

基于投影的灰色关联度模型及其性质

张娟^{a,b}, 党耀国^a, 王俊杰^a

(南京航空航天大学 a. 经济与管理学院, b. 理学院, 南京 211000)

摘要: 结合灰色关联分析理论, 运用向量投影原理, 提出一种新型的灰色投影关联度模型, 对模型的基本原理进行分析, 并讨论模型的规范性、相似性和平行性等性质. 该模型充分利用了序列各时点的信息, 克服了以离散点代替整体变化趋势的问题. 通过实例分析验证了模型的有效性. 分析结果表明, 灰色投影关联度能较好地反映序列间的关联程度.

关键词: 灰色关联分析; 灰色投影关联度; 相似性; 平行性

中图分类号: N941.5

文献标志码: A

Grey incidence model based on projection and its properties

ZHANG Juan^{a,b}, DANG Yao-guo^a, WANG Jun-jie^a

(a. College of Economics and Management, b. College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211100, China. Correspondent: ZHANG Juan, E-mail: zhangjuan08@nuaa.edu.cn)

Abstract: Based on the theory of grey incidence analysis and vector projection, a new grey projection incidence degree is developed. Then, some properties such as normality, similarity, parallelism are studied. This model is able to fully employ the information of every point of the whole sequence, and avoid predicting trend using discrete points. Finally, an example is used to illustrate the effectiveness of the model, which suggests that the grey projection incidence model can reflect the correlation degree among relevant factor sequences.

Key words: grey incidence analysis; grey projection incidence degree; similarity; parallelism

0 引言

灰色关联分析是灰色系统理论中非常重要的基础理论, 根据序列曲线几何形状的相似程度来反映系统因素之间的关系密切程度. 曲线越接近, 相应因素序列之间的关联度越大. 对于灰色关联分析理论的探讨一直是灰色系统研究的热点. 在理论基础方面, 邓聚龙^[1]提出了关联度模型; 刘思峰等^[2]提出了经典的灰色绝对关联度模型; 其他学者提出了灰色 *B* 型关联度^[3]、*T* 型关联度^[4]和灰色斜率关联度^[5]等. 基于这些模型的改进研究也纷纷涌现^[6-7]. 近年来, 刘思峰等^[8]进一步提出了基于相似性和接近性视角的新型灰色关联分析模型; 吴利丰等^[9]提出了灰色凸关联度; 刘勇等^[10]提出了一种新的灰色绝对关联度模型. 除了对于关联度模型的研究以外, 另一个研究热点是对于这些关联度性质的探讨. 除了传统的灰色关联四公理以外, 学者还研究了关联度的平行性、一致性^[11]、放

射性和保序性^[12]等. 在理论发展的同时, 灰色关联分析模型得到了广泛的应用, 解决了大量的实际问题, 包括雷达目标高分辨距离像识别问题^[13], 经济增长与环境问题的灰色关联分析^[14], 人员面试的决策问题^[15]等.

在现有的灰色关联度量定义中, 大多关联度将序列的时点作为对象, 以点与点之间的距离或者凹凸程度来度量关联性. 当系统因素序列数据比较分散时, 这样讨论可能会存在偏差, 不能较好地反映序列变化的趋势. 此外, 在实际研究中将会面对各种类型的数据序列, 有些序列因子取值为速度矢量和力矢量, 一般关联度公式不能直接用于这样的关联分析. 因此, 本文将灰色关联理论结合平面向量的投影原理, 定义一类新型的关联度模型, 用以解决时序数据序列和向量数据序列关联性问题. 讨论它的相关性质, 并通过实例验证了所提出方法的有效性和实用性.

收稿日期: 2013-10-13; 修回日期: 2013-12-30.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71071077, 71371098); 中央高校基本科研业务费专项科研项目(NR2013015, NC2012001); 江苏省高校哲学社会科学重点研究基地重大项目(2012JDXM005).

作者简介: 张娟(1977—), 女, 讲师, 博士生, 从事灰色系统理论的研究; 党耀国(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论等研究.

1 灰色投影关联度模型及其性质

1.1 灰色投影关联度模型

若 $X_0 = (x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n))$ 为系统特征序列, 则系统相关因素序列为

$$X_i = (x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n)).$$

将序列中相邻时点的数据相连, 构成一个 2 维向量, 向量 \mathbf{a} 在向量 \mathbf{b} 上的投影为向量 \mathbf{a} 的模乘以 2 个向量的夹角余弦. 因此, 就序列的几何形状上的相似程度而言, X_0 与 X_i 在同一时间段内变化趋势越接近, 因素序列向量 X_i 在特征序列向量 X_0 上的投影值与特征序列向量 X_0 的模就越接近, 反之则差距越大. 因此, 考虑用二者的差来表征序列的关联程度, 并提出一种新的灰色关联度模型.

定义 1 设系统特征序列为 $X_0 = (x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n))$, 系统相关因素序列为 $X_i = (x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n))$. 设 X_0 和 X_i 为长度相等的等时距序列, 令 $\alpha(k) = (t_k - t_{k-1}, x_0(t_k) - x_0(t_{k-1}))$ 为系统特征序列中相邻时点构成的向量, $\beta_i(k) = (t_k - t_{k-1}, x_i(t_k) - x_i(t_{k-1}))$ 为相关因素序列中相邻时点构成的向量, $\text{Pr} j_{\alpha(k)} \beta_i(k)$ 为向量 $\beta_i(k)$ 在向量 $\alpha(k)$ 上的投影值, $|\alpha(k)|$ 为向量 $\alpha(k)$ 的模.

令

$$\xi_{0i}(k) = \frac{1}{1 + |\text{Pr} j_{\alpha(k)} \beta_i(k) - |\alpha(k)||}, \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (1)$$

其中: $\xi_{0i}(k)$ 为 X_0 与 X_i 在 t_k 时刻的灰色投影关联系数.

令

$$\xi_{0i} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \xi_{0i}(k), \quad (2)$$

其中 ξ_{0i} 为 X_0 与 X_i 的灰色投影关联度.

1.2 灰色投影关联度模型的计算

设 X_0 与 X_i 的长度相同且皆为 1 时距序列, 即

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= (1, x_0(k) - x_0(k-1)), \\ \beta_i(k) &= (1, x_i(k) - x_i(k-1)), \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \text{Pr} j_{\alpha(k)} \beta_i(k) &= \frac{\alpha(k) \cdot \beta_i(k)}{|\alpha(k)|} = \\ &= \frac{1 + (x_0(k) - x_0(k-1))(x_i(k) - x_i(k-1))}{\sqrt{1 + (x_0(k) - x_0(k-1))^2}}, \\ \xi_{0i}(k) &= \\ &= \frac{1}{1 + \left| \frac{(x_0(k) - x_0(k-1))(x_i(k) - x_i(k-1))}{(1 + (x_0(k) - x_0(k-1))^2)} \right|}. \end{aligned}$$

1.3 灰色投影关联度模型的性质

通过分析可以得出, 灰色投影关联度模型具有如下性质.

定理 1 灰色投影关联度 ξ_{0i} 具有如下性质:

- 1) 规范性, 即 $0 < \xi_{0i} \leq 1$;
- 2) 整体性, 对于不同的相关因素序列 X_i 和 X_j , 有 $\xi_{ij} \neq \xi_{ji}$;
- 3) 相似性, 即序列间在几何形状上越相似, ξ_{0i} 越大;
- 4) 可比性和唯一性;
- 5) 平行性.

证明

1) 由 $0 < \frac{1}{1 + |\text{Pr} j_{\alpha(k)} \beta_i(k) - |\alpha(k)||} < 1$ 可得 $0 < \xi_{0i} \leq 1$;

2) 由投影的定义可知结论显然成立;

3) 在同一时段内, 序列变化趋势越相似, 向量 $\beta_i(k)$ 与向量 $\alpha(k)$ 的夹角越小. 因此, $\text{Pr} j_{\alpha(k)} \beta_i(k)$ 与 $|\alpha(k)|$ 的值越接近, ξ_{0i} 越大;

4) 由于 $x_{0i} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \xi_{0i}(k)$ 不含有其他未知参数, 该模型具有唯一性和可比性;

5) 对于序列

$$X_0 = (x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n)),$$

$$X_i = (x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n)),$$

若 $x_i(k) = x_0(k) + c$, $c = \text{const}$, $k = 1, 2, \dots, n$, 称序列 X_0 与 X_i 是平行的, 由式 (1) 和 (2) 可知 $\xi_{0i} = 1$, 则灰色投影关联度满足平行性. \square

需要说明的是, 由灰色投影关联度定义可知, 该模型不满足对称性.

如果由灰色关联度导出的灰色关联序 $X_i \succ X_j$, 增加或减少若干因素后, X_i 和 X_j 的灰色关联序不变, 则称由灰色关联度导出的灰色关联序满足干扰因素独立性^[9].

定理 2 灰色投影关联度满足干扰因素独立性.

证明 由灰色投影关联度 ξ_{0i} 的定义式可知, ξ_{0i} 只与 X_0 和 X_i 有关, 与其他因素无关, 所以满足干扰因素独立性. \square

设系统行为序列为

$$X_i = (x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n)).$$

令 D 为序列算子, 且有

$$X_i D = (x_i(1)d, x_i(2)d, \dots, x_i(n)d). \quad (3)$$

其中: $x_i(k)d = x_i(k) - x_i(1)$, $k = 1, 2, \dots, n$. 则称 D

为始点零化算子, $X_i D$ 为 X_i 的始点零化像, 记为

$$X_i D = X_i^0 = (x_i^0(1), x_i^0(2), \dots, x_i^0(n)).$$

定理 3 设 X_0 和 X_i 均为长度相等的 1-时距序列, 且灰色投影关联度为 ξ_{0i} , 而 $X_0^0 = (x_0^0(1), x_0^0(2), \dots, x_0^0(n))$ 和 $X_i^0 = (x_i^0(1), x_i^0(2), \dots, x_i^0(n))$ 分别为 X_0 和 X_i 的始点零化像, 则 X_0^0 与 X_i^0 的灰色投影关联度等于 ξ_{0i} .

证明 设序列 X_0^0 中相邻时点构成的向量为 $\eta(k)$, 则有

$$\eta(k) = (1, x_0^0(k) - x_0^0(k-1)) = (1, x_0(k) - x_0(1) - x_0(k-1) + x_0(1)) = \alpha(k).$$

序列 X_i^0 中相邻时点构成的向量为 $\gamma_i(k)$, 则有

$$\gamma_i(k) = (1, x_i^0(k) - x_i^0(k-1)) = (1, x_i(k) - x_i(1) - x_i(k-1) + x_i(1)) = \beta_i(k),$$

$$k = 2, 3, \dots, n.$$

因此, X_0^0 与 X_i^0 的灰色投影关联度等于 ξ_{0i} . \square

2 应用案例

例 1 利用文献[16]中的数据, 研究影响煤矿生产中百万吨死亡率的因素之间的主次关系, 数据序列如下:

百万吨死亡率为

$$X_0 = (14.15, 13.98, 7.72, 13.31, 17.82, 13.69);$$

死亡人数(人)为

$$X_1 = (51, 51, 25, 40, 52, 41);$$

煤炭产量(吨)为

$$X_2 = (3\ 604\ 466, 3\ 648\ 120, 3\ 236\ 619, 3\ 005\ 796, 2\ 917\ 628, 2\ 994\ 886);$$

事故次数(起)为

$$X_3 = (41, 51, 25, 36, 44, 37).$$

利用本文提出的投影关联度计算可得

$$\xi_{01} = 0.273\ 82, \xi_{02} = 0.000\ 03, \xi_{03} = 0.166\ 10,$$

故灰色关联序为 $X_1 > X_3 > X_2$.

由文献[16]中计算公式可得

$$r_{01} = 0.544\ 69, r_{02} = -0.507\ 92, r_{03} = 0.536\ 46,$$

故灰色关联序为 $X_1 > X_3 > X_2$.

2种分析均表明, 死亡人数对于百万吨死亡率的影响程度最高, 事故次数对于百万吨死亡率的影响略高于煤炭产量, 这与实际情况一致. 死亡事故的发生对生产系统的影响极为恶劣, 进而会影响煤炭产量, 因此, 减少并控制事故的发生是降低死亡率的主要途

径. 就计算结果而言, 本文提出的投影关联度能真实地反映实际情况, 并且计算量小, 结果区分度大, 是一种有效的计算方法.

3 结 论

本文以灰色关联分析基本思想为出发点, 基于数据序列构成的向量变化相近趋势构建了灰色投影关联度模型. 与已有的传统灰色关联度模型考虑离散点之间的关联性不同, 灰色投影关联度比较客观地反映了序列变化的整体趋势, 计算方法简明清晰, 且序列中数据的意义、量纲均不影响关联度的大小. 该模型具有规范性、相似性、平行性和无关因素独立性等性质, 并且在始点零化像算子的作用下, 灰色投影关联度值不发生变化. 实例计算表明, 模型具有良好的实用性, 可以进一步应用于更为广泛的领域.

参考文献(References)

- [1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2004: 26-34.
(Deng J L. A textbook of grey system theory[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2004: 26-34.)
- [2] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 73-82.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. The grey system theory and application[M]. Beijing: Science Press, 2010: 73-82.)
- [3] 王清印. 灰色 B 型关联分析[J]. 华中理工大学学报, 1989, 17(6): 77-82.
(Wang Q Y. On grey incidence degree model of type B[J]. J of Huazhong University of Science and Technology, 1989, 17(6): 77-82.)
- [4] 唐五湘. T 型关联度及其计算方法[J]. 数理统计与管理, 1995, 14(1): 33-37.
(Tang W X. On grey incidence degree model of type T with its calculation[J]. Mathematical Statistics and Management, 1995, 14(1): 33-37.)
- [5] 党耀国. 灰色斜率关联度的研究[J]. 农业系统科学与综合研究, 1994, 10(增): 331-337.
(Dang Y G. Study on grey slope incidence degree[J]. Agricultural Systems Science and Synthetical Study, 1994, 10(S): 331-337.)
- [6] 孙玉刚, 党耀国. 灰色 T 型关联度的改进[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(4): 135-139.
(Sun Y G, Dang Y G. Improvement on grey T's correlation degree[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2008, 28(4): 135-139.)
- [7] 党耀国, 刘思峰, 刘斌, 等. 灰色斜率关联度的改进[J]. 中国工程科学, 2004, 6(3): 41-44.

- (Dang Y G, Liu S F, Liu B, et al. Improvement on degree of grey slope incident[J]. Engineering Science, 2004, 6(3): 41-44.)
- [8] 刘思峰, 谢乃明, Forrest Jeffery. 基于相似性和接近性视角的新型灰色关联分析模型[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(5): 881-887.
(Liu S F, Xie N M, Jeffery F. On new models of grey incidence analysis based on visual angle of similarity and nearness[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2010, 30(5): 881-887.)
- [9] 吴利丰, 王义闹, 刘思峰. 灰色凸关联及其性质[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(7): 1501-1505.
(Wu L F, Wang Y N, Liu S F. Grey convex relation and its properties[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2012, 32(7): 1501-1505.)
- [10] 刘勇, 刘思峰, Jeffery Forrest. 一种新的灰色绝对关联度模型及其应用[J]. 中国管理科学, 2012, 20(5): 173-177.
(Liu Y, Liu S F, Jeffery Forrest. A new grey absolute degree of grey incidence model and application[J]. Chinese J of Management Science, 2012, 20(5): 173-177.)
- [11] 谢乃明, 刘思峰. 几类关联度的平行性和一致性[J]. 系统工程, 2007, 25(8): 98-103.
(Xie N M, Liu S F. The parallel and uniform properties of several relational models[J]. Systems Engineering, 2007, 25(8): 98-103.)
- [12] 崔杰, 党耀国, 刘思峰. 几类关联分析模型的新性质[J]. 系统工程, 2009, 27(4): 65-70.
(Cui J, Dang Y G, Liu S F. Novel properties of some grey relational analysis models[J]. Systems Engineering, 2009, 27(4): 65-70.)
- [13] 肖永生, 周建江, 刘思峰, 等. 基于灰色系统的雷达目标高分辨距离像识别[J]. 控制与决策, 2011, 26(7): 1036-1040.
(Xiao Y S, Zhou J J, Liu S F, et al. Radar target recognition by high-resolution range profile based on gray system[J]. Control and Decision, 2011, 26(7): 1036-1040.)
- [14] 李佐卿, 蒋慧云. 浙江省经济增长与环境问题的灰色关联分析[J]. 浙江农业科学, 2013(6): 633-635.
(Li Z Q, Jiang H Y. Grey relative analysis about the economic growth and environment problem of Zhejiang Province[J]. J of Zhejiang Agricultural Sciences, 2013(6): 633-635.)
- [15] 宋捷, 党耀国, 林晨昱. 人员面试的灰色群决策模型研究[J]. 控制与决策, 2011, 26(4): 507-512.
(Song J, Dang Y G, Lin C Y. Application of grey group decision-making model in audition[J]. Control and Decision, 2011, 26(4): 507-512.)
- [16] 肖新平, 谢录臣, 黄定荣. 灰色关联度计算的改进及其应用[J]. 数理统计与管理, 1995, 14(5): 27-30.
(Xiao X P, Xie L C, Huang D R. A modified computation method of grey correlation degree and its application[J]. Application of Statistics and Management, 1995, 14(5): 27-30.)

(责任编辑: 闫 妍)