

文章编号: 1001-0920(2014)12-2265-06

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.1085

时变非线性不确定系统 H_∞ 鲁棒模型预测控制

何德峰, 黄 骅, 余世明

(浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023)

摘要: 针对输入受限的时变不确定非线性系统, 提出一种 H_∞ 鲁棒模型预测控制策略. 假设线性化系统矩阵一致有界, 将非凸的无穷时域优化问题转化为带有单个线性矩阵不等式 (LMI) 约束的凸优化问题, 降低控制量求解难度. 结合滚动优化原理与 H_∞ 控制方法在线极小化性能指标, 使得闭环系统满足控制性能和约束. 在 LMI 框架下给出 H_∞ NMPC 的求解方法及其鲁棒稳定性充分条件. 仿真实验对比验证了该策略的有效性.

关键词: 时变非线性系统; 模型预测控制; 鲁棒稳定性; H_∞ 控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

H_∞ robust model predictive control of time-varying nonlinear uncertain systems

HE De-feng, HUANG Hua, YU Shi-ming

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China. Correspondent: HE De-feng, E-mail: hdfzj@zjut.edu.cn)

Abstract: An H_∞ robust model predictive control strategy is proposed for time-varying uncertain nonlinear systems subject to input constraints. The provided uniform bound of linearized system matrices, the non-convex programming problem is converted into a convex one with LMI constraints, which decreases the computational complexity of controllers. The receding horizon principle and the H_∞ control method are used to minimize performance indexes on-line, and the close-loop system satisfies the performance and constraints. The method solving nonlinear model predictive control (NMPC) and the sufficient condition guaranteeing robust stability of NMPC are derived in form of LMIs. A simulation example verifies the effectiveness of the proposed strategy.

Key words: time-varying nonlinear systems; model predictive control; robust stability; H_∞ control; linear matrix inequality

0 引言

非线性模型预测控制 (NMPC) 可以显式处理系统约束, 但原始 NMPC 并不能保证闭环鲁棒性^[1-4]. 相反, H_∞ 控制是保证闭环鲁棒性的有效方法, 但对于系统约束缺乏有效的处理能力^[5-6]. 因此, 相关学者结合两者的优点提出了 H_∞ 鲁棒 MPC 策略^[7-10], 即利用 H_∞ 控制方法设计 NMPC 优化问题的终端罚函数和终端不变集, 通过强制系统状态在预测时域内进入终端集以保证 NMPC 的递推优化可行性和闭环稳定性. 然而, 引入终端罚函数和终端不变集约束将增加 NMPC 在线计算量^[3,11]. 为了有效求解鲁棒

NMPC 问题, 相关学者引入线性矩阵不等式 (LMI) 技术分析和设计鲁棒 NMPC 策略. 例如, 文献[12-14]对线性微分包含系统, 提出了基于 LMI 的稳定 MPC 策略, 可用于不确定非线性系统的控制. 文献[15-16]考虑了特定非线性系统, 提出了输出反馈鲁棒 MPC 策略. 文献[17]建立了具有输入状态稳定的多面体系统鲁棒 NMPC 策略. 文献[18-20]结合 H_∞ 控制和 MPC 的优点, 实现了 H_∞ 鲁棒控制问题的滚动优化求解及其闭环稳定性综合. 考虑到多面体顶点和线性微分包含数量对 LMI 计算的影响, 文献[21-22]直接考虑非线性系统模型, 分别提出了闭环稳定和输入状态稳定的 LMI 鲁棒 NMPC 策略. 由于 LMI 具有较好的描述

收稿日期: 2013-08-06; 修回日期: 2013-11-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374111); 浙江省自然科学基金项目(LY13F030006); 国家科技支撑计划子课题(2012BAH38F01-02).

作者简介: 何德峰(1979—), 男, 副教授, 博士, 从事非线性预测控制、鲁棒控制等研究; 黄骅(1983—), 男, 博士生, 从事鲁棒模型预测控制的研究.

系统不确定性的能力和高效的求解算法, 基于 LMI 的鲁棒 NMPC 策略已成为当前预测控制理论研究的重要内容.

时变特性在实际系统中广泛存在, 直接采用时, 不变系统控制策略往往难以取得满意的控制效果, 甚至丢失闭环稳定性^[23]. 目前, 针对时变线性系统的 MPC 问题已取得了一些研究成果, 如线性时变参数系统 MPC 策略^[23-26]. 但是, 对于时变约束非线性系统而言, 其 MPC 稳定性和鲁棒性相关结果不多, 如文献^[27]考虑了一类时变非线性系统, 通过设计终端罚函数和约束集, 采用局部线性反馈控制器保证 NMPC 闭环系统的指数稳定性. 但是, 文中未涉及 NMPC 律的在线计算实现, 也未显式考虑系统的不确定扰动及其闭环鲁棒性问题. 然而, 采用多面体系统覆盖时变非线性系统时, 较多的多面体顶点将增加 MPC 的在线计算量^[13,21].

本文针对一类输入受限的时变非线性不确定系统, 结合 MPC 和 H_∞ 控制的各自优点, 提出一种具有闭环鲁棒稳定的 H_∞ 鲁棒 NMPC 策略. 利用线性化方法将时变非线性系统转化为带非线性摄动项的时变线性系统, 再将 NMPC 非凸的无穷时域滚动优化问题转化为带有单个 LMI 约束的凸优化问题, 从而尽可能地降低 NMPC 的在线计算量. 通过对 H_∞ 性能指标上界的滚动优化计算 NMPC 律, 实现闭环系统控制性能和系统约束的满足, 进一步给出控制律的闭环鲁棒稳定性充分条件. 以质量-小车系统为例, 比较本文方法与采用多面体表示时变特性的鲁棒 NMPC 方法的控制结果, 验证了本文结果的有效性和优越性.

1 问题描述

考虑离散时间时变非线性不确定系统

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k, k); \\ z_k = \begin{bmatrix} Hx_k \\ u_k \end{bmatrix}, u_k \in U. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x_k \in R^n$ 为状态向量; $u_k \in R^m$ 为控制输入; $w_k \in R^p$ 为不确定扰动; $z_k \in R^q$ 为辅助输出; 光滑函数 $f(x, u, w, k)$ 一致有界, 且满足 $f(0, 0, 0, k) = 0$; $U = \{u \in R^m : \|u\| \leq \bar{u}\}$ 为控制量约束集, 且有控制量上界 $\bar{u} > 0$. 假设系统状态完全可测, 原点为期望平衡点.

对系统(1)平衡点线性化, 可得时变线性系统

$$\begin{aligned} A_k &= \left. \frac{\partial f(x, u, w, k)}{\partial x} \right|_{(x, u, w) = (0, 0, 0)}, \\ B_k &= \left. \frac{\partial f(x, u, w, k)}{\partial u} \right|_{(x, u, w) = (0, 0, 0)}, \\ G_k &= \left. \frac{\partial f(x, u, w, k)}{\partial w} \right|_{(x, u, w) = (0, 0, 0)}. \end{aligned} \quad (2)$$

假设 (A_k, B_k) 是一致可镇定的, 且 A_k, B_k 和 G_k 是一致有界的, 即存在有限正常数 M_A, M_B 和 M_G , 满足

$$\|A_k\| \leq M_A, \|B_k\| \leq M_B, \|G_k\| \leq M_G, k \geq 0, \quad (3)$$

则系统(1)等价于

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k + \bar{f}(x_k, u_k, w_k, k). \quad (4)$$

记摄动项 $\bar{f}(x_k, u_k, w_k, k) = \bar{f}$, 则

$$\bar{f} = f(x_k, u_k, w_k, k) - A_k x_k - B_k u_k - G_k w_k. \quad (5)$$

假设 \bar{f} 在可行域内满足 Lipschitz 条件, 即存在适当维数的矩阵 W 满足 $\|\bar{f}\| \leq \|W[x_k^T \ u_k^T \ w_k^T]^T\|$.

假设 1 系统(1)的不确定扰动 w 是平方可加的, 即 $\sum_{i=0}^{\infty} \|w_i\|^2 \leq \bar{w}$, 其中上界 \bar{w} 已知.

注 1 假设 1 中的不确定扰动可以表示系统的参数不确定性和外部衰减扰动等, 是实际系统中广泛存在的一类不确定扰动.

考虑系统(1), 定义一无穷时域 H_∞ 性能函数

$$J_k^\infty = \sum_{i=0}^{\infty} L(z_{i|k}, w_{i|k}) = \sum_{i=0}^{\infty} (\|z_{i|k}\|^2 - \rho \|w_{i|k}\|^2). \quad (6)$$

其中: 常数 $\rho > 0$ 为扰动抑制水平数, $s_{i|k}$ 为变量 s 在 k 时刻对 $k+i$ 时刻的预测量. 在 k 时刻求解如下 min-max 问题:

$$\begin{aligned} & \min_{\{u_{i|k}\}} \max_{\{w_{i|k}\}} J_k^\infty. \\ & \text{s.t.} \begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k, k), \\ z_k = \begin{bmatrix} Hx_k \\ u_k \end{bmatrix}, u_k \in U; \\ x_{0|k} = x_k. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

其中 x_k 为当前时刻的状态量. 若问题(7)优化可行, 则可得到 k 时刻的最优控制序列 $\{u_{0|k}^*, u_{1|k}^*, \dots\}$, 取当前控制量 $u_{0|k}^*$ 为预测控制量作用于系统(1). 在下一时刻更新系统初始状态, 重新计算控制律, 如此重复整个过程便可实现系统的滚动优化控制.

对系统(1)和优化问题(7)定义时变控制律

$$u_k = K_k x_k, \quad (8)$$

其中 K_k 为状态反馈增益矩阵. 本文目标是计算 K_k , 使得闭环系统(1)和控制律(8)内部稳定, 且满足控制约束, 并极小化从 w 到 z 的 H_∞ 性能指标.

2 H_∞ 鲁棒 NMPC 策略

为了便于描述 H_∞ 鲁棒 NMPC 策略, 给出以下引理.

引理 1 设 M 和 N 为定常矩阵, P 为适当维数的对称正定矩阵, 则不等式^[28]

$$M^T P N + N^T P M \leq \mu M^T P M + \mu^{-1} N^T P N \quad (9)$$

对于任意实数 $\mu > 0$ 成立.

引理 2 考虑系统(1)和假设 1, 如果存在标量 $\xi > 0, \rho > 0$, 矩阵 $X > 0$ 和 Y , 满足

$$\begin{bmatrix} \xi & \xi I \\ \xi I & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} X & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \rho I & * & * & * & * & * & * \\ HX & 0 & \xi I & * & * & * & * & * \\ Y & 0 & 0 & \xi I & * & * & * & * \\ \sqrt{\alpha_1} M_A X & 0 & 0 & 0 & \xi I & * & * & * \\ \sqrt{\alpha_2} M_B Y & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi I & * & * \\ \sqrt{\alpha_3} M_G X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi I & * \\ W_1 X + W_2 Y & W_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (11)$$

其中: 常数 $\alpha_1 = (1 + \varepsilon)(1 + \mu)(1 + \theta)$, $\alpha_2 = (1 + \varepsilon)(1 + \mu)(1 + \theta^{-1})$, $\alpha_3 = (1 + \varepsilon)(1 + \mu^{-1})$; W_1, W_2 和 W_3 为常数矩阵. 则存在状态反馈控制律 $u_{i|k} = Y X^{-1} x_{i|k}$, 使得在该控制律的作用下, 系统(1)满足

$$x_{i+1|k}^T P x_{i+1|k} - x_{i|k}^T P x_{i|k} \leq \rho \|w_{i|k}\|^2 - \|z_{i|k}\|^2, \quad (12)$$

性能函数(6)满足

$$\sum_{i=0}^{\infty} (\|z_{i|k}\|^2 - \rho \|w_{i|k}\|^2) \leq x_{0|k}^T P x_{0|k}. \quad (13)$$

其中: $P = X^{-1}, i = 0, 1, 2, \dots$.

证明 假设存在 $\xi > 0, \rho > 0, X > 0$ 和 Y , 满足不等式(10)和(11), 则对于预测系统选取 Lyapunov 函数 $V(x_{i|k}) = x_{i|k}^T P x_{i|k}$. 其中 $P = X^{-1}, P \leq \eta I, \eta > 0$. 定义 Hamilton 函数为

$$H_{i|k} = V(x_{i+1|k}) - V(x_{i|k}) + \|z_{i|k}\|^2 - \rho \|w_{i|k}\|^2. \quad (14)$$

对不等式 $P \leq \eta I$ 应用 Schur 补引理, 可得

$$\begin{bmatrix} \eta I & I \\ I & P^{-1} \end{bmatrix} \geq 0.$$

分别对其左乘和右乘 $\text{diag}\{\eta^{-1}, I\}$, 并令 $\xi = \eta^{-1}, X = P^{-1}$, 可得不等式(10).

令 $y_{i|k} = [x_{i|k}^T w_{i|k}^T]^T, E = [H^T K^T]^T$. 考虑不等式(14), 可得

$$H_{i|k} = V(x_{i+1|k}) + y_{i|k}^T \begin{bmatrix} E^T E - P & 0 \\ 0 & -\rho I \end{bmatrix} y_{i|k}. \quad (15)$$

将式(3)和 $P \leq \eta I$ 代入 $V(x_{i+1|k})$, 并结合引理 1, 可得

$$V(x_{i+1|k}) \leq \eta [(1 + \varepsilon) y_{i|k}^T D_k^T D_k y_{i|k} + (1 + \varepsilon^{-1}) \bar{f}_k^T \bar{f}_k]. \quad (16)$$

其中: 常数 $\varepsilon > 0, D_k = [A_k + B_k K \ G_k]$. 进一步可得

$$D_k^T D_k \leq (1 + \mu)(1 + \theta) M_A^2 I + (1 + \mu^{-1}) M_G^2 I + (1 + \mu)(1 + \theta^{-1}) M_B^2 K^T K. \quad (17)$$

其中: 常数 $\mu > 0, \theta > 0$. 结合 \bar{f} 假设和式(17), 可得

$$V(x_{i+1|k}) \leq \eta y_{i|k}^T (\alpha_1 M_A^2 I + \alpha_2 M_B^2 K^T K + \alpha_3 M_G^2 I + L^T W^T W L) y_{i|k}. \quad (18)$$

其中: $\alpha_1 = (1 + \varepsilon)(1 + \mu)(1 + \theta), \alpha_2 = (1 + \varepsilon)(1 + \mu)(1 + \theta^{-1}), \alpha_3 = (1 + \varepsilon)(1 + \mu^{-1}), L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ I & K^T & 0 \end{bmatrix}^T$.

记 $W = [W_1 \ W_2 \ W_3]$, 满足 $W L = [Z \ W_3]$, 其中 $Z = W_1 + W_2 K$. 结合式(15)和(17), 对不等式 $H_{i|k} \leq 0$ 应用 Schur 补引理, 并令 $\xi = \eta^{-1}$, 可得

$$\begin{bmatrix} P & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \rho I & * & * & * & * & * & * \\ H & 0 & \xi I & * & * & * & * & * \\ K & 0 & 0 & \xi I & * & * & * & * \\ \sqrt{\alpha_1} M_A I & 0 & 0 & 0 & \xi I & * & * & * \\ \sqrt{\alpha_2} M_B K & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi I & * & * \\ \sqrt{\alpha_3} M_G I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi I & * \\ Z & W_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (19)$$

对式(19)分别左乘和右乘 $\text{diag}\{X, I, I, I, I, I, I, I\}$, 并令 $X = P^{-1}, Y = K X$, 可得不等式(11).

考虑无穷时域性能函数(6), 对不等式(12)从 $i = 0$ 到 $i = \infty$ 求和, 可得 $J_k^\infty \leq V(x_{0|k}) - V(x_{\infty|k}) = V(x_{0|k})$, 即不等式(6)成立. \square

引理 3 在引理 2 的相同条件下, 对于任意初始状态 $x_{0|k} \in \Omega_1$, 闭环预测状态满足

$$x_{i|k} \in \Omega_2, i = 1, 2, \dots$$

其中: $\Omega_1(P, e, \bar{w}) = \{x \in R^n : \rho \bar{w} + V(x) \leq e\}, \Omega_2(P, e) = \{x \in R^n : V(x) \leq e\}$, 常数 $e > 0$. 进一步, 系统输出量 z 平方可加.

证明 若问题(10)和问题(11)在任意时刻有解, 则存在矩阵 P 满足式(13). 利用引理 2 的结论和假设 1 可得, 对于任意 $n > 0$, 有 $V(x_{n|k}) + \sum_{i=0}^n \|z_{i|k}\|^2 \leq \rho \bar{w} + V(x_{0|k})$, 则 $V(x_{n|k}) \leq \rho \bar{w} + V(x_{0|k}) - \sum_{i=0}^n \|z_{i|k}\|^2 \leq \rho \bar{w} + V(x_{0|k})$. 又因为 $x_{0|k} \in \Omega_1 \Rightarrow \rho \bar{w} + V(x_{0|k}) \leq e$,

可得 $V(x_{n|k}) \leq e, \sum_{i=0}^n \|z_{i|k}\|^2 \leq e$. 即当系统初始状态 $x_{0|k} \in \Omega_1$ 时, 状态反馈控制律 $u_{i|k} = YX^{-1}x_{i|k}$, 使得闭环系统状态 $x(k) \in \Omega_2, k = 1, 2, \dots$. \square

由于优化问题(7)是一个非凸的非线性规划问题, 直接对其求解计算量大且很困难, 可采用文献[12]的方法, 通过极小化性能指标的上界来近似求解问题(7). 引入标量 $\gamma > 0$, 满足 $J_k^\infty \leq x_{0|k}^\top P x_{0|k} \leq \gamma$, 对于 $x_{0|k}^\top P x_{0|k} \leq \gamma$, 利用 Schur 补引理, 可得

$$\begin{bmatrix} \gamma & x_{0|k}^\top \\ x_{0|k} & X \end{bmatrix} \geq 0. \quad (20)$$

进一步, 考虑控制约束 U , 将其改写为如下形式:

$$\|(YX^{-1})_j x\| \leq \bar{u}_j, j = 1, 2, \dots, m. \quad (21)$$

其中: $(YX^{-1})_j$ 为 YX^{-1} 的第 j 行, \bar{u}_j 为控制量 u 第 j 维的上界. 又考虑 Ω_2 的定义, 对于任意 $x \in \Omega_2$, 有

$$\begin{aligned} \|(YX^{-1})_j x\| &= \\ \|(YX^{-1})_j X^{1/2} X^{-1/2} x\| &\leq \\ \|(YX^{-1})_j X^{1/2}\| \|X^{-1/2} x\| &\leq \\ \|K_j X^{1/2}\| \sqrt{e}, j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (22)$$

注意到 $\sqrt{e} \|(YX^{-1})_j X^{1/2}\| \leq \bar{u}_j \Leftrightarrow \bar{u}_j^2 - e(YX^{-1})_j \times X(YX^{-1})_j^\top \geq 0$, 应用 Schur 补引理并分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{I, X\}$, 可得

$$\begin{bmatrix} \bar{u} & * \\ Y & e^{-1}X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (23)$$

即对于任意 $x \in \Omega_2$, 控制律 $u_k = YX^{-1}x_k \in U$.

定理 1 考虑系统(1)和假设 1, 若优化问题

$$\min_{X, Y, \xi, \rho, \gamma} \{\gamma | (10), (11), (20), (23), x_{0|k} = x_k\} \quad (24)$$

有解, 则存在状态反馈控制律 $u_k = YX^{-1}x_k$, 使得闭环系统内部稳定且满足控制约束. 其中: x_k 为当前 k 时刻状态, γ 为性能函数(6)的一个上界.

结合引理 2、式(20)和(23)可得定理结论.

定理 1 成立的必要条件是优化问题(24)在任意时刻都是可行的, 即存在至少 1 组可行性解.

定理 2 假设 $\xi_k^*, \rho_k^*, X_k^*, Y_k^*, \gamma_k^*$ 为优化问题(24)在 k 时刻的最优解, 则它们也是该优化问题在 $k+1$ 时刻的 1 个可行解.

证明 设 $\xi_k^*, \rho_k^*, X_k^*, Y_k^*, \gamma_k^*$ 为优化问题(27)在 k 时刻的最优解, 则在 $k+1$ 时刻, $\xi_k^*, \rho_k^*, X_k^*, Y_k^*, \gamma_k^*$ 同样满足不等式(10), (11)和(23), 只需要证明不等式(20)在 $k+1$ 时刻可行. 由引理 2 的证明过程可知, 对于任意 $x_{i|k} \in \Omega_2$, 有 $V(x_{i+1|k}) \leq \rho_k^* \bar{w} + V(x_{i|k})$, 从而 $x_{1|k}^\top X_k^{*-1} x_{1|k} \leq x_{0|k}^\top X_k^{*-1} x_{0|k} \leq \gamma_k^*$, 即不等式(20)

在 $k+1$ 时刻成立. \square

注 2 当 e 固定不变时, 式(23)是关于 X 和 Y 的 LMI. 由引理 3 可知, e 给出了系统输出 z 的一个上界. 通常减小 e 可使系统具有更好的闭环性能, 且更容易满足不等式(23), 但是会减小 MPC 可行域. 因此, 在实际应用中, e 的取值需要兼顾两者, 以折衷控制器可行域和鲁棒性能.

算法 1 1) 输入参数 $(e, \varepsilon, \mu, \theta, W, M_A, M_B, M_G)$, 令 $k = 0$; 2) 测量当前状态 x_k 并更新优化问题(24)的初始条件 $x_{0|k} = x_k$, 求解式(24)可得最优解 Y_k 和 X_k ; 3) 将控制量 $u_k = Y_k X_k^{-1} x_k$ 作用于系统(1), 并令 $k = k + 1$, 返回 2).

3 仿真实验

考虑如下质量-小车系统的离散化模型^[17]:

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = x_{1,k} + T x_{2,k}, \\ x_{2,k+1} = -\frac{T k_0}{M} e^{-x_{1,k}} x_{1,k} + \\ \left(1 - \frac{T h_k}{M}\right) x_{2,k} + \frac{T u_k}{M} + T w_k. \end{cases} \quad (25)$$

其中: $T = 0.4$ s 为采样周期, x_1 为位移, x_2 为速度, u 为外力, $k_0 = 0.33$ 为弹性系数, $M = 1$ 为小车质量, $0.6 \leq h \leq 1.6$ 为时变阻尼系数, $U = \{u \in R : |u| \leq 1\}$ 为控制量约束.

在仿真中分别考虑 h_k 的 3 组取值 $h_k^A = 1.1 + 0.5 \sin(2k)$, $h_k^B = 1.1 + 0.5 \sin(0.2k)$, $h_k^C = 0.6 + \text{rand}(k)$. 其中: 函数 rand 用来生成 $0 \sim 1$ 的随机数, 以及扰动 $w_k = e^{-k/10} \sin(0.1k)$ 和初始条件 $(3, -1)$. 为了保证优化问题初始可行, 令 $M_A = 1, M_B = 0.16, M_G = 0.1, e = 2, H = [0.8 \ 1.0], \varepsilon = 1, \mu = 10^{-5}$,

$$\theta = 0.1, W = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

先考虑本文方法控制系统(25), 利用 LMI 工具箱求解优化问题(24), 控制结果如图 1~图 3 所示. 图中: 实线对应 h^A 组, 虚线对应 h^B 组, 点线对应 h^C 组. 由图 1~图 3 可以看出, 本文算法对具有不同时变参数和不确定扰动的非线性系统具有良好的一致渐近稳定性. 与此同时, 3 组结果的控制量都满足系统的约束条件.

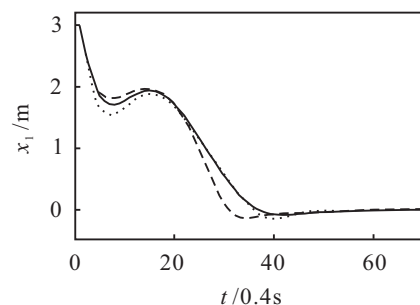


图 1 基于本文方法的闭环系统状态 x_1 轨迹

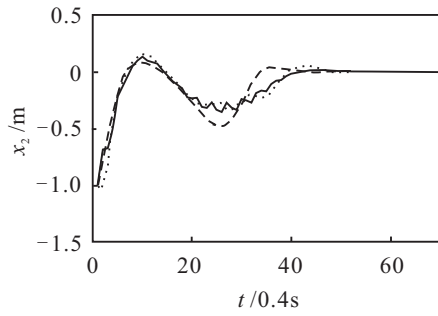


图 2 基于本文方法的闭环系统状态 x_2 轨迹

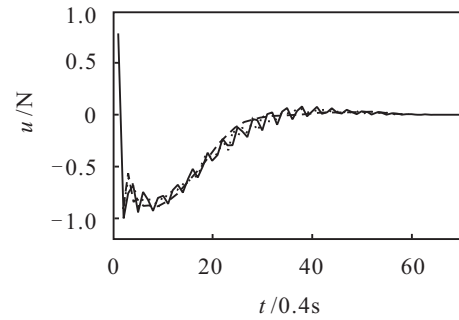


图 6 基于多面体覆盖的控制输入曲线

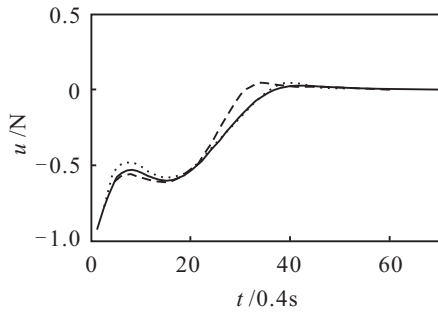


图 3 基于本文方法的控制输入曲线

分别将图 1 与图 4、图 2 与图 5 的闭环状态响应进行对比, 其结果表明, 基于多面体系统的鲁棒 MPC 对系统参数的时变性具有较好的控制效果一致性, 但状态轨迹产生较频繁的抖动(如实线), 同时过渡时间较长. 再对比图 3 与图 6 的控制量曲线, 基于多面体系统的鲁棒 MPC 方法尽管控制量同样满足系统约束, 但过渡过程存在明显的抖动现象, 不利于如阀门等执行机构的有效运行.

4 结 论

本文以一类输入受限的非线性时变系统为研究对象, 结合预测控制滚动优化原理和 H_∞ 控制理论, 提出了一种新的 H_∞ 鲁棒 NMPC 策略. 将系统在原点附近线性化并假设系统矩阵一致有界, 从而把非凸的无穷时域滚动优化问题转化为带有 LMI 约束的凸优化问题, 降低了求解难度. 通过对 H_∞ 性能指标的在线最小化, 使得滚动时域闭环系统能实时协调控制性能要求并满足系统约束. 同时, 进一步给出了滚动时域 H_∞ 控制律的求解方法及其存在的充分条件. 仿真结果验证了上述策略的有效性.

参考文献(References)

- [1] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. Automatica, 2000, 36(6): 789-814.
- [2] 席裕庚, 李德伟. 预测控制定性综合理论的基本思路和研究现状[J]. 自动化学报, 2008, 34(10): 1225-1234. (Xi Y G, Li D W. Fundamental philosophy and status of qualitative synthesis of model predictive control[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(10): 1225-1234.)
- [3] Raimondo D M, Limon D, Lazar M, et al. Min-max model predictive control of nonlinear systems: A unifying overview on stability[J]. European J of Control, 2009, 15(1): 5-27.
- [4] 何德峰, 丁宝苍, 于树友. 非线性系统模型预测控制若干基本特点与主题回顾[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(3): 273-287. (He D F, Ding B C, Yu S Y. Review of fundamental

再考虑多面体覆盖系统(25)的鲁棒 NMPC 方法^[12,17], 其中多面体顶点为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.4 \\ 0 & 0.76 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.4 \\ -1.5 & 0.76 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.4 \\ 0 & 0.36 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.4 \\ -1.5 & 0.36 \end{bmatrix},$$

$$B_i = [0 \ 0.4]^T, i = 1, 2, 3, 4.$$

在相同仿真环境下, 结果如图 4~ 图 6 所示. 图中: 实线对应 h^A 组, 虚线对应 h^B 组, 点线对应 h^C 组.

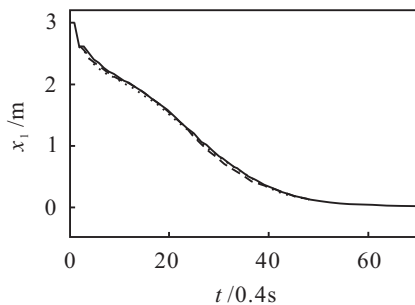


图 4 基于多面体覆盖的闭环系统状态 x_1 轨迹

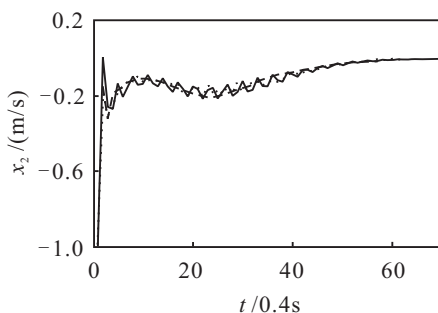


图 5 基于多面体覆盖的闭环系统状态 x_2 轨迹

- properites and topics of model predictive control of nonlinear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(3): 273-287.)
- [5] Lin W, Byrnes C. H_∞ control of discrete-time nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(4): 494-510.
- [6] Zhou K M, Doyle J C, Glover K. *Robust and optimal control*[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1995: 506-534.
- [7] Chen H, Scherer C W, Allgöwer F. Game theoretic approach to nonlinear robust receding horizon control of constrained systems[C]. *Proc of the American Control Conf.* New York: IEEE Press, 1997: 3073-3077.
- [8] Magni L, Nijmeijer H, Vander Schaft A J. Receding-horizon approach to the nonlinear H_∞ control problem[J]. *Automatica*, 2001, 37(3): 429-435.
- [9] Lee S M, Park J H. Robust H_∞ model predictive control of uncertain systems using relaxation matrices[J]. *Int J of Control*, 2008, 81(4): 641-650.
- [10] He D F, Ji H B, Zheng T. On robustness of constrained nonlinear H_∞ predictive controllers with disturbances[J]. *Int J of Systems Science*, 2010, 41(2): 203-212.
- [11] Primbs J A, Nevistic V, Doyle J C. A receding horizon generalization of pointwise min-norm controllers[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(5): 898-909.
- [12] Kothare M V, Balakrishanan V, Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 1996, 32(10): 1361-1379.
- [13] Karthare M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 2003, 39(5): 837-846.
- [14] Capron B D O, Uchiyama M T, Odloak D. Linear matrix inequality-based robust model predictive control for time-delayed systems[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2012, 6(1): 37-50.
- [15] Ding B C. Dynamic output feedback predictive control for nonlinear systems represented by a Takagi-Sugeno model[J]. *IEEE Trans Fuzzy Systems*, 2011, 19(5): 831-843.
- [16] Ding B C, Ping X B. Dynamic output feedback model predictive control for nonlinear systems represented by Hammerstein-Winner model[J]. *J of Process Control*, 2012, 22(9): 1773-1784.
- [17] 黄骅, 何德峰, 俞立. 基于多面体描述系统的鲁棒非线性预测控制[J]. *自动化学报*, 2012, 38(12): 1906-1912. (Huang H, He D F, Yu L. Robust nonlinear predictive control based on polytopic description systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(12): 1906-1912.)
- [18] 陈虹, 韩光信, 刘志远. 基于LMI的约束系统 H_∞ 控制及其滚动优化实现[J]. *控制理论与应用*, 2005, 22(2): 189-195. (Chen H, Han G X, Liu Z Y. LMI-based H_∞ control scheme for constrained systems and its moving horizon implementation[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(2): 189-195.)
- [19] 陈虹, 刘志远. 一种基于 H_∞ 理论的鲁棒预测控制方法[J]. *自动化学报*, 2002, 28(2): 1-5. (Chen H, Liu Z Y. An H_∞ approach to robust model predictive control[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(2): 1-5.)
- [20] 黄鹤, 李德伟, 席裕庚. 基于多步控制策略的混合 H_2/H_∞ 鲁棒预测控制器设计[J]. *自动化学报*, 2012, 38(6): 944-950. (Huang H, Li D W, Xi Y G. On design of mixed H_2/H_∞ RMPC based on multi-step control strategy[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(6): 944-950.)
- [21] Poursafar N, Taghirad H D, Haeri M. Model predictive control of nonlinear discrete time systems: A linear matrix inequality approach[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(10): 1922-1932.
- [22] Chen Q X, He D F, Yu L. Input-to-state stability of min-max MPC scheme for nonlinear time-varying delay systems[J]. *Asian J of Control*, 2012, 14(2): 489-501.
- [23] Tao X Y, Li N, Li S Y. Multiple-model off-line predictive control for fast time-varying systems[C]. *Guiyang: Proc of the 25th CCDC*, 2013: 732-737.
- [24] Mayne D Q, Rakovic S V, Findeisen R, et al. Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems: Time varying case[J]. *Automatica*, 2009, 45(9): 2082-2087.
- [25] Li D W, Xi Y G. The feedback robust MPC for LPV systems with bounded rates of parameter changes[J]. *IEEE Trans on Automatica Control*, 2010, 55(2): 503-507.
- [26] Yu S Y, Bohm C, Chen H, et al. Model predictive control of constrained LPV systems[J]. *Int J of Control*, 2012, 85(6): 671-683.
- [27] De Nicolao G, Magni L, Scattolini R. Stabilizing receding-horizon control of nonlinear time-varying systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(7): 1030-1036.
- [28] 俞立. 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 88-88. (Yu L. *Robust control—A linear matrix inequality approach*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 88-88.)