\ & \zeta^T(t)\{\tilde{G} + re^{2\gamma r}GR^{-1}G^T + \tilde{S}_i + \bar{S}_i \bar{S}_i^T\}\zeta(t). \end{aligned} \quad (20)$$

由条件 (13) 和引理 2 易知, 系统矩阵 $L_i = S_{i1}A_i + A_i^T S_{i1}^T - U$ 是严格紧的. 因此, 对于任意的 $x(t) \in R^n, t > 0$, 总存在一个 $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ 使得 $x(t) \in \bar{\Omega}_i$, 即 $x^T(t)[S_{i1}A_i + A_i^T S_{i1}^T - U]x(t) < 0$. 选取切换信号 (11), 由式 (12) 和 Schur 补引理, 根据上述推导, 易得

$$\dot{V}(x_t, t) + 2\gamma V(x_t, t) \leq 0, \quad (21)$$

由式 (14) 和 (21), 可得

$$c_1 \|x(t)\|^2 \leq V(x_t, t) \leq e^{-2\gamma(t-t_0)} c_2 \|x(t_0)\|_s^2. \quad (22)$$

其中: $c_1 = \lambda_{\min}(P), c_2 = \lambda_{\max}(P) + r\lambda_{\max}(Q) + r^2\lambda_{\max}(R)$. 即

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} e^{-\gamma(t-t_0)} \|x(t_0)\|_s, \quad t \geq 0.$$

由定义 1 可知系统 (6) 为 γ 指数稳定的. \square

若 $f_i(x(t), x(t-\tau(t))) = 0, \forall i \in \bar{U}$, 则系统 (6) 无扰动时 ($w(t) = 0$) 为下列线性切换系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{di} x(t-\tau(t)), \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-r, 0]. \end{cases} \quad (23)$$

类似于定理 1, 可得以下推论.

推论 1 对于给定的常数 $\gamma > 0$ 和 $0 \leq \xi_i \leq 1$ ($i \in \bar{N}$), $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$, 若存在适当维数的正定对称矩阵 P, Q, R 和任意矩阵 S_{ij}, G_j ($j = 1, 2, 3$), 使得式 (13)

和以下 LMIs 成立:

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} & T_{12} & T_{13} & rG_1 \\ * & \tilde{T}_{22} & T_{23} & rG_2 \\ * & * & T_{33} & rG_3 \\ * & * & * & -re^{-2\gamma r}R \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

则系统 (23) 在切换信号 (11) 下是 γ 指数稳定的. 其中

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{11} &= U + G_1 + G_1^T + Q + 2\gamma P, \\ \tilde{T}_{22} &= (d-1)e^{-2\gamma r}Q + S_{i2}A_{di} + \\ &\quad A_{di}^T S_{i2}^T - G_2 - G_2^T. \end{aligned}$$

注 1 推论 1 的证明过程类似于定理 1, 此处略.

下面考虑系统 (6) 在受到外界扰动输入下的 H_∞ 抗干扰性能. 首先给出以下定义.

定义 3 如果存在一个切换律 $\sigma(t)$, 使得系统 (6) 满足以下条件:

1) 当 $w(t) = 0$ 时, 系统 (1) 是指数稳定的且收敛率 $\gamma > 0$;

2) 对于任意非零的 $w(t) \in L_2[0, \infty)$, 系统 (6) 在零初始条件下 ($\phi(t) = 0, -r \leq t \leq 0$), 对于给定的 $\kappa > 0$, 有

$$\int_0^\infty y^T(s)y(s)ds \leq \kappa^2 \int_0^\infty w^T(s)w(s)ds,$$

则称系统 (6) 是 γ 指数稳定的且具有 H_∞ 性能指标 κ .

定理 2 对于给定的常数 $\gamma > 0, \kappa > 0$ 和 $0 \leq \xi_i \leq 1 (i \in \bar{N}), \sum_{i=1}^N \xi_i = 1$, 若存在正定对称矩阵 P, Q, R, U 和矩阵 $S_{ik}, G_j (j = 1, 2, 3, k = 1, 2, 3, 4)$, 使得式 (13) 和以下 LMIs 成立:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & S_{i1}B_i & rG_1 & S_{i1} & C_i^T \\ * & T_{22} & T_{23} & S_{i2}B_i & rG_2 & S_{i2} & C_{di}^T \\ * & * & T_{33} & S_{i3}B_i & rG_3 & S_{i3} & 0 \\ * & * & * & T_{44} & 0 & S_{i4} & D_i^T \\ * & * & * & * & T_{55} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (25)$$

则系统 (6) 在切换信号 (11) 下是 γ 指数稳定的, 且具有 H_∞ 性能指标 κ . 其中

$$T_{44} = S_{i4}B_i + B_i^T S_{i4}^T - \kappa^2, T_{55} = -re^{-2\gamma r}R.$$

证明 考虑性能指标

$$J_{yw} = \int_0^\infty [y^T(s)y(s) - \kappa^2 w^T(s)w(s)]ds.$$

选取 LK 函数 (14). 当 $w(t) = 0$ 时, 由定理 1 可知系统 (6) 是 γ 指数稳定的. 根据定义 3, 下面只需证明对于任意 $w(t) \neq 0$, 有 $J_{yw} < 0$. 类似于式 (18), 易知对于适当维数的任意矩阵 $S_{ik} (k = 1, 2, 3, 4, i \in \bar{N})$, 有

$$\begin{aligned} 2\zeta_1^T(t)\tilde{S}_{2i}[A_i x(t) + A_{di}x(t-\tau(t)) + B_i w(t) + \\ f_i(x(t), x(t-\tau(t))) - \dot{x}(t)] = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

其中

$$\zeta_1^T(t) = [\zeta^T(t) \ w^T(t)], \tilde{S}_{2i}^T = [S_{i1}^T \ S_{i2}^T \ S_{i3}^T \ S_{i4}^T].$$

展开式 (26), 可得

$$\zeta_1^T(t)\tilde{S}_{2i}\zeta_1(t) + 2\zeta_1^T(t)\tilde{S}_{2i}f_i(x(t), x(t-\tau(t))) = 0. \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{2i} &= \begin{bmatrix} \tilde{S}_i & S_{Bi} \\ S_{Bi}^T & S_{i4}B_i + B_i^T S_{i4}^T \end{bmatrix}, \\ S_{Bi}^T &= [B_i^T S_{i1}^T \ B_i^T S_{i2}^T \ B_i^T S_{i3}^T]. \end{aligned}$$

类似于定理 1, 容易得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) + 2\gamma V(x, t) + y^T(t)y(t) - \kappa^2 w^T(t)w(t) \leq \\ 2\dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)(2\gamma P + Q + \Gamma_i^T \Gamma_i)x(t) + \\ x^T(t-\tau(t))[(d-1)e^{-2\gamma r}Q + A_i^T A_i]x(t-\tau(t)) + \\ \zeta_1^T(t)\tilde{S}_{2i}\zeta_1(t) + \zeta_1^T(t)\tilde{S}_{2i}\tilde{S}_{2i}^T\zeta_1(t) + y^T(t)y(t) - \\ \kappa^2 w^T(t)w(t) + r\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) + \\ \zeta^T(t)\{re^{2\gamma r}GR^{-1}G^T + \tilde{G}\}\zeta(t), \end{aligned} \quad (28)$$

由条件 (25) 和 (13), 结合 Schur 补引理, 选取切换域 (9)、(10) 及切换法则 (11), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) + 2\gamma V(x, t) + y^T(t)y(t) - \kappa^2 w^T(t)w(t) \leq 0. \end{aligned}$$

由 $V(x, 0) = 0, V(x, t) \geq 0$, 容易得到 $J_{yw} \leq 0$. 由定义 3 可知, 系统 (6) 在切换信号 (11) 下是 γ 指数稳定的, 且具有 H_∞ 性能指标 κ . \square

下面考虑当系统含有不确定参数的情形. 令

$$p(t, i) = \Delta_i(t)[N_{1i}x(t) + N_{2i}x(t-\tau(t)) + N_{3i}w(t)], \quad (29)$$

结合条件 (5), 可得

$$\begin{aligned} p^T(t, i)p(t, i) \leq \\ (N_{1i}x(t) + N_{2i}x(t-\tau(t)) + N_{3i}w(t))^T \times \\ (N_{1i}x(t) + N_{2i}x(t-\tau(t)) + N_{3i}w(t)). \end{aligned} \quad (30)$$

因此, 对于任意的常数 $\varepsilon > 0$, 以下不等式恒成立:

$$\varepsilon[N_{1i}x(t) + N_{2i}x(t-\tau(t)) + N_{3i}w(t)]^T [N_{1i}x(t) + N_{2i}x(t-\tau(t)) + N_{3i}w(t)] \geq \varepsilon p^T(t, i)p(t, i). \quad (31)$$

结合式 (4) 和 (29), 系统 (1) 可重写为以下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{di}x(t-\tau(t)) + B_i w(t) + \\ \quad f_i(x(t), x(t-\tau(t))) + M_{1i}p(t, i), \ t > 0; \\ y(t) = C_i x(t) + C_{di}x(t-\tau(t)) + D_i w(t) + \\ \quad M_{2i}p(t, i). \end{cases} \quad (32)$$

定理 3 对于给定的常数 $\gamma > 0$ 和 $0 \leq \xi_i \leq 1 (i \in \bar{N}), \sum_{i=1}^N \xi_i = 1$, 若存在正定对称矩阵 P, Q, R, U 和矩阵 $S_{ik}, G_j (j = 1, 2, 3, k = 1, 2, 3, 5)$, 使得式

(13) 和以下 LMIs 成立:

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} & T_{13} & S_{i1}M_{1i} & rG_1 & S_{i1} \\ * & \tilde{T}_{22} & T_{23} & S_{i2}M_{1i} & rG_2 & S_{i2} \\ * & * & T_{33} & S_{i3}M_{1i} & rG_3 & S_{i3} \\ * & * & * & T_{66} & 0 & S_{i5} \\ * & * & * & * & T_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

则在 $w(t) = 0$ 时, 系统 (32) 在切换信号 (11) 下是 γ 指数稳定的. 其中

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{11} &= T_{11} + \varepsilon N_{1i}^T N_{1i}, \quad \tilde{T}_{12} = T_{12} + \varepsilon N_{1i}^T N_{2i}, \\ \tilde{T}_{22} &= T_{22} + \varepsilon N_{2i}^T N_{2i}, \quad T_{66} = S_{i5}M_{1i} + M_{1i}^T S_{i5}^T - \varepsilon. \end{aligned}$$

注 2 类似于式 (18), 此处对于适当维数的任意矩阵 $S_{ik}(k = 1, 2, 3, 5, i \in \bar{N})$, 恒有

$$\begin{aligned} 2\zeta_2^T(t)\tilde{S}_{3i}[A_i x(t) + A_{di}x(t - \tau(t)) + \\ M_{1i}p(t, i) + f_i(x(t), x(t - \tau(t))) - \dot{x}(t)] = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

其中

$$\zeta_2^T(t) = [\zeta^T(t) \quad p^T(t, i)], \quad \tilde{S}_{3i}^T = [S_{i1}^T \quad S_{i2}^T \quad S_{i3}^T \quad S_{i5}^T].$$

展开式 (34), 可得

$$\zeta_2^T(t)\tilde{S}_{3i}\zeta_2(t) + 2\zeta_2^T(t)\tilde{S}_{3i}f_i(x(t), x(t - \tau(t))) = 0. \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{3i} &= \begin{bmatrix} \tilde{S}_i & S_{pi} \\ S_{pi}^T & S_{i5}M_{1i} + M_{1i}^T S_{i5}^T \end{bmatrix}, \\ S_{pi}^T &= [M_{1i}^T S_{i1}^T \quad M_{1i}^T S_{i2}^T \quad M_{1i}^T S_{i3}^T]. \end{aligned}$$

类似于定理 1 的证明过程, 容易得出定理 3 的结论.

定理 4 对于给定的常数 $\gamma > 0, \kappa > 0$ 和 $0 \leq \xi_i \leq 1 (i \in \bar{N})$, $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$, 若存在正定对称矩阵 P, Q, R, U 和矩阵 $S_{il}, G_j (j = 1, 2, 3, l = 1, 2, 3, 4, 5)$, 使得式 (13) 和以下 LMIs 成立:

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} & T_{13} & \tilde{T}_{14} & S_{i1}M_{1i} & rG_1 & S_{i1} & C_i^T \\ * & \tilde{T}_{22} & T_{23} & \tilde{T}_{24} & S_{i2}M_{1i} & rG_2 & S_{i2} & C_{di}^T \\ * & * & T_{33} & \tilde{T}_{34} & S_{i3}M_{1i} & rG_3 & S_{i3} & 0 \\ * & * & * & \tilde{T}_{44} & T_{45} & 0 & S_{i4} & D_i^T \\ * & * & * & * & T_{66} & 0 & S_{i5} & M_{2i}^T \\ * & * & * & * & * & T_{55} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (36)$$

则系统 (32) 在切换信号 (11) 下是 γ 指数稳定的, 且具有 H_∞ 性能指标 κ . 其中

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{14} &= S_{i1}B_i + \varepsilon N_{1i}^T N_{3i}, \\ \tilde{T}_{24} &= S_{i2}B_i + \varepsilon N_{2i}^T N_{3i}, \end{aligned}$$

$$\tilde{T}_{34} = S_{i3}B_i, \quad \tilde{T}_{44} = T_{44} + \varepsilon N_{3i}^T N_{3i},$$

$$T_{45} = S_{i4}M_{1i} + B_i^T S_{i5}^T.$$

注 3 定理 4 的证明类似于定理 1~定理 3, 此处略.

3 数值算例

例 1^[14] 考虑系统 (6), 其参数为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.001 \\ -0.001 & 0.15 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.15 & -0.001 \\ -0.001 & 0.05 \end{bmatrix},$$

$$A_{d1} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.001 \\ 0.001 & -0.7 \end{bmatrix}, \quad A_{d2} = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.001 \\ 0.001 & -0.6 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_i = 0.02I, \quad A_i = 0.0089I.$$

这里选取 $d = 0.3, \gamma = 0.05, \xi_1 = 0.1$ 和 $\xi_2 = 0.9$, 根据定理 1, 通过求解线性矩阵不等式 (12) 和 (13) 可得

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 38 & 2 \\ 2 & 73 \end{bmatrix}, \quad U = 10^{-7} \times \begin{bmatrix} 246 & 74 \\ 74 & 1102 \end{bmatrix},$$

$$S_{11} = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 91 & -2 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}, \quad S_{21} = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} -124 & -1 \\ -2 & 28 \end{bmatrix}.$$

由式 (9) 可知切换区域 Ω_1 和 Ω_2 分别为

$$\Omega_1 = \{[x_1 \ x_2]^T \in R : 0.0018x_1^2 - 0.0003x_2^2 < 0\},$$

$$\Omega_2 = \{[x_1 \ x_2]^T \in R : -0.0037x_1^2 + 0.0002x_2^2 < 0\}.$$

从图 1 中易知 $\Omega_1 \cup \Omega_2 = R^2 \setminus \{0\}$. 因此, 可取

$$\bar{\Omega}_1 = \{[x_1 \ x_2]^T \in R : 18x_1^2 - 3x_2^2 < 0\}, \quad \bar{\Omega}_2 = \Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1.$$

根据以上切换区域, 选取如下切换信号:

$$\sigma(x(t)) = i, \quad x(t) \in \bar{\Omega}_i, \quad i = 1, 2.$$

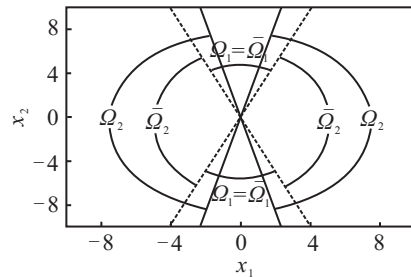


图 1 切换区域

表 1 列出了以往文献和本文所得到的时滞上界结果. 从表 1 中可以看出, 运用本文设计的切换域和切换方法相比文献 [14]、[15] 所得到的时滞上界更大, 表明本文所得到的结果具有相对更低的保守性.

表 1 时滞上界比较

方法	凸组合参数	r
文献 [14]	$\xi_1 = 2/3, \xi_2 = 1/3$	0.0833
文献 [15]	$\xi_1 = 2/3, \xi_2 = 1/3$	1.25
本文定理 1	$\xi_1 = 2/3, \xi_2 = 1/3$	1.42

例 2^[15] 考虑线性切换系统 (23), 其参数为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -20 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -4 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_{d1} = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 23 & 6 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}.$$

当 $\gamma = 0$ 时, 取 $\xi_1 = 0.555$, $\xi_2 = 0.445$. 由推论 1, 通过求解线性矩阵不等式 (13) 和 (25), 可以得到其切换区域 (9), 切换信号 (11) 和允许的时滞上界. 表 2 中列出了本文的结果和以往文献的相应结果. 从表 2 中可以看出, 本文得到的时滞上界相比文献 [5]、[15] 更大, 表明本文给出的切换信号的设计相对更加有效.

表 2 不同时滞微分上界下所得时滞上界

方法	d				
	0	0.1	0.5	0.9	1
文献 [5]	0.0202	0.0179	0.0176	0.0176	0.0176
文献 [15]	0.0307	0.0271	0.0197	0.0185	0.0184
本文推论 1	0.0823	0.0816	0.0781	0.0729	0.0713

4 结 论

本文针对一类具有参数不确定状态时滞非线性切换系统, 研究了使得该系统指数稳定并具有一定 H_∞ 性能的切换信号的设计问题. 通过设计依赖于系统状态的切换信号, 使得系统在所有允许的不确定下, 保持良好的 H_∞ 性能. 基于 LK 函数方法, 结合自由矩阵和积分不等式技巧, 得到了使所考虑的切换系统指数稳定的充分条件. 通过算例进一步验证了本文方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] 郑刚, 谭民, 宋永华. 混杂系统的研究进展[J]. 控制与决策, 2004, 19(1): 7-12.
(Zheng G, Tan M, Song Y H. Research on hybrid systems: A survey[J]. Control and Decision, 2004, 19(1): 7-12.)
- [2] Hespanha J P, Morse A S. Stability of switched systems with average dwell-time[C]. Proc of the 38th IEEE Conf on Decision and Control. Phoenix: IEEE, 1999, 3: 2655-2660.
- [3] Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. Control Systems, 1999, 19(5): 59-70.
- [4] Kharitonov V L, Zhabko A P. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems[J]. Automatica, 2003, 39(1): 15-20.
- [5] Sun X M, Wang W, Liu G P, et al. Stability analysis for linear switched systems with time-varying delay[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2008, 38(2): 528-533.
- [6] Sun X M, Zhao J, Hill D J. Stability and L_2 -gain analysis for switched delay systems: A delay-dependent method[J]. Automatica, 2006, 42(10): 1769-1774.

- [7] 王天成, 刘小梅, 高荣. 一类不确定时滞系统的非线性 H_∞ 控制[J]. 控制与决策, 2009, 24(6): 945-948.
(Wang T C, Liu X M, Gao R. Nonlinear H_∞ control for a class of uncertain systems with time-delay[J]. Control and Decision, 2009, 24(6): 945-948.)
- [8] Xie D, Wang L, Hao F, et al. LMI approach to L_2 -gain analysis and control synthesis of uncertain switched systems[C]. Proc of IEE Conf on Control Theory and Applications. Beijing, 2004, 151(1): 21-28.
- [9] Morse A S. Supervisory control of families of linear set-point controllers, Part I: Exact matching[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(10): 1413-1431.
- [10] Zhao X, Zhang L, Shi P, et al. Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(7): 1809-1815.
- [11] Johansson M, Rantzer A. Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(4): 555-559.
- [12] Bacciotti A. Stabilization by means of state space depending switching rules[J]. Systems and Control Letters, 2004, 53(3): 195-201.
- [13] Sun Z. Stabilizing switching design for switched linear systems: A state-feedback path-wise switching approach[J]. Automatica, 2009, 45(7): 1708-1714.
- [14] Phat V N, Botmart T, Niamsup P. Switching design for exponential stability of a class of nonlinear hybrid time-delay systems[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2009, 3(1): 1-10.
- [15] Lien C H, Yu K W, Chung Y J, et al. Switching signal design for global exponential stability of uncertain switched nonlinear systems with time-varying delay[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2011, 5(1): 10-19.
- [16] Lien C H, Yu K W, Chung Y J, et al. H_∞ performance for uncertain discrete switched systems with interval time-varying delay via switching signal design[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(4): 2484-2494.
- [17] 李娇, 赵军. 具有状态时滞的离散时间切换系统的 H_∞ 滤波器设计: 依赖状态的切换方法[J]. 控制与决策, 2012, 27(11): 1607-1620.
(Li J, Zhao J. H_∞ filtering for discrete-time switched systems with state delays: A state-dependent switching method[J]. Control and Decision, 2012, 27(11): 1607-1620.)
- [18] Uhlig F. A recurring theorem about pairs of quadratic forms and extensions: A survey[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1979, 25: 219-237.

(责任编辑: 李君玲)