文章编号: 1001-0920 (2014) 10-1828-05　　DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.1006

时变参数GM(1, 1)幂模型及其应用

王 正 新

(1. 浙江财经大学 经济与国际贸易学院，杭州 310018；2. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 210016)

摘　要: 为了进一步增强灰色预测模型对原始数据的适应能力, 提出一种时变参数 GM(1, 1) 幂模型, 通过引入多项式函数描述 GM(1, 1) 幂模型的结构参数随时间的动态变化规律. 根据建模样本量的不同, 分 3 种情形给出了模型的参数辨识算式, 同时给出了时变参数 GM(1, 1) 幂模型白化方程的解析解, 利用积分复合梯形公式将其转化为可用于预测的离散时间响应式, 并提出了参数优化方法. 应用实例表明, 时变参数 GM(1, 1) 幂模型比固定参数 GM(1, 1) 幂模型具有更高的模拟和预测精度.

关键词: 灰色系统；GM(1, 1) 幂模型；时变参数；预测

中图分类号: N941.5　　**文献标志码:** A

GM(1, 1) power model with time-varying parameters and its application

WANG Zheng-xin

(1. School of Economics & International Trade，Zhejiang University of Finance & Economics，Hangzhou 310018，China; 2. College of Economics and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China. E-mail：jenkin226@163.com)

Abstract: In order to further enhance the adaptive capacity of the grey forecasting model to original data, a GM(1, 1) power model with time-varying structure parameters is proposed. Polynomial functions are introduced to describe the dynamic changes of the structure parameters with time. According to the different modeling sample sizes, the identification formulas for unknown parameters are given under three kinds of situations. At the same time, the analytical solution to white differential equation of GM(1, 1) power model with time-varying parameters is proposed. The integral compound trapezoid formula is employed to transform the continuous solution into discrete time response that can be used to predict. An application example shows that the GM(1, 1) power model with time varying parameters has higher simulation and forecast precision than that of the GM(1, 1) power model with fixed parameters.

Key words: grey system；GM(1, 1) power model；time-varying parameter；forecasting

0 引　言

作为灰色系统预测和控制理论的核心模型, 一阶单变量灰色模型 GM(1, 1)[1] 以其在小样本时间序列建模中的独特优势, 得到了国内外学者的普遍认可, 并已广泛地应用于经济、社会和工程等领域. 相关的理论研究也取得了重要的进展, 人们从灰导数、背景值、初始条件、参数优化等方面对 GM(1, 1) 模型进行了广泛而深入的研究[2-6], 取得了丰硕的成果. 邓聚龙教授将 GM(1, 1) 模型的发展分为平滑与非平滑两个阶段, 传统的 GM(1, 1) 模型及其改进形式为平滑模型, 而陡变型 GM(1, 1)[7] 和摆动 GM(1, 1)[8] 则为非平滑模型, 它们分别适用于结构突变和上下波动的小样本原始数据. 文献 [9] 应用粒子群算法研究了摆动 GM(1, 1) 模型参数优化问题, 并用于预测某钢铁公司的短期库存需求量.

GM(1, 1)幂模型[10-12]是一种新型灰色预测模型, 其结构形式因幂指数的取值变化而变化. 当幂指数为 0 时, 它是传统 GM(1, 1) 模型; 当幂指数为 2 时, 它是灰色 Verhulst 模型. 当幂指数取值恰当时, GM(1, 1) 幂模型能够在一定程度上适用于振荡序列的建模和预测, 其预测精度优于 GM(1, 1) 模型和灰色 Verhulst 模型. 目前确定幂指数的方法有两种: 一是基于灰色信息覆盖原理的估计方法[10-11]; 二是以预测误差最小化为目标的优化方法[12-14]. 前一种方法应用起来简洁、方便, 而第 2 种方法略微复杂, 但从预测精度来看, 第 2 种方法明显优于前者. 文献 [13-14] 采用第 2 种方

收稿日期: 2013-07-22；**修回日期:** 2013-09-14.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71101132)；中国博士后科学基金项目(2013M540448)；江苏省博士后科研资助计划(1302139C).

作者简介: 王正新(1981−), 男, 副教授, 博士后, 从事经济预测与决策、灰色系统理论等研究.

法求解 GM(1, 1) 幂模型, 分别在中国台湾地区的失业率和台币汇率的预测中取得了良好的效果. 文献 [15] 基于 Nash 均衡的思想设计了一种迭代算法求解幂指数和背景值插值系数, 并将改进的模型用于预测台湾主要股指发展趋势. 文献 [16] 针对文献 [15] 改进的模型, 提出了一种初始条件优化方法, 并在中国高技术产业主要经济指标预测中验证了优化效果. 文献 [17-18] 将 GM(1, 1) 幂模型的应用范围拓展为非等间距序列, 分别采用粒子群算法和非线性规划方法求解模型, 结果表明, 非等间距 GM(1, 1) 幂模型比非等间距灰色 Verhulst 模型和 GM(1, 1) 模型具有更高的精度.

现有的 GM(1, 1) 幂模型及其改进形式均采用最小二乘法估计结构参数列 a 和 b, 其结果是与时间无关的固定数值. 该方法虽然简单实用, 但忽略了参数随时间的动态变化特性, 可能会导致模型拟合精度高但实际预测效果不理想的问题. 事实上, 具有时变参数的 GM(1, 1) 模型[19]和离散 GM(1, 1) 模型[20]均已被验证能够有效地提高传统灰色模型的预测精度. 本文考虑将结构参数的多项式函数引入 GM(1, 1) 幂模型, 建立时变参数 GM(1, 1) 幂模型, 并研究模型的求解和优化方法, 以期进一步提高灰色模型的预测精度.

1　时变参数 GM(1, 1) 幂模型及其求解

1.1　传统 GM(1, 1) 幂模型

设非负原始序列为 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$, 对原始序列 $X^{(0)}$ 作一阶累加生成, 得 $X^{(1)}=(x^{(1)}(1),\cdots,x^{(1)}(n))$, 其中 $x^{(1)}(k)=\sum\limits_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)$; $Z^{(1)}=(z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\cdots,z^{(1)}(n))$ 为序列 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, 其中 $z^{(1)}(k)=0.5(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1))$, $k=2,3,\cdots,n$.

定义 1[10]　设 $x^{(0)}(k)$, $x^{(1)}(k)$, $z^{(1)}(k)$ 如上所述, 称灰色微分方程

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b(z^{(1)}(k))^{\gamma},\ \gamma\neq 1 \tag{1}$$

为 GM(1, 1) 幂模型.

根据式 (1) 对参数列 $(a,b)^{\mathrm{T}}$ 作最小二乘估计, 即

$$(a,b)^{\mathrm{T}}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y. \tag{2}$$

其中

$$B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & (z^{(1)}(2))^{\gamma}\\ -z^{(1)}(3) & (z^{(1)}(3))^{\gamma}\\ \vdots & \vdots\\ -z^{(1)}(n) & (z^{(1)}(n))^{\gamma}\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\ x^{(0)}(3)\\ \vdots\\ x^{(0)}(n)\end{bmatrix}.$$

定义 2[10]　设参数 a,b 如上所述, 称

$$\mathrm{d}x^{(1)}(t)/\mathrm{d}t=ax^{(1)}(t)=b(x^{(1)}(t))^{\gamma} \tag{3}$$

为 GM(1, 1) 幂模型白化微分方程.

取初始条件 $x^{(1)}(0)=x^{(1)}(1)$, 可得时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left\{\frac{b}{a}+\left[(x^{(1)}(1))^{1-\gamma}-\frac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-(1-\gamma)ak}\right\}^{\frac{1}{1-\gamma}}, \tag{4}$$

其中 $k=1,2,\cdots,n-1$.

最后对 $\hat{x}^{(1)}(k+1)$ 作一阶累减还原, 有

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k). \tag{5}$$

在实际应用中, 幂指数 γ 取值的确定可以按照文献 [10-11] 基于灰色信息覆盖原理得到的幂指数表达式来计算, 也可以在误差最小化准则下通过构建优化模型来实现, 具体过程类似于文献 [12] 的方法.

1.2　时变参数 GM(1, 1) 幂模型

传统 GM(1, 1) 模型的发展系数 a 和灰色作用量 b 都是固定的参数, 为了增强模型对原始序列的适应能力, 本文考虑以时变离散函数 $a(k)$ 和 $b(k)$ 代替模型的固定参数 a 和 b. 设时变函数 $a(k)$ 和 $b(k)$ 分别为 p 和 q 次多项式, 即

$$\begin{cases}a(k)=a_0+a_1k+\cdots+a_pk^p,\\ b(k)=b_0+b_1k+\cdots+b_qk^q.\end{cases} \tag{6}$$

定义 3　设 $X^{(0)}$ 为原始序列, $X^{(1)}$ 为 $X^{(0)}$ 的一阶累加生成, $Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, 则称灰色微分方程

$$x^{(0)}(k)+a(k)z^{(1)}(k)=b(k)(z^{(1)}(k))^{\gamma},\ \gamma\neq 1 \tag{7}$$

为时变参数 GM(1, 1) 幂模型.

时变参数 GM(1, 1) 幂模型不改变灰导数与其背景值之间的平射关系, 仍然具有灰色模型的内涵. 由式 (6) 和 (7) 可知, 传统的 GM(1, 1) 幂模型、GM(1, 1) 模型和灰色 Verhulst 模型均是时变参数 GM(1, 1) 幂模型的特殊形式. 当 $p=q=0$ 且 $\gamma\neq 1$ 时, 式 (7) 退化为 GM(1, 1) 幂模型; 当 $p=q=0$ 且 $\gamma=0$ 时, 式 (7) 退化为 GM(1, 1) 模型; 当 $p=q=0$ 且 $\gamma=2$ 时, 式 (7) 退化为灰色 Verhulst 模型.

因为时变参数 GM(1, 1) 幂模型中待估计参数为 $p+q+2$ 个, 而灰建模的样本量一般较小, 所以 p、q 取值不宜过大. 下面根据样本量的不同, 分 3 种情形给出模型参数的最小二乘辨识算式.

定理 1　设 $X^{(0)}$、$X^{(1)}$ 和 $Z^{(1)}$ 如定义 3 所述, 并记 $Y=[x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\cdots,x^{(0)}(n)]^{\mathrm{T}}$, 而

$$B=\begin{bmatrix}z^{(1)}(2) & 2z^{(1)}(2) & \cdots & 2^pz^{(1)}(2)\\ z^{(1)}(3) & 3z^{(1)}(3) & \cdots & 3^pz^{(1)}(3)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ z^{(1)}(n) & nz^{(1)}(n) & \cdots & n^pz^{(1)}(n)\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\leftarrow\begin{matrix}(z^{(1)}(2))^{\gamma} & 2(z^{(1)}(2))^{\gamma} & \cdots & 2^q(z^{(1)}(2))^{\gamma}\\ (z^{(1)}(3))^{\gamma} & 3(z^{(1)}(3))^{\gamma} & \cdots & 3^q(z^{(1)}(2))^{\gamma}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (z^{(1)}(n))^{\gamma} & n(z^{(1)}(n))^{\gamma} & \cdots & n^q(z^{(1)}(2))^{\gamma}\end{matrix}\Bigg],$$

则时变参数 GM(1, 1) 幂模型的参数列向量 $\hat{a}=[a(0), a(1),\cdots,a(p),b(0),b(1),\cdots,b(q)]^{\rm T}$ 的最小二乘估计满足: 1) 当 $n=p+q+3$ 且 $|B|\neq 0$ 时, $\hat{a}=B^{-1}Y$; 2) 当 $n>p+q+3$ 且 $|B^{\rm T}B|\neq 0$ 时, $\hat{a}=(B^{\rm T}B)^{-1}\times B^{\rm T}Y$; 3) 当 $n<p+q+3$ 且 $|B^{\rm T}B|\neq 0$ 时, $\hat{a}=B^{\rm T}\times(B^{\rm T}B)^{-1}Y$.

证明 1) 和 2) 显然成立, 下面仅证明 3).

将 $k=2,3,\cdots,n$ 代入时变参数 GM(1, 1) 幂模型, 可得如下方程组:

$$\begin{cases} x^{(0)}(2)=-a(2)z^{(1)}(2)+b(2)(z^{(1)}(2))^{\gamma},\\ x^{(0)}(3)=-a(3)z^{(1)}(3)+b(3)(z^{(1)}(3))^{\gamma},\\ \quad\vdots\\ x^{(0)}(n)=-a(n)z^{(1)}(n)+b(n)(z^{(1)}(n))^{\gamma}, \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$Y=B\hat{a}. \tag{8}$$

当 $n<p+q+3$ 且 B 为行满秩矩阵时, B 的满秩分解

$$B=DC. \tag{9}$$

此时, B 的广义逆矩阵 B^{+} 为

$$B^{+}=C^{\rm T}(CC^{\rm T})^{-1}(DD^{\rm T})^{-1}D^{\rm T}, \tag{10}$$

$$\hat{a}=C^{\rm T}(CC^{\rm T})^{-1}(DD^{\rm T})^{-1}D^{\rm T}Y. \tag{11}$$

将 D 取为单位阵 I_{n-1}, 则有 $\hat{a}=B^{\rm T}(B^{\rm T}B)^{-1}Y$. □

定义 4 设时变参数列向量 $\hat{a}$ 如上所述, 称

$$\mathrm{d}x^{(1)}(t)/\mathrm{d}t+a(t)x^{(1)}(t)=b(t)(x^{(1)}(t))^{\gamma} \tag{12}$$

为时变参数 GM(1, 1) 幂模型的白化微分方程.

定理 2 时变参数 GM(1, 1) 幂模型的白化微分方程的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t)=\Big\{\mathrm{e}^{-(1-\gamma)\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}\Big[c+(1-\gamma)\times \int_0^t b(w)\mathrm{e}^{(1-\gamma)\int_0^w a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}w\Big]\Big\}^{\frac{1}{1-\gamma}}. \tag{13}$$

证明 式 (12) 可以变换为

$$[x^{(1)}(t)]^{-\gamma}\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+a(t)[x^{(1)}(t)]^{1-\gamma}=b(t). \tag{14}$$

令 $y(1)(t)=[x^{(1)}(t)]^{1-\gamma}$, 则式 (14) 可表示为

$$\frac{\mathrm{d}y^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}=(1-\gamma)[x^{(1)}(t)]^{-\gamma}\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{15}$$

即

$$[x^{(1)}(t)]^{-\gamma}\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1-\gamma}\times\frac{\mathrm{d}y^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{16}$$

将式 (16) 代入 (14), 有

$$\frac{\mathrm{d}y^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+(1-\gamma)a(t)y^{(1)}(t)=(1-\gamma)b(t). \tag{17}$$

由线性微分方程解法, 式 (17) 的解为

$$y^{(1)}(t)= \mathrm{e}^{-(1-\gamma)\int a(t)\,\mathrm{d}t}\Big[c+(1-\gamma)\int b(t)\mathrm{e}^{(1-\gamma)\int a(t)\,\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\Big]= \mathrm{e}^{-(1-\gamma)\int a(t)\,\mathrm{d}t}\Big[c+(1-\gamma)\int_0^t b(w)\mathrm{e}^{(1-\gamma)\int_0^w a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}w\Big]. \tag{18}$$

由此可得时间响应函数

$$x^{(1)}(t)=[y^{(1)}(t)]^{\frac{1}{1-\gamma}}=\Big\{\mathrm{e}^{-(1-\gamma)\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}\Big[c+(1-\gamma)\times \int_0^t b(w)\mathrm{e}^{(1-\gamma)\int_0^w a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}w\Big]\Big\}^{\frac{1}{1-\gamma}}. \tag{19}$$

于是定理得证. □

取式 (19) 的初始条件 $x^{(1)}(0)=x^{(0)}(1)$, 可得积分常数 $c=(x^{(0)}(1))^{1-\gamma}$, 根据积分复合梯形公式将其离散化, 得到离散的时间响应式如下:

1) $k=1$ 时, 有

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)= \Big\{\mathrm{e}^{-(1-\gamma)\sum\limits_{i=0}^{p}\frac{a_i k^{i+1}}{i+1}}\Big[\frac{1-\gamma}{2}\Big(b_0+ \sum_{i=0}^{q}b_i k^i\mathrm{e}^{(1-\gamma)\sum\limits_{i=0}^{p}\frac{a_i k^{i+1}}{i+1}}\Big)+(x^0(1))^{1-\gamma}\Big]\Big\}^{\frac{1}{1-\gamma}}; \tag{20}$$

2) $k\geqslant 2$ 时, 有

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)= \Big\{\mathrm{e}^{-(1-\gamma)\sum\limits_{i=0}^{p}\frac{a_i k^{i+1}}{i+1}}\Big[(1-\gamma)\Big(\frac{1}{2}b_0+ \sum_{j=2}^{k}\sum_{i=0}^{q}b_i(j-1)^i\mathrm{e}^{(1-\gamma)\sum\limits_{i=0}^{p}\frac{a_i(j-1)^{i+1}}{i+1}}+ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{q}b_i k^i\mathrm{e}^{(1-\gamma)\sum\limits_{i=0}^{p}\frac{a_i k^{i+1}}{i+1}}\Big)+(x^{(0)}(1))^{1-\gamma}\Big]\Big\}^{\frac{1}{1-\gamma}}. \tag{21}$$

最后利用一阶累减还原, 得到最终预测值为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k),\ k=1,2,\cdots. \tag{22}$$

1.3 模型的参数优化

若给定非负原始序列 $X^{(0)}$ 和幂指数 γ, 则可按上述步骤建立时变参数 GM(1, 1) 幂模型并作外推预测. 在实际应用中 γ 是未知的, 一种简单的处理方法是事先给定 $\gamma=0$ (即时变参数 GM(1, 1) 模型) 或 $\gamma=2$ (即时变参数灰色 Verhulst 模型), 但这就限定了模型的基本形式, 从而使得灰色幂模型的灵活性得不到体现. 由时变参数 GM(1, 1) 幂模型的建立过程可知, 幂指数 γ 对模型的参数估计算式和时间响应式均有直接影响, 因此, 可以根据 γ 与结构参数向量 $\hat{a}=[a(0),a(1),\cdots,a(p),b(0),b(1),\cdots,b(q)]^{\rm T}$ 的关系设计一种优化算法, 求解出最佳幂指数. 优化目标可以设定为建模样本区间的模拟误差最小化, 考虑优化目标与模型评价标准的一致性, 选取目标函数为

$$\min_{\gamma}\mathrm{avg}|e(k)|= \frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\frac{|\hat{x}^{(0)}(k)-x^{(0)}(k)|}{x^{(0)}(k)},\ \gamma\neq 1. \tag{23}$$

其中: $\mathrm{avg}|e(k)|$ 为平均相对误差, 模拟值 $\hat{x}^{(0)}(k)$ ($k = 2, 3, \cdots, n$) 可由式 (20) ～ (22) 表示, 含有未知参数 γ 的结构参数向量 $\hat{a}$ 也纳入优化模型的约束条件中. 应用 Matlab 优化工具箱, 可以求出使式 (21) 取最小值的幂指数 γ^*, 再将其代入参数向量 $\hat{a}$ 及式 (20) ～ (22), 便可得到时变参数 GM(1, 1) 模型的模拟和预测结果.

2　应用实例

近年来, 我国工业化进程不断加快, 工业经济总量的高速发展令世人瞩目, 然而, 高能耗、高污染工业行业的发展给我国生态环境造成的污染问题也日趋严重. 工业废水的减排和处理是我国工业污染防治的重要工作. 作为环境考核的重要指标之一, 工业废水排放达标率已被环保部门纳入 "国家环保模范城市" 的考核指标体系, 并要求工业废水排放达标率应为 95% 以上. 文献 [21] 考虑到我国部分地区的工业废水排放达标率的数据呈现出小样本与波动性的特点, 应用传统 GM(1, 1) 幂模型研究了我国 31 个省市自治区的工业废水排放达标率的预测和预警. 为了便于预测结果的比较, 本文以文献 [21] 给出的我国工业废水排放达标率数据 (如表 1 所示) 为例, 说明时变参数 GM(1, 1) 幂模型比传统 GM(1, 1) 幂模型的优越性.

表 1　1998～2005 年我国工业废水排放达标率　%

年份	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
达标率	61.50	67.01	76.80	85.22	88.41	89.18	90.70	91.20

应用 1998～2003 年的 6 个数据建立时变参数 GM(1, 1) 幂模型, 并对 2004 年和 2005 年的数据进行预测. 考虑到建模样本量较小, 所以 p、q 取值不宜过大, 本例取 $p = 1, q = 0$, 即 $a(k) = a_0 + a_1 k, b(k) = b_0$, 经计算, $a_0 = 0.015\,6$, $a_1 = 0.007\,4$, $b_0 = 15.088\,2$; 同时按照本文提出的幂指数优化方法可得 $\gamma^* = 0.335\,5$. 时变参数 GM(1, 1) 幂模型的白化微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t} + (0.015\,6 + 0.007\,4t)x^{(1)}(t) = 15.088\,2(x^{(1)}(t))^{\gamma}.$$

以 $x^{(0)}(1)$ 为初始条件可得如下时间响应式:

1) 当 $k = 1$ 时, 有

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = [\mathrm{e}^{-0.010\,37k-0.002\,46k^2}(20.457\,15 + 5.013\,05\mathrm{e}^{0.010\,37k+0.002\,46k^2})]^{1.504\,82};$$

2) 当 $k \geqslant 2$ 时, 有

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \Big\{\mathrm{e}^{-0.010\,37k-0.002\,46k^2}\Big[20.457\,15 + 10.026\,11\Big(\sum_{j=2}^{k}\mathrm{e}^{0.010\,37(j-1)+0.002\,46(j-1)^2}\Big) + 5.013\,05\mathrm{e}^{0.010\,37k+0.002\,46k^2}\Big]\Big\}^{1.504\,82}.$$

一阶累减还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k), \quad k = 1, 2, \cdots, 7.$$

根据以上时间响应式可对 1999～2005 年的工业废水排放达标率进行模拟和预测, 应用传统 GM(1, 1) 幂模型 $\gamma = 0.225\,262$[21] 和时变参数 GM(1, 1) 幂模型的预测结果如表 2 所示. 其中: 1999～2003 年为模拟值, 2004 年和 2005 年为预测值.

表 2　时变参数 GM(1, 1) 幂模型与传统模型的预测结果

年份	实际值	GM(1, 1) 幂模型		时变参数 GM(1, 1) 幂模型	
		模拟预测值	相对误差/%	模拟预测值	相对误差/%
1999	67.01	67.32	0.48	65.98	1.53
2000	76.80	76.55	0.33	77.34	0.70
2001	85.22	83.53	1.98	84.53	0.81
2002	88.41	89.24	0.94	88.41	0.00
2003	89.18	94.09	5.51	89.49	0.34
平均模拟相对误差		—	1.85	—	0.68
2004	90.70	98.34	8.43	88.14	2.82
2005	91.20	102.12	11.98	84.71	7.12

表 2 显示, 传统 GM(1, 1) 幂模型对 1999～2003 年工业废水排放达标率的平均模拟相对误差为 1.58%, 按照灰色模型的检验标准[3], 该模型通过 $\alpha = 0.05$ 的残差检验, 可用于短期预测, 对 2004 年和 2005 年的预测误差分别为 8.43% 和 11.98%; 应用本文提出的时变参数 GM(1, 1) 幂模型的平均模拟相对误差降为 0.68%, 对 2004 年和 2005 年的预测误差分别降为 2.82% 和 7.12%. 可见, 时变参数 GM(1, 1) 幂模型的模拟和预测精度均高于传统模型, 其原因在于时变参数的引入增强了模型对原始数据的适应能力.

3　结　论

本文通过引入结构参数的多项式函数建立一种时变参数 GM(1, 1) 幂模型, 并给出了模型的求解和幂指数优化方法. 时变参数 GM(1, 1) 幂模型是现有几种主要灰色模型的拓展, 其中传统的 GM(1, 1) 幂模型、GM(1, 1) 模型和灰色 Verhulst 模型皆为时变参数 GM(1, 1) 幂模型的特殊形式, 因而通过时变参数和幂指数的优化在很大程度上可以提高模型的模拟和预测精度. 因为灰色模型的应用对象通常不具备大样本的原始数据, 所以多项式的次数不宜太高; 而对于大样本数据, 高次多项式又会导致数据矩阵中的元素差异过大, 在矩阵求逆的过程中极易出现病态矩阵, 以致多项式参数无法估计, 这是采用多项式函数描述结构参数变化规律的不足. 因此, 如何根据实际问题的数据特点确定参数随时间的变化规律将是今后的研究重点.

参考文献(References)

[1] 邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 77-89.
(Deng J L. Grey prediction and decision[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science & Technology, 2002: 77-89.)

[2] 肖新平, 宋中民, 李峰. 灰技术基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 13-35.
(Xiao X P, Song Z M, Li F. Elements and application of grey technology[M]. Beijing: Science Press, 2005: 13-35.)

[3] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 第5版. 北京: 科学出版社, 2010: 72-96.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theory and its application[M]. The 5th ed. Beijing: Science Press, 2010: 72-96.)

[4] 曾波, 孟伟. 面向特殊序列的灰色预测建模方法[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 2011: 9-19.
(Zeng B, Meng W. Grey forecasting modeling methods for special series[M]. Chongqing: Chongqing University Press, 2011: 9-19.)

[5] Lin S, Zhang Q S, Liu H. Parameters optimization of GM(1, 1) model based on artificial fish swarm algorithm[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2012, 2(2): 166-177.

[6] 党耀国, 刘思峰, 王正新, 等. 灰色预测与决策模型研究[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 27-46.
(Dang Y G, Liu S F, Wang Z X, et al. Grey prediction and decision model[M]. Beijing: Science Press, 2009: 27-46.)

[7] Deng J L. A novel grey model GM(1,1|τ, r): Generalizing GM(1, 1)[J]. The J of Grey System, 2001, 13(1): 1-8.

[8] Deng J L. Undulating grey model(UGM) GM(1,1| $\tan(k-\tau)p, \sin(k-\tau)p$)[J]. The J of Grey System, 2001, 13(3): 201-205.

[9] Wang Z X. Parameters optimization of undulating grey model and its application on predicting short-term inventory demand[J]. The J of Grey System, 2012, 24(4): 299-306

[10] 王正新. GM(1, 1)模型的特性与优化研究[D]. 南京: 南京航空航天大学经济与管理学院, 2007.
(Wang Z X. Study on the characteristics and optimization of GM(1, 1) model[D]. Nanjing: College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007.)

[11] 王正新, 党耀国, 刘思峰, 等. GM(1, 1)幂模型求解方法及其解的性质[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(10): 2380-2383.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F, et al. Solution of GM(1, 1) power model and its properties[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(10): 2380-2383.)

[12] 王正新, 党耀国, 裴玲玲. 基于GM(1, 1)幂模型的振荡序列建模方法[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(11): 2440-2444.
(Wang Z X, Dang Y G, Pei L L. Modeling approach for oscillatory sequences based on GM(1, 1) power model[J]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 33(11): 2440-2444.)

[13] Chen C I. Application of the novel nonlinear grey Bernoulli model for forecasting unemployment rate[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 37(12): 278-287.

[14] Chen C I, Chen H L, Chen S P. Forecasting of foreign exchange rates of Taiwan's major rading partners by novel nonlinear Grey Bernoulli model NGBM(1,1)[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008, 13(6): 1194-1204.

[15] Chen C I, Hsin P H, Wu C S. Forecasting Taiwan's major stock indices by the Nash nonlinear grey Bernoulli model[J]. Expert Systems with Applications, 37(12): 7557-7562.

[16] Wang Z X. An optimized Nash nonlinear grey Bernoulli model for forecasting the main economic indices of high technology enterprises in China[J]. Computers & Industrial Engineering, 2013, 64(3): 780-787.

[17] 李军亮, 肖新平, 廖锐全. 非等间距GM(1, 1)幂模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(3): 490-495.
(Li J L, Xiao X P, Liao R Q. Non-equidistance GM(1, 1) power model and its application[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2010, 30(3): 490-495.)

[18] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 非等间距GM(1, 1)幂模型及其工程应用[J]. 中国工程科学, 2012, 14(7): 98-102.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. Non-equidistance GM(1, 1) power model and its application in engineering[J]. Engineering, 2012, 14(7): 98-102.)

[19] 张仪萍, 俞亚南, 张土乔. 时变参数灰色沉降预测模型及其应用[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2002, 36(4): 357-360.
(Zhang Y P, Yu Y N, Zhang S Q. Study on time-dependent parameter model of settlement prediction with applications[J]. J of Zhejiang University: Engineering Science, 2002, 36(4): 357-360.)

[20] 张可, 刘思峰. 线性时变参数离散灰色预测模型[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1650-1657.
(Zhang K, Liu S F. Linear time-varying parameters discrete grey forecasting model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2010, 30(9): 1650-1657.)

[21] 王正新. 含可变参数的缓冲算子与GM(1, 1)幂模型研究[D]. 南京: 南京航空航天大学经济与管理学院, 2010.
(Wang Z X. Research on the buffer operators with parameters and GM (1,1) power model[D]. Nanjing: College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010.)

(责任编辑：李君玲)