第 29 卷 第 9 期
Vol. 29 No. 9

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 9 月
Sep. 2014

文章编号: 1001-0920 (2014) 09-1569-07 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2013.0794

具有时变时滞的不确定非完整系统的输出反馈镇定

张中才, 武玉强

(曲阜师范大学 自动化研究所，山东 曲阜 273165)

摘 要: 针对一类含有状态时变时滞的不确定非完整系统, 提出一种输出反馈镇定控制算法. 通过应用不连续的输入-状态变换和缩放变换, 将原始研究系统转换为更利于反馈控制器设计的新系统. 基于此系统设计状态反馈控制律, 通过构造状态观测器、利用必然等价原理给出理想的输出反馈镇定控制器. 分析表明, 所设计的控制器能够使得闭环系统的状态渐近趋于零. 最后通过仿真实例表明了所提出控制策略的有效性.

关键词: 非完整系统；时变时滞；反馈镇定；不确定性

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Output-feedback stabilization of uncertain nonholonomic systems with time-varying delay

ZHANG Zhong-cai, *WU Yu-qiang*

(Institute of Automation，Qufu Normal University，Qufu 273165，China．Correspondent：ZHANG Zhong-cai, E-mail：zhangzhongcai68@126.com)

Abstract: The output-feedback stabilization control method is proposed for a class of uncertain nonholonomic systems involving time-varying delay. To facilitate the feedback design, by applying discontinuous input-state transformation and rescaling transformation, the original investigated model is transformed into a new system. Based on this new system, a state-feedback controller is developed firstly. Then, by designing the state observer and using the certainty equivalence principle, an output-feedback control law is given. The analysis shows that the designed controller can realized that the closed-loop system’s state asymptotically converges to zero. A simulation example is given to show the effectiveness of the control algorithm.

Key words: nonholonomic systems；time-varying delay；feedback stabilization；uncertainties

0 引 言

在实际中, 许多基本的力学系统都是非完整系统, 如冰刀问题、尖缘小轮和带横纹的小轮、两轮驱动的移动机器人、四轮小车、三轮桌台和 Appell-Hamel 椅子轮等[1]. 对非完整系统的研究具有一定的工程背景, 目前已成为国内外研究的热点. 然而, 由于非完整系统不满足 Brockett 必要条件[2], 非完整系统不能被可微的、甚至是连续的纯状态反馈渐近镇定. 近年来, 人们将研究精力和热情投入到非完整系统控制和镇定的研究中, 提出了一些非标准的研究镇定问题的方法, 如不连续的时不变、时变和开环周期驱动控制方法[3-5].

通过变换进行系统标准化是研究非完整系统控制设计的最常用的方法[6], 许多力学系统关于速度的约束能够被部分或全部地转换为无漂移项的链式形式[7]. 目前, 已有多种控制方案应用于该类系统反馈镇定问题的研究中[8-9]. 随着研究的深入, 人们开始关注带有不确定非线性项和参数不确定的非完整系统的控制设计问题, 并取得了一系列研究成果[10-11]. 事实上, 在检测、信息传递和控制器计算的过程中都要消耗时间, 时滞存在于状态、输入和输出中较为常见[12-13], 因此, 从实际的角度而言, 在对非完整力学系统建模时应该考虑到时滞, 时滞的存在可能是引起系统不稳定的因素. 研究时滞非完整系统要比线性和一些非线性系统复杂得多, 这是一项更具挑战意义的课题. Wu 等[14-15]针对同一类具有非线性漂移项和状态

收稿日期: 2013-06-16；**修回日期:** 2013-09-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273091)；国家教育部博士点基金项目(20123705110002)；山东省泰山学者项目(TS20120529).

作者简介: 张中才(1987−), 男, 博士生, 从事非完整系统控制的研究；武玉强(1962−), 男, 教授, 博士生导师, 从事非完整控制、非线性系统等研究.

常数时滞的非完整系统, 设计了两种状态反馈控制器设计方案. 文献 [16] 解决了含干扰虚拟控制系数和多常数时滞的一类非完整系统的状态反馈镇定问题.

上述工作仅针对含常数时滞的非完整系统的状态反馈问题, 受其启发, 本文采用反推法研究了一类非完整时滞系统的输出反馈镇定问题. 为了便于反馈控制器的设计, 首先通过应用不连续的输入-状态变换和缩放变换, 将原始研究系统转换为一个新的系统. 针对此系统, 在系统状态完全可测的假设下, 设计状态反馈控制律, 进而通过构造状态观测器、利用必然等价原理给出理想的输出反馈镇定控制器. 经分析, 所设计的控制器能使得闭环系统的状态渐近趋于零. 最后通过应用实例验证了所提出控制方案的正确性.

1 启发例子和问题描述

1.1 启发例子

考虑具有微小角度测量误差的移动机器人[17], 其半线性模型描述为

$$\dot{x}_l = \Big(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\Big)v,$$
$$\dot{y}_l = \theta_l v + \varepsilon v,\ \dot{\theta}_l = \omega. \tag{1}$$

令 $x_0 = x_l, x_1 = y_l, x_2 = \theta_l + \varepsilon, u_0 = v, u_1 = \omega$, 则系统 (1) 转换为不确定链式系统

$$\dot{x}_0 = \Big(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\Big)u_0,$$
$$\dot{x}_1 = x_2 u_0,\ \dot{x}_2 = u_1. \tag{2}$$

1.2 问题描述

受以上力学模型的启发, 本文研究更一般的具有状态时滞的不确定非完整系统

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_0(t) = d_0(t)u_0(t) + \phi_0(x_0(t)),\\
&\dot{x}_i(t) = u_0(t)x_{i+1}(t) + \phi_i(u_0(t), x_0(t),\\
&\qquad \bar{x}_i(t), \bar{x}_i(t-\tau(t))),\ 1 \leqslant i \leqslant n-1,\\
&\dot{x}_n(t) = u_1(t) + \phi_n(u_0(t), x_0(t), x(t), x(t-\tau(t))),\\
&y(t) = (x_0(t), x_1(t))^{\mathrm{T}}.
\end{aligned} \tag{3}$$

其中: 系统状态为 $(x_0(t), x(t))^{\mathrm{T}} = (x_0(t), x_1(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^{n+1}$, 且只有 $x_0(t)$ 和 $x_1(t)$ 可测; $(u_0(t), u_1(t))^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^2$ 为控制输入; $\bar{x}_i(t) = (x_1(t), \cdots, x_i(t))^{\mathrm{T}}$, $\bar{x}_i(t-\tau(t)) = (x_1(t-\tau(t)), \cdots, x_i(t-\tau(t)))^{\mathrm{T}}$, $\bar{x}_n(t) = x(t)$, $\bar{x}_n(t-\tau(t)) = x(t-\tau(t))$, $\tau(t) : \boldsymbol{R}^+ \to [0, \tau]$ 为时变时滞; 光滑函数 $\phi_i(\cdot)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 为输入和状态驱动的不确定函数; $d_0(t)$ 为干扰虚拟控制系数; 常数 $\lambda_0 > 0$.

为了设计输出反馈控制器, 使得在其作用下系统状态 $(x_0(t), x(t))$ 收敛到零, 且闭环系统的所有信号都是有界的, 作如下假设.

假设 1 对于 $d_0(t)$, 存在已知正常数 μ_{01} 和 μ_{02} 满足不等式

$$\mu_{01} \leqslant d_0(t) \leqslant \mu_{02}. \tag{4}$$

假设 2 存在正实数 $r < 1$ 使得 $\dot{\tau}(t) \leqslant r$.

假设 3 对于任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$, 存在已知非负光滑函数 $\tilde{\phi}_i(\cdot)$ 满足

$$|\phi_0(x_0(t))| \leqslant \lambda_0 |x_0(t)|,\ \lambda_0 > 0; \tag{5}$$

$$|\phi_i(u_0(t), x_0(t), \bar{x}_i(t), \bar{x}_i(t-\tau(t)))| \leqslant$$
$$\tilde{\phi}_i(x_0(t)) \sum_{j=1}^{i} (|x_j(t)| + |x_j(t-\tau(t))|). \tag{6}$$

2 坐标变换

系统 (3) 固有的三角结构, 使得对控制输入 $u_0(t)$ 和 $u_1(t)$ 的设计必须分为两个独立的阶段进行. 考虑控制输入

$$u_0(t) = -k_0 x_0(t), \tag{7}$$

其中设计参数 $k_0 > 0$ 满足 $k_0 > \lambda_0/\mu_{01}$. 利用 Gronwall-Bellman 不等式[18]可得到如下引理.

引理 1 对于任意的初始时刻 $t_0 \geqslant 0$ 和任意的非零初始值 $x_0(t_0) \in \boldsymbol{R}$, x_0- 子系统的解 $x_0(t)$ 对于所有的 $t \geqslant t_0$ 均有意义, 且满足

$$x_0(t_0) \geqslant 0 \Rightarrow x_0(t_0)\mathrm{e}^{-(k_0\mu_{02}+\lambda_0)(t-t_0)} \leqslant x_0(t) \leqslant$$
$$x_0(t_0)\mathrm{e}^{-(k_0\mu_{01}-\lambda_0)(t-t_0)}, \tag{8}$$

$$x_0(t_0) < 0 \Rightarrow x_0(t_0)\mathrm{e}^{-(k_0\mu_{01}-\lambda_0)(t-t_0)} \leqslant x_0(t) \leqslant$$
$$x_0(t_0)\mathrm{e}^{-(k_0\mu_{02}+\lambda_0)(t-t_0)}. \tag{9}$$

因此, 对于系统解 $x_0(t) = 0$, 有 $x_0(t_0) = 0$ 和 $t = \infty$ 两种情况. 假设 $x_0(t_0) \neq 0$, 则由式 (7) 定义的控制输入 $u_0(t)$ 保证了对于任意的 $t \in [t_0, \infty)$, 均有 $x_0(t) \neq 0$, 且可将 $x_0(t)$ 调节到原点 $t \to \infty$. 但这种现象为控制 x- 子系统带来了较大的困难, 因为在极限处, x- 子系统变得不可控. 为了避免这种不可控性, 引入非连续的输入-状态变换

$$\eta_i(t) = \frac{x_i(t)}{u_0^{n-i}(t)},\ 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{10}$$

在 η- 坐标下, x- 子系统转化为

$$\begin{aligned}
&\dot{\eta}_i(t) = \eta_{i+1}(t) + f_i(x_0(t), \bar{\eta}_i(t), \bar{\eta}_i(t-\tau(t))),\\
&\dot{\eta}_n(t) = u_1(t) + f_n(x_0(t), \eta(t), \eta(t-\tau(t))).
\end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}
&1 \leqslant i \leqslant n-1,\\
&f_i(\cdot) = \frac{\phi_i(u_0(t), x_0(t), \bar{x}_i(t), \bar{x}_i(t-\tau(t)))}{u_0^{n-i}(t)} -\\
&\qquad (n-i)\frac{\dot{u}_0(t)}{u_0(t)}\eta_i(t),\\
&f_n(\cdot) = \phi_n(u_0(t), x_0(t), x(t), x(t-\tau(t))).
\end{aligned}$$

引理 2 对于任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$, 存在依赖于初始

值的常数 $\rho=\rho(x_0(t_0))$, 满足如下不等式

$$|f_i(x_0(t),\bar{\eta}_i(t),\bar{\eta}_i(t-\tau(t)))|\leqslant \rho\sum_{j=1}^{i}(|\eta_j(t)|+|\eta_j(t-\tau(t))|). \tag{12}$$

为了便于设计控制器, 引入缩放坐标变换

$$\eta_i(t)=P^{i-1}z_i(t),\ u_1(t)=P_0P^nu(t),\ 1\leqslant i\leqslant n. \tag{13}$$

系统 (11) 在新的 z- 坐标下变为

$$\begin{aligned}&\dot{z}_i(t)=Pz_{i+1}(t)+g_i(x_0(t),\bar{z}_i(t),\bar{z}_i(t-\tau(t))),\\&\dot{z}_n(t)=PP_0u(t)+g_n(x_0(t),z(t),z(t-\tau(t))).\end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$g_i(\cdot)=\frac{f_i(x_0(t),\bar{\eta}_i(t),\bar{\eta}_i(t-\tau(t)))}{P^{i-1}},\ 1\leqslant i\leqslant n;$$

$P\geqslant 1$ 和 P_0 为待设计的缩放参数.

注 1　对于引理 2 中的常数 ρ, 下式成立:

$$|g_i(x_0(t),\bar{z}_i(t),\bar{z}_i(t-\tau(t)))|\leqslant \rho\sum_{j=1}^{i}(|z_j(t)|+|z_j(t-\tau(t))|). \tag{15}$$

3　控制器设计

3.1　状态反馈控制器设计

首先基于假设状态 $z(t)$ 是可测的, 设计出状态反馈控制器. 构造合适的状态观测器, 利用必然等价原理给出实现控制目标的输出反馈控制器. 下面给出状态控制器的设计步骤.

Step 1　定义 $\xi_1(t)=z_1(t)$, 构造函数 $V_1=\dfrac{\xi_1^2(t)}{2}$. 由 $P\geqslant 1$ 和 Young's 不等式可得

$$\begin{aligned}&\dot{V}_1=P\xi_1z_2+\xi_1g_1\leqslant\\&P(\xi_1(z_2-z_2^*)+\xi_1z_2^*+\rho\xi_1^2+\epsilon_{11}\xi_1^2+\varepsilon_{11}\xi_1^2(t-\tau(t))).\end{aligned} \tag{16}$$

其中: $\epsilon_{11}>0, \varepsilon_{11}=\epsilon_{11}^{-1}\rho^2/4$. 选取虚拟控制律

$$z_2^*=-\beta_1\xi_1,\ \beta_1=\alpha_{11}+\epsilon_{11}+\rho,\ \alpha_{11}>0, \tag{17}$$

将其代入式 (16), 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1\leqslant\ &P(-\alpha_{11}\xi_1^2(t)+\xi_1(t)(z_2(t)-\\&z_2^*(t))+\varepsilon_{11}\xi_1^2(t-\tau(t))).\end{aligned} \tag{18}$$

Step i　假定已设计出虚拟控制律 $z_1^*, z_2^*, \cdots, z_i^*$ 具有以下形式:

$$\begin{aligned}&z_1^*=0,\ \xi_1=z_1-z_1^*,\\&z_j^*=-\beta_{j-1}\xi_{j-1},\ \xi_j=z_j-z_j^*.\end{aligned} \tag{19}$$

其中: $2\leqslant j\leqslant i$; $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{i-1}$ 为正的设计参数. 使得

$$\begin{aligned}&\dot{V}_{i-1}\leqslant\\&P\Big(-\sum_{k=1}^{i-1}\alpha_{i-1,k}\xi_k^2+\\&\sum_{k=1}^{i-1}\varepsilon_{i-1,k}\xi_k^2(t-\tau(t))+\xi_{i-1}(z_i-z_i^*)\Big)\end{aligned} \tag{20}$$

成立. 其中: $V_{i-1}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{i-1}\xi_k^2(t)$, $\alpha_{i-1,k}$ 和 $\varepsilon_{i-1,k}$ 为正实数. 下面证明式 (20) 在该步同样成立. 注意到

$$\begin{aligned}&\xi_i=z_i+\beta_{i-1}\xi_{i-1}=\\&z_i+\beta_{i-1}(z_{i-1}+\beta_{i-2}\xi_{i-2})=\cdots=\sum_{k=1}^{i}c_{ik}z_k,\end{aligned} \tag{21}$$

其中

$$c_{ik}=\begin{cases}\beta_{i-1}\cdots\beta_k,\ k=1,2,\cdots,i-1;\\1,\ k=i.\end{cases}$$

选取该步的 Lyapunov 函数 $V_i=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{i}\xi_k^2(t)$, 经计算, 其导数满足

$$\begin{aligned}\dot{V}_i\leqslant\ &P\Big(-\sum_{k=1}^{i-1}\alpha_{i-1,k}\xi_k^2+\xi_iz_{i+1}+\\&\sum_{k=1}^{i-1}\varepsilon_{i-1,k}\xi_k^2(t-\tau(t))\Big)+\xi_i\sum_{k=1}^{i}c_{ik}g_k+\\&P\xi_i\sum_{k=1}^{i-1}c_{ik}z_{k+1}+P\xi_{i-1}(z_i-z_i^*).\end{aligned} \tag{22}$$

在 Young's 不等式的帮助下, 可得

$$\xi_{i-1}(z_i-z_i^*)\leqslant|\xi_{i-1}||\xi_i|\leqslant\epsilon_{i1}\xi_{i-1}^2+\bar{\epsilon}_{i1}\xi_i^2, \tag{23}$$

$$\xi_i\sum_{k=1}^{i-1}c_{ik}z_{k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{i-1}\epsilon_{i2k}\xi_k^2+\bar{\epsilon}_{i2}\xi_i^2, \tag{24}$$

其中 $\epsilon_{i1},\bar{\epsilon}_{i1},\epsilon_{i2k}$ 和 $\bar{\epsilon}_{i2}$ 均为正实数. 利用式 (15)、(19) 和 Young's 不等式, 可得

$$\begin{aligned}&\xi_i\sum_{k=1}^{i}c_{ik}g_k\leqslant\\&\rho|\xi_i|\sum_{k=1}^{i}c_{ik}\Big(\sum_{s=1}^{k}|z_s|+\sum_{s=1}^{k}|z_s(t-\tau(t))|\Big)\leqslant\\&\rho|\xi_i|\Big(\sum_{k=1}^{i-1}d_{ik}(|\xi_k|+|\xi_k(t-\tau(t))|)+\\&c_{ii}|\xi_i|+c_{ii}|\xi_i(t-\tau(t))|\Big)\leqslant\\&P\Big(\sum_{k=1}^{i-1}\epsilon_{i3k}\xi_k^2+\sum_{k=1}^{i}\bar{\varepsilon}_{i3k}\xi_k^2(t-\tau(t))+\bar{\epsilon}_{i3}\xi_i^2\Big).\end{aligned} \tag{25}$$

其中: $d_{ik}=\Big(\sum\limits_{s=k+1}^{i}c_{is}(1+\beta_k)+c_{ik}\Big)$, $\epsilon_{i3k}>0, \bar{\varepsilon}_{i3k}>0, \bar{\epsilon}_{i3}>0$. 将式 (23) ~ (25) 代入 (22), 有

$$\dot{V}_i\leqslant P\Big(-\sum_{k=1}^{i-1}\alpha_{i-1,k}\xi_k^2+\sum_{k=1}^{i-1}\varepsilon_{i-1,k}\xi_k^2(t-\tau(t))+$$

$$\xi_i(z_{i+1}-z_{i+1}^*)+\xi_i z_{i+1}^*+\sum_{k=1}^{i-1}(\epsilon_{i2k}+\epsilon_{i3k})\xi_k^2+$$
$$\sum_{k=1}^{i}\bar{\varepsilon}_{i3k}\xi_k^2(t-\tau(t))+\epsilon_{i1}\xi_{i-1}^2+\sum_{k=1}^{3}\bar{\epsilon}_{ik}\xi_i^2\Big). \tag{26}$$

设计合适的参数 $\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2k}$ 和 ϵ_{i3k}, 满足等式

$$\alpha_{ik}=\begin{cases}\alpha_{i-1,k}-\epsilon_{i2k}-\epsilon_{i3k}>0,\ k=1,2,\cdots,i-2;\\ \alpha_{i-1,i-1}-\epsilon_{i1}-\epsilon_{i,2,i-1}-\epsilon_{i,3,i-1}>0,\\ \quad k=i-1.\end{cases} \tag{27}$$

令

$$\varepsilon_{i1}=\varepsilon_{i-1,1}+\bar{\varepsilon}_{i31},\ \cdots,$$
$$\varepsilon_{i,i-1}=\varepsilon_{i-1,i-1}+\bar{\varepsilon}_{i,3,i-1},\ \varepsilon_{ii}=\bar{\varepsilon}_{i3i}. \tag{28}$$

定义虚拟控制

$$z_{i+1}^*=-\beta_i\xi_i,\ \beta_i=\alpha_{ii}+\sum_{k=1}^{3}\bar{\epsilon}_{ik},\ \alpha_{ii}>0. \tag{29}$$

相应地, 可得到

$$\dot{V}_i\leqslant P\Big(\sum_{k=1}^{i}\varepsilon_{ik}\xi_k^2(t-\tau(t))-$$
$$\sum_{k=1}^{i}\alpha_{ik}\xi_k^2(t)+\xi_i(t)(z_{i+1}(t)-z_{i+1}^*(t))\Big). \tag{30}$$

Step n 选取 Lyapunov 函数 $V_n=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2(t)$. 应用式 (26) 的推导过程, 易得

$$\dot{V}_n\leqslant P\Big(-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_{nk}\xi_k^2+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{nk}\xi_k^2(t-\tau(t))+$$
$$\sum_{k=1}^{3}\bar{\epsilon}_{nk}\xi_n^2+P_0\xi_n(u-z_{n+1}^*+z_{n+1}^*)\Big), \tag{31}$$

其中 $\alpha_{nk}, \varepsilon_{nk}$ 和 $\bar{\epsilon}_{nk}$ 为正常数. 选择虚拟控制

$$z_{n+1}^*=-\beta_n\xi_n,$$
$$\beta_n=\Big(\alpha_{nn}+\sum_{k=1}^{3}\bar{\epsilon}_{nk}\Big)\Big/P_0,\ \alpha_{nn}>0. \tag{32}$$

将式 (32) 代回 (31), 有

$$\dot{V}_n\leqslant P\Big(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{nk}\xi_k^2(t-\tau(t))-$$
$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{nk}\xi_k^2(t)+P_0\xi_n(t)(u(t)-z_{n+1}^*(t))\Big). \tag{33}$$

因此, 所设计的状态反馈控制器为

$$z_{n+1}^*=-(\bar{\beta}_1z_1+\bar{\beta}_2z_2+\cdots+\bar{\beta}_nz_n), \tag{34}$$

其中 $\bar{\beta}_i=\prod_{m=i}^{n}\beta_m,\ i=1,2,\cdots,n$.

3.2 输出反馈控制器设计

由于状态 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 不可测, 所设计的状态控制器 (34) 在物理上是不可实现的, 需要引入状态观测器并利用必然等价原理构造输出反馈控制器, 使得所提出的输出控制器具有与状态控制器同样的效果.

为了便于观测器的设计, 引入新的不可测变量

$$\zeta_i=z_i-b_i\cdots b_2z_1,\ i=2,3,\cdots,n, \tag{35}$$

其中 $b_2\geqslant 1,\ b_3\geqslant 1,\ \cdots,\ b_n\geqslant 1$ 为待设计的增益参数. 利用式 (14) 可得动态方程

$$\dot{\zeta}_i=P(z_{i+1}-b_i\cdots b_2z_2)+g_i-b_i\cdots b_2g_1,$$
$$\dot{\zeta}_n=P(P_0u-b_n\cdots b_2z_2)+g_n-b_n\cdots b_2g_1, \tag{36}$$

其中 $2\leqslant i\leqslant n-1$. 受文献 [19] 观测器设计的影响, 设计降维观测器

$$\dot{\hat{\zeta}}_i=P(\hat{\zeta}_{i+1}+b_{i+1}\cdots b_2z_1-b_i\cdots b_2(\hat{\zeta}_2+b_2z_1)),$$
$$\dot{\hat{\zeta}}_n=P(P_0u-b_n\cdots b_2(\hat{\zeta}_2+b_2z_1)), \tag{37}$$

其中 $2\leqslant i\leqslant n-1$. 进而可得到 z_i 的估计为

$$\hat{z}_i=\hat{\zeta}_i+b_i\cdots b_2z_1,\ i=2,3,\cdots,n. \tag{38}$$

定义误差变量 $e_i=z_i-\hat{z}_i=\zeta_i-\hat{\zeta}_i,\ i=2,3,\cdots,n$. 基于关系式 (36) 和 (37), 得到误差动态方程

$$\dot{e}_i=P(z_{i+1}-\hat{z}_{i+1}-b_i\cdots b_2(z_2-\hat{z}_2))+$$
$$g_i-b_i\cdots b_2g_1,$$
$$\dot{e}_n=-Pb_n\cdots b_2(z_2-\hat{z}_2)+g_n-b_n\cdots b_2g_1. \tag{39}$$

基于必然等价原理和式 (34), 构造输出反馈镇定控制器

$$u=-(\bar{\beta}_1z_1+\bar{\beta}_2\hat{z}_2+\cdots+\bar{\beta}_n\hat{z}_n). \tag{40}$$

运用 Young's 不等式, 可得

$$P_0|\xi_n(u-z_{n+1}^*)|\leqslant P_0|\xi_n|\Big|\sum_{i=1}^{n}\bar{\beta}_i(\hat{z}_i-z_i)\Big|=$$
$$P_0|\xi_n|\sum_{i=2}^{n}\bar{\beta}_i|e_i|\leqslant\bar{\alpha}_{nn}\xi_n^2+\sum_{i=2}^{n}c_{ni}e_i^2, \tag{41}$$

其中 $\hat{z}_1=z_1,\ \bar{\alpha}_{nn}<\alpha_{nn}$ 和 $c_{ni}(i=2,3,\cdots,n)$ 为与 P 和 $b_i's$ 无关的正实数. 考虑式 (33) 和 (41), 有

$$\dot{V}_n\leqslant P\Big(-\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ni}\xi_i^2(t)+\bar{\alpha}_{nn}\xi_n^2(t)+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{ni}\xi_i^2(t-\tau(t))+\sum_{i=2}^{n}c_{ni}e_i^2(t)\Big). \tag{42}$$

为选取增益参数 $b_2,b_3,\cdots,b_n$, 作变换

$$\breve{e}_2=e_2,\ \breve{e}_3=e_3-b_3e_2,\cdots,\breve{e}_n=e_n-b_ne_{n-1}. \tag{43}$$

结合式 (43), 式 (42) 可进一步改写为

$$\dot{V}_n\leqslant$$
$$P\Big(-\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ni}\xi_i^2+\bar{\alpha}_{nn}\xi_n^2+\bar{c}_n\breve{e}_n^2+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{ni}\xi_i^2(t-\tau(t))+\sum_{i=2}^{n-1}\bar{c}_i(b_{i+1},\cdots,b_n)\breve{e}_i^2\Big). \tag{44}$$

其中: 实数 $\bar{c}_i(b_{i+1},\cdots,b_n)>0;\ i=2,3,\cdots,n-1;$

$\bar{c}_n$ 为与 P 和 $b_i's$ 无关的已知正实数. 利用式 (39) 和 (43) 得到

$$\dot{\breve{e}}_i = P(z_{i+1} - \hat{z}_{i+1} - b_i(z_i - \hat{z}_i)) + g_i - b_i g_{i-1},$$
$$\dot{\breve{e}}_n = -Pb_n(z_n - \hat{z}_n) + g_n - b_n g_{n-1}. \tag{45}$$

为了分析系统 (45), 选取函数

$$U = \frac{1}{2} l \sum_{i=2}^{n} \breve{e}_i^2(t),\ l > 0. \tag{46}$$

命题 1　考虑误差系统 (45). 利用 Young's 不等式、式 (19) 和 (43), 可推得

$$\begin{aligned}\dot{U} \leqslant P\Big(&\sum_{i=1}^{n} \tilde{d}_i \xi_i^2(t) + \sum_{i=1}^{n} \hat{d}_i \xi_i^2(t-\tau(t)) + \\ &\Big(\tilde{\gamma}_2(b_3, b_4, \cdots, b_n) + \frac{\mu_2 b_2^2}{P^2}\Big)\breve{e}_2^2(t) + \cdots + \\ &\Big(\tilde{\gamma}_{n-1}(b_n) + \frac{\mu_{n-1} b_{n-1}^2}{P^2}\Big)\breve{e}_{n-1}^2(t) + \\ &\Big(\tilde{\gamma}_n + \frac{\mu_n b_n^2}{P^2}\Big)\breve{e}_n^2(t) - \sum_{i=2}^{n} l b_i \breve{e}_i^2(t)\Big).\end{aligned} \tag{47}$$

其中: $\tilde{\gamma}_2(b_3, b_4, \cdots, b_n), \cdots, \tilde{\gamma}_{n-1}(b_n)$ 为与参数 P 无关的正实数; $\tilde{d}_1 < \alpha_{n1}$, $\cdots$, $\tilde{d}_{n-1} < \alpha_{n,n-1}$, $\tilde{d}_n < \alpha_{nn} - \bar{\alpha}_{nn}$; $\hat{d}_i$ 和 $\tilde{\gamma}_n$ 为与 P 和 $b_i's$ 无关的已知正常数.

定理 1　若假设 1 ~ 假设 3 成立, 初始状态 $x_0(t_0) \neq 0$, 运用由式 (7) 和 (40) 定义的控制器并选取适当的设计参数, 则可将系统 (3) 的状态 $x_0(t)$ 和 $x(t)$ 渐近调控到零.

证明　选取泛函

$$W = V_n + U + \frac{1}{1-r}\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\tau(t)}^{t} l_i \xi_i^2(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \tag{48}$$

其中 $l_i = \varepsilon_{ni} + \hat{d}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 令 $X^{\mathrm{T}}(t) = (\bar{\xi}_n^{\mathrm{T}}(t), \bar{e}_n^{\mathrm{T}}(t))$, 对于式 (48) 中的 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2(t) + \frac{1}{2} l \sum_{i=2}^{n}\breve{e}_i^2(t)$, 由文献 [18] 中的引理 4.3 可知, 存在 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数 χ_1 和 ω_{21} 使得

$$\begin{aligned}&\chi_1(\|X(t)\|) \leqslant \\ &\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2(t) + \frac{1}{2} l \sum_{i=2}^{n}\breve{e}_i^2(t) \leqslant \omega_{21}(\|X(t)\|).\end{aligned} \tag{49}$$

基于假设条件 $\tau(t) < \tau$, 可推得存在正实数 l_0 和 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数 ω_{22} 使得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-r}\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\tau(t)}^{t} l_i \xi_i^2(\sigma)\mathrm{d}\sigma \overset{\sigma = s+t}{\leqslant} \\ &\frac{1}{1-r}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau}^{0} l_i \xi_i^2(s+t)\mathrm{d}(s+t) \leqslant \\ &\frac{\tau}{1-r}\sum_{i=1}^{n} l_i \sup_{-\tau \leqslant s \leqslant 0}\xi_i^2(s+t) \leqslant \\ &l_0\Big(\sup_{-\tau \leqslant s \leqslant 0}\|X(s+t)\|\Big)^2 =: \omega_{22}\Big(\sup_{-\tau \leqslant s \leqslant 0}\|X(s+t)\|\Big).\end{aligned} \tag{50}$$

鉴于 $\|X(t)\| \leqslant \sup\limits_{-\tau \leqslant s \leqslant 0}\|X(s+t)\|$, 可知

$$\omega_{21}(\|X(t)\|) \leqslant \omega_{21}(\sup_{-\tau \leqslant s \leqslant 0}\|X(s+t)\|).$$

令 $\chi_2 = \omega_{21} + \omega_{22}$, 有

$$\chi_1(\|X(t)\|) \leqslant W \leqslant \chi_2(\sup_{-\tau \leqslant s \leqslant 0}\|X(s+t)\|). \tag{51}$$

通过计算 W 的导数并考虑 $P \geqslant 1$、假设 2、式 (44) 和命题 1, 得到

$$\begin{aligned}&\dot{W} \leqslant \\ &-P\Big(\Big(l b_2 - \hat{\gamma}_2(b_3, b_4, \cdots, b_n) - \frac{\mu_2 b_2^2}{P^2}\Big)\breve{e}_2^2(t) + \\ &\cdots + \Big(l b_{n-1} - \hat{\gamma}_{n-1}(b_n) - \frac{\mu_{n-1} b_{n-1}^2}{P^2}\Big)\breve{e}_{n-1}^2(t) + \\ &\Big(l b_n - \hat{\gamma}_n - \frac{\mu_n b_n^2}{P^2}\Big)\breve{e}_2^n(t) + \sum_{i=1}^{n}\tilde{\alpha}_i \xi_i^2\Big).\end{aligned} \tag{52}$$

其中: $\hat{\gamma}_i(b_{i+1}, \cdots, b_n) = \bar{c}_i + \tilde{\gamma}_i\,(2 \leqslant i \leqslant n-1)$ 为与 P 无关的正实数; $\hat{\gamma}_n = \bar{c}_n + \tilde{\gamma}_n$, $\tilde{\alpha}_i = \alpha_{ni} - \tilde{d}_i - \frac{l_i}{1-r}\,(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 和 $\tilde{\alpha}_n = \alpha_{nn} - \bar{\alpha}_{nn} - \tilde{d}_n - \frac{l_n}{1-r}$ 为与 P 和 $b_i's$ 无关的已知正常数. 选取参数 $b_2, b_3, \cdots, b_n$ 和 P 满足

$$\begin{aligned}&b_n \geqslant \max\Big\{1, \frac{\varrho_n + \sigma_n + \hat{\gamma}_n}{l}\Big\}, \\ &b_{n-1} \geqslant \max\Big\{1, \frac{\varrho_{n-1} + \sigma_{n-1} + \hat{\gamma}_{n-1}}{l}\Big\}, \\ &\quad\vdots \\ &b_2 \geqslant \max\Big\{1, \frac{\varrho_2 + \sigma_2 + \hat{\gamma}_2}{l}\Big\}, \\ &P \geqslant \max\Big\{1, \sqrt{\frac{\mu_n b_n^2}{\sigma_n}}, \cdots, \sqrt{\frac{\mu_2 b_2^2}{\sigma_2}}\Big\}.\end{aligned} \tag{53}$$

其中: $\sigma_i > 0$, $\varrho_i > 0$, $2 \leqslant i \leqslant n$. 相应地, 可推得

$$\dot{W} \leqslant -P\Big(\sum_{i=1}^{n}\tilde{\alpha}_i \xi_i^2(t) + \sum_{i=2}^{n}\varrho_i \breve{e}_i^2(t)\Big). \tag{54}$$

利用文献 [18] 中的引理 4.3, 可知

$$\chi_3(\|X(t)\|) \leqslant P\Big(\sum_{i=1}^{n}\tilde{\alpha}_i \xi_i^2(t) + \sum_{i=2}^{n}\varrho_i \breve{e}_i^2(t)\Big), \tag{55}$$

其中 $\chi_3 \in \mathcal{K}\infty$. 结合式 (54) 和 (55), 得到

$$\dot{W} \leqslant -\chi_3(\|X(t)\|). \tag{56}$$

由 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理[20], 可知

$$\lim_{t \to \infty}\xi(t) = 0, \tag{57}$$

其中 $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \cdots, \xi_n(t))^{\mathrm{T}}$. 利用式 (10)、(13) 和 (19), 最终得到

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0. \tag{58}$$

由此定理 1 得证. □

4　切换控制策略

上述分析已经针对 $x_0(t_0) \neq 0$ 的情况, 为系统 (3) 中的控制输入 u_0 和 u_1 分别设计了控制器 (7) 和 (40).

现在讨论当 $x_0(t_0)=0$ 时如何对 u_0 和 u_1 进行设计. 针对不同的系统, 文献[6] 给出了一些切换控制器的设计方案. 但对 x_0- 子系统而言, 当初始值为零时, 如果将控制输入 $u_0(t)$ 设计为常数反馈, 则可能导致出现有限逃逸的现象, 即在进行切换前, x_0- 子系统的解 $x_0(t)$ 就已经发生了跳变. 一般而言, 逃逸现象经常发生在含有一些不满足利普希茨条件的非线性项的系统中. 在本文中, 由于 ϕ_0 是全局利普希茨的, $x_0(t)$ 在任意时刻均不会发生逃逸.

当 $x_0(t_0)=0$ 时, 设计控制器为

$$u_0(t)=u_0^*,\ t\in[t_0,t_f]. \tag{59}$$

其中: u_0^* 为非零常数, $t_f>t_0$ 为任意给定的. 在有限时间段 $[t_0,t_f]$ 内, 控制 $u_0(t)$ 按照式 (59) 进行设计, 可将系统转化为一般的非线性系统. 在此时间段内的控制输入 $u_1(t)$ 可依据一般的非线性系统反推设法设计. 在时刻 t_f, $x_0(t_f)\neq 0$, 将控制信号 $u_0(t)$ 和 $u_1(t)$ 分别切换为由式 (7) 和 (40) 给出的控制信号.

5 仿真实例

为了验证本文所设计控制算法的有效性, 将系统 (2) 推广为如下时滞模型:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_0(t)=\Big(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\Big)u_0(t)+0.4x_0(t),\\
&\dot{x}_1(t)=u_0(t)x_2(t)+\frac{1}{20}x_1(t-\tau(t))\times\\
&\qquad\sin x_1(t-\tau(t)),\\
&\dot{x}_2(t)=u_1(t)+\frac{1}{20}(x_2(t)+\sin x_2(t-\tau(t))),
\end{aligned} \tag{60}$$

其中 $\tau(t)=(1+\sin t)/20$. 显然, 式 (60) 满足假设条件. 选取控制输入 $u_0(t)=-x_0(t)$, 引入变换 (10) 后, 利用引理 2, 可得

$$\begin{aligned}
&|f_1|\leqslant 0.1(|\eta_1(t)|+|\eta_1(t-\tau(t))|),\\
&|f_2|\leqslant 0.1(|\eta_2(t)|+|\eta_2(t-\tau(t))|).
\end{aligned}$$

根据第 3 节控制器设计过程, 得到如下与时滞无关的输出渐近镇定控制器:

$$\begin{aligned}
&\dot{\hat{\zeta}}_2(t)=P(P_0u(t)-b_2(\hat{\zeta}_2(t)+b_2z_1(t))),\\
&\hat{z}_2(t)=\hat{\zeta}(t)+b_2z_1(t),\\
&z_1(t)=\frac{x_1(t)}{u_0(t)},\\
&u(t)=-\beta_2(\beta_1z_1(t)+\hat{z}_2(t)),\\
&u_1(t)=P_0P^2u(t).
\end{aligned}$$

选取仿真参数 $\varepsilon=k_0=1$, $P_0=l=1$, $\beta_1=0.71$, $\beta_2=6.2$, $b_2=11$, $P=22$; 初始条件 $x_0(0)=0.5$, $x_1(0)=0.06$, $x_2(0)=-0.1$, $\hat{\zeta}_2(0)=0.1$. 当初始值 $x_0(0)=0$ 时, 选择 $x_1(0)=2$, $x_2(0)=-1$, $u_0^*=0.1$, $t_f=1$, $u_2(t)=1, t\in[0,1]$. 图 1 和图 2 的仿真结果表明了控制策略的有效性.

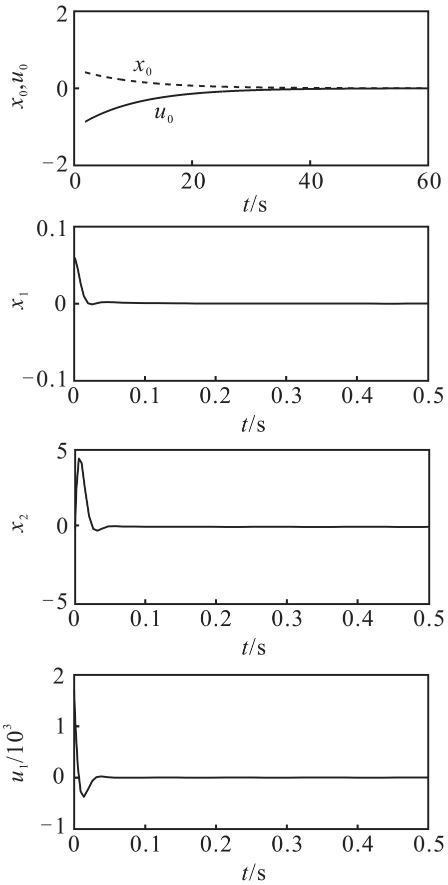

图 1 $x_0(0)\neq 0$ 时的闭环系统响应

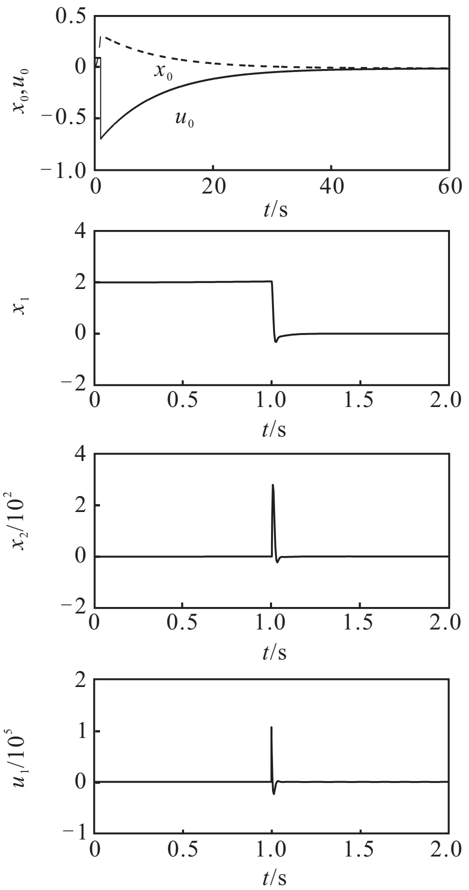

图 2 $x_0(0)=0$ 时的闭环系统响应

6 结　论

本文基于反推法和必然等价原理, 研究了一类非完整系统的渐近镇定问题. 由于状态时滞的存在, 研究非完整系统的输出反馈镇定问题较为困难, 甚至如果不对系统的不可测状态增加外部增长条件, 则该项工作有可能不可实现. 对于高阶非完整时滞系统的输出反馈镇定以及 x_0- 子系统的方程右端含非线性时滞项时的控制问题, 均有待进一步解决.

参考文献(References)

[1] 梅凤翔. 非完整系统力学基础[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1985: 29-41.
(Mei F X. The basis of nonholonomic mechanical system[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1985: 29-41.)

[2] Astolfi A. Discontinuous control of nonholonomic systems[J]. Systems and Control Letters, 1996, 27(1): 37-45.

[3] Walsh G C, Bushnell L G. Stabilization of multiple input chained form control systems[J]. Systems and Control Letter, 1995, 25(3): 227-234.

[4] Samson C. Time-varying feedback stabilization of a nonholonomic wheeled mobile robot[J]. Int J of Robotics Research, 1993, 12(1): 55-66.

[5] De Wit C C, Berghuis H, Nijmeijer H. Practical stabilization of nonlinear systems in chained form[C]. Proc of the 33rd IEEE Conf on Decision and Control. Lake Buena Vista, 1994: 3475-3480.

[6] Ge S S, Wang Zhu-ping, Lee T H. Adaptive stabilization of uncertain nonholonomic systems by state and output feedbacks[J]. Automatica, 2003, 39(8): 1451-1460.

[7] Murray R M, Sastry S. Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1993, 38(5): 700-716.

[8] Huo W, Ge S S. Exponential stabilization of nonholonomic systems: An eni approach[J]. Int J of Control, 2001, 74(15): 1492-1500.

[9] M'Closkey R T, Murray R M. Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(5): 614-628.

[10] Do K D, Pan J. Adaptive global stabilization of nonholonomic systems with strong nonlinear drifts[J]. Systems and Contorl Letters, 2002, 46(3): 195-205.

[11] Gao Fang-zheng, Yuan Fu-shun, Yao He-jun. Robust adaptive control for nonholonomic systems with nonlinear parameterization[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(4): 3242-3250.

[12] Zhang Zheng-qiang, Lu Jun-wei, Xu Sheng-yuan. Tuning functions-based robust adaptive tracking control of a class of nonlinear systems with time delays[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2012, 22(14): 1631-1646.

[13] Zhang Zheng-qiang, Xu Sheng-yuan, Shen Hao. Reduced-order observer-based output-feedback tracking control of nonlinear systems with state delay and disturbance[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(15): 1723-1738.

[14] Wu Yuan-yuan, Wu Yu-qiang. Robust stabilization of delayed nonholonomic systems with strong nonlinear drifts[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(5): 3620-3627.

[15] Wu Yuan-yuan, Wu Yu-qiang. Robust stabilization for nonholonomic systems with state delay and nonlinear drifts[J]. J of Control Theory and Applications, 2011, 9(2): 256-260.

[16] Gao Fang-zheng, Yuan Fu-shun, Yao He-jun. Robust stabilization of nonholonomic systems with time delays[C]. Proc of the 24th Chinese Control and Decision Conf. Taiyuan, 2012: 2111-2115.

[17] Jiang Z P. Robust exponential regulation of nonholonomic systems with uncertainties[J]. Automatica, 2000, 36(2): 189-209.

[18] Khalil H K. Nonlinear systems[M]. New Jersey: Prentice Hall, 2002: 145.

[19] Liu Liang, Xie Xue-jun. Output-feedback stabilization for stochastic high-order nonlinear systems with time-varying delay[J]. Automatica, 2011, 47(12): 2772-2779.

[20] Gu K, Kharitonov V L, Chen J. Stability of time-delay systems[M]. Berlin: Birkhauser, 2003: 11-14.

(责任编辑: 郑晓蕾)