

一类区间多目标粒子群优化算法

章恩泽, 吴益飞, 陈庆伟

(南京理工大学 自动化学院, 南京 210094)

摘要: 针对区间参数多目标优化问题, 提出一种基于模糊支配的多目标粒子群优化算法. 首先, 定义基于决策者悲观程度的模糊支配关系, 用于比较解的优劣; 然后, 定义一种适于区间目标值的拥挤距离, 以更新外部存储器并从中选择领导粒子; 最后, 对多个区间多目标测试函数进行仿真实验, 实验结果验证了所提出算法的有效性.

关键词: 多目标优化; 区间参数; 粒子群优化; 模糊支配

中图分类号: TP301.6

文献标志码: A

Particle swarm optimization algorithms for interval multi-objective optimization problems

ZHANG En-ze, WU Yi-fei, CHEN Qing-wei

(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: ZHANG En-ze, E-mail: yzzz8986@gmail.com)

Abstract: Aiming at multi-objective optimization problems with interval parameters, a multi-objective particle swarm optimization algorithm based on fuzzy dominance is proposed. Firstly, the fuzzy Pareto dominance relation based on decision-makers' pessimism degree is defined for comparison of solutions. Then, the crowding distance suitable for interval objectives is defined for updating the external repository and selecting the global particle leaders. Finally, trials are carried out on several interval multi-objective benchmark testing functions, and the results show the effectiveness of the proposed algorithms.

Key words: multi-objective optimization; interval parameter; particle swarm optimization; fuzzy dominance

0 引言

无论在科学研究还是工程应用上, 多目标优化都是重要的研究课题. 该类问题中存在多个彼此冲突的目标, 某一目标的改善可能引起其他目标性能的降低, 因此不存在绝对的或是唯一的最优解, 通常需要在各个目标间进行折衷, 得到一组或多组均衡目标之间优劣的 Pareto 最优解集.

目前, 启发式算法已广泛应用于求解多目标优化问题, 如进化算法、禁忌搜索、模拟退火、粒子群算法等. 然而, 大多数研究都是针对目标值可精确表达的优化问题. 在对实际系统建模时, 由于关于环境因素或系统本身所掌握的信息的匮乏, 所建模型中往往存在不确定性. 近年来, 不确定优化问题的研究已成为一种趋势^[1], 而不确定优化问题的目标函数常表现为

区间形式, 因此, 研究区间优化问题具有理论意义和应用价值.

针对区间优化问题已经给出了一些理论和方法^[2-6], 但研究成果大都集中在单目标区间规划问题上, 区间多目标优化问题的求解方法较少. 文献[7]将 MOEA 扩展到区间多目标优化问题, 定义了一种弱 Pareto 支配关系 $>_w$ 和强 Pareto 支配关系 $>_s$, 分别用于选择操作和外部存储器更新操作, 此外, 提出了一种适于区间目标的密度估计方法, 用于维护非支配解集的多样性. 文献[1]提出了一种不精确繁殖多目标进化算法 (IP-MOEA), 基于区间偏序关系 $>_{IN}$ 将 Pareto 支配关系拓展为不精确 Pareto 支配关系 $>_{IP}$, 应用 $>_{IP}$ 和超体积测度修改了 NSGA-II 中的锦标赛选择环节和非支配排序环节. 文献[8]针对区间多目

收稿日期: 2013-10-16; 修回日期: 2014-01-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61074023, 51175266); 江苏省科技支撑项目(BE2012175); 江苏省高校自然科学基金项目(12KJB510008); 江苏省普通高校研究生科研创新项目(KYZZ.0121).

作者简介: 章恩泽(1989—), 女, 博士生, 从事智能算法的研究; 陈庆伟(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能算法、智能控制等研究.

标可靠性优化问题,定义了区间序关系 $>_{\max}$ 和 $>_{\min}$, 将其转化为单目标优化问题,并利用改进的遗传算法求解.文献[9]采用边优化边决策的方法,提出了一种基于偏好方向的交互进化算法.

以上方法大都限于多目标进化算法.粒子群优化(PSO)算法是 Kennedy 等^[10]受到飞鸟集群活动的规律性启发提出的一种智能优化算法.相比进化算法,PSO 具有易于实现和快速收敛等优点,在解决实际问题中展示了其优越性.文献[11]利用粒子群算法研究了含区间参数的多目标优化问题,假定目标函数值在区间上服从均匀分布,定义了概率支配关系,在此基础上给出外部存储器更新机制,并基于 σ 区间值,给出了领导粒子选择方法.文献[12]指出,区间可视为特殊的模糊集合,借助模糊集理论求解含区间参数的不确定问题可以在优化过程中融入决策者信息,得到满足决策者要求的满意解(集).

本文提出一种基于模糊支配的多目标粒子群算法(FD-MOPSO).该算法通过定义基于决策者悲观程度的模糊支配关系,比较所得解的优劣;通过定义新的拥挤距离测度,改进外部存储器的更新方法和领导粒子的选择方法.最后通过仿真实例表明了所提出算法的可行性和有效性.

1 区间多目标优化问题

定义 1^[13] 设 $A = [\underline{a}, \bar{a}] = \{a : \underline{a} \leq a \leq \bar{a}, a \in R\}$ 为区间数,其中 \underline{a} 和 \bar{a} 分别为区间数的下界和上界.当 $\underline{a} = \bar{a}$ 时,区间 $A = [a, a]$ 为一实数.

区间 A 也可以表示为 $A = \langle m(A), w(A) \rangle$, 其中 $m(A)$ 和 $w(A)$ 分别为区间 A 的中点和半宽,即

$$m(A) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \bar{a}), \quad (1)$$

$$w(A) = \frac{1}{2}(\bar{a} - \underline{a}). \quad (2)$$

下面给出区间多目标优化问题的一般描述^[9,11].不失一般性,以下均考虑最大化问题,有

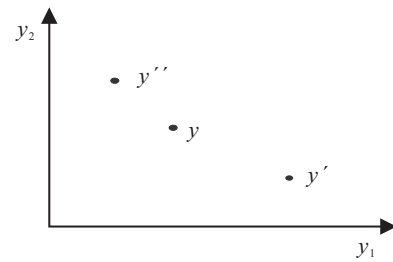
$$\max \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = (y_1(\mathbf{x}, \mathbf{c}), y_2(\mathbf{x}, \mathbf{c}), \dots, y_M(\mathbf{x}, \mathbf{c})).$$

$$\text{s.t. } x_n \in [\underline{x}_n, \bar{x}_n], n = 1, 2, \dots, N;$$

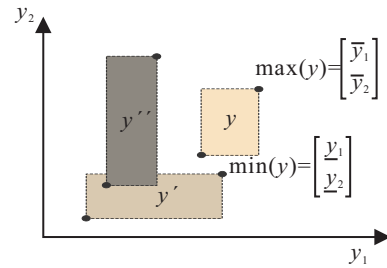
$$c_k \in [\underline{c}_k, \bar{c}_k], k = 1, 2, \dots, K. \quad (3)$$

其中:决策向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N$,第 n 个分量的上、下界分别为 \bar{x}_n 和 \underline{x}_n ;目标向量 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_M) \in \mathbf{R}^M$;区间参数 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_K)$,第 k 分量 c_k 的上、下界分别为 \bar{c}_k 和 \underline{c}_k .由于目标函数中含有区间参数,目标函数值 $y_m(m = 1, 2, \dots, M)$ 不再是一个精确值,而是区间值,记为 $y_m = [\underline{y}_m, \bar{y}_m]$, $m = 1, 2, \dots, M$.图 1 以两目标优化问题为例,对比了目标函数为精确值和区间值的情况^[1].区间两目标优化问题中,某个解的目标区间的直积可用相应矩形

区域表示,如图 1(b)所示.



(a) 目标值为精确值



(b) 目标值为区间值

图 1 目标值为精确值和区间值对比

2 基于模糊支配的多目标粒子群优化算法

区间多目标优化问题中,受区间不确定参数的影响,目标函数值不是精确值而是区间,因此求解区间多目标优化问题主要面临以下两个问题:

1) 比较解的优劣时,传统的 Pareto 支配关系不再适用,需要重新定义用于比较粒子(问题的候选解)之间优劣的 Pareto 支配关系;

2) 传统多目标优化算法中涉及目标值比较的算子不再适用,需要重新设计适用于含区间参数多目标优化问题的相关算子^[11].

下面主要针对以上两点阐述本文算法.

2.1 基于决策者悲观程度的模糊支配关系

区间多目标优化问题中,目标函数值为区间数,从而决策者在候选解中的选择不可避免地具有一定的主观性,即使对于同一对区间目标值,不同决策者仍可能有不同的偏好,因此有必要在优化过程中融入决策者的信息.文献[13]提出了一种基于决策者悲观程度的模糊区间数比较方法,本文在此基础上提出基于决策者悲观程度的模糊支配关系.

设 A 和 B 代表区间收益, $m(A) \leq m(B)$. 作如下假设:

- 1) 收益大优于收益小;
- 2) 不确定程度低优于不确定程度高;
- 3) 如果较大的收益与较高的不确定程度相关联,则决策者需要在二者之间折衷选择.

将区间对 (A, B) 划分为如下两个集合:

- 1) $\varphi_1 = \{(A, B) | m(A) \leq m(B), w(A) \geq w(B)\}$;

2) $\varphi_2 = \{(A, B) | m(A) \leq m(B), w(A) < w(B)\}$.

对于 $(A, B) \in \varphi_1$ 且 $A \neq B$, 由假设 1) 和假设 2) 可知, B 严格优于 A , 记为 $B > A$. 对于 $(A, B) \in \varphi_2$, 定义模糊集“拒绝 B ”, 记为 B' , 其隶属度函数为如下非线性函数:

$$\pi_{B'} = (\mu_{B'})^p, \mu_{B'} \in [0, 1]. \quad (4)$$

其中

$$\mu_{B'}(A) = \begin{cases} 1, & m(A) = m(B); \\ \max \left\{ 0, \frac{m(A) - (\bar{b} + w(A))}{m(B) - (\bar{b} + w(A))} \right\}, & m(B) \geq m(A) \geq \bar{b} + w(A); \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\mu_{B'}(A)$ 描述了 A 支配 B 的程度, 换言之, 若 $\mu_{B'}$ 接近 1, 则表示“拒绝 B ”的程度高, 接近 0 则表示程度低. p 为决策者悲观程度系数 (悲观程度反映决策者对待风险的态度, 例如低悲观程度或乐观型决策者承担风险的意愿强), 且 $p \in [(1/M), M]$, M 为一有限大数. $p = 1/M$ 代表决策者绝对悲观, 即从不承担风险. 若定义悲观程度为语言变量, 则 p 可能为 $\{\dots, \text{很低, 低, 适中, 高, 很高, } \dots\}$, 上述每个模糊语言相当于一个模糊集合, 对应不同的隶属度函数.

基于上述讨论, 给出如下模糊区间偏序关系定义.

定义 2 设区间 A 和 B 满足 $m(A) \leq m(B)$, 且 $w(A) \leq w(B)$, 则 A 以悲观程度 p 模糊优于 $B(A >_p B)$ 当且仅当模糊集“拒绝 B ”的隶属度函数 $\pi_{B'} > 0.666$ 或 $\pi_{A'} < 0.333$; 以悲观等级 p 模糊劣于 $B(A <_p B)$ 当且仅当 $\pi_{B'} < 0.333$ 或 $\pi_{A'} > 0.666$; A 与 B 以悲观等级 p 模糊相等或不可比较 ($A \parallel_p B$) 当且仅当 $0.333 \leq \pi_{B'} \leq 0.666$ 或 $0.333 \leq \pi_{A'} \leq 0.666$. $A >_F B$ 表示 A 模糊优于 B , 等价于 $A >_p B$ 或 $A > B$; $A \parallel_F B$ 表示 A 与 B 模糊相等, 等价于 $A \parallel_p B$ 或 $A = B$; $A <_F B$ 表示 A 模糊劣于 B , 等价于 $A <_p B$ 或 $A < B$.

对于区间对 (A, B) , 决策者由上述定义根据自身对待风险的态度作出选择, 如图 2 所示.

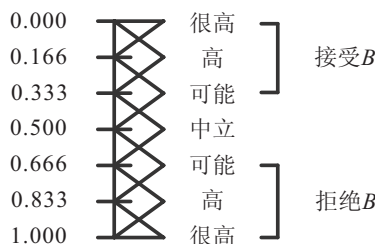


图 2 决策者偏好

下面进一步定义基于决策者悲观程度的模糊 Pareto 支配关系.

定义 3 设解 x_i 和 x_j 对应的第 m 个目标函数值

分别为区间数 $y_m(x_i)$ 和 $y_m(x_j)$, $m = 1, 2, \dots, M$, 则 x_i 模糊支配 $x_j(x_i >_F x_j)$ 当且仅当

$$y_m(x_i) >_F y_m(x_j) \vee y_m(x_i) \parallel_F y_m(x_j),$$

$$\forall m = 1, 2, \dots, M;$$

$$y_m(x_i) >_F y_m(x_j), \exists m \in \{1, 2, \dots, M\}. \quad (5)$$

2.2 适于区间目标的拥挤距离测度

拥挤距离^[14]用来度量粒子的密集程度, 利用其进行外部存储器的更新和领导粒子的选择有助于维护解的多样性, 保证所得 Pareto 最优前沿分布的均匀性. 然而, 以上拥挤距离测度仅适用于目标值为精确值的情况, 因此, 需要重新定义适用于区间目标的拥挤距离测度, 从而改进传统 MOPSO 中相关算子, 如外部存储器的更新、领导粒子的选择和粒子个体最好位置的更新. 文献 [15] 给出了一种新的适用于区间目标值的拥挤距离测度, 然而, 这种计算方法未将解对应的 (超) 立方体的体积或区域的面积考虑在内. 这里, 本文重新给出适用于区间目标的拥挤距离计算方法.

首先, 对于某一维目标空间 (假设为第 m 维目标空间), 按目标值中点大小对外部存储器中的粒子进行排序. 对于第 i 个粒子 x_i ($i = 1, 2, \dots, |\text{Rep}|$), 如果其是目标空间的边界点, 即 $i = 1$ 或 $i = |\text{Rep}|$, 则 x_i 的拥挤距离值为 ∞ , 从而保证边界解均能被保留在外部存储器中; 否则, x_i 的拥挤距离值定义为与其相邻的两个解 x_{i-1} 和 x_{i+1} 之间距离之和, 有

$$CD(x_i) = D(x_{i-1}, x_i) + D(x_i, x_{i+1}), \quad (6)$$

其中

$$D(x_i, x_j) = \frac{\sum_{m=1}^M d(f_m(x_i), f_m(x_j))}{V(x_i) + V(x_j) + 1},$$

$$j = i \pm 1, \quad (7)$$

$f_m(x_i) = [\bar{f}_m(x_i), \underline{f}_m(x_i)]$ 和 $f_m(x_j) = [\bar{f}_m(x_j), \underline{f}_m(x_j)]$ 分别为 x_i 和 x_j 在第 m 个目标函数上的目标区间, $d(A, B)$ 为区间 $A = [\bar{a}, \underline{a}]$ 与 $B = [\bar{b}, \underline{b}]$ 之间的距离, 且

$$d(A, B) = \sqrt{\frac{(\bar{a} - \bar{b})^2 + (\underline{a} - \underline{b})^2}{2}}, \quad (8)$$

$V(x_i)$ 和 $V(x_j)$ 分别为 x_i 和 x_j 对应 (超) 立方体体积或矩形区域面积. 由式 (7) 可知, $f_m(x_i)$ 与 $f_m(x_j)$ 之间距离越大, 重合程度越小, $D(x_i, x_j)$ 越大; $V(x_i)$ 和 $V(x_j)$ 越小, $D(x_i, x_j)$ 越大, 反之也成立.

2.3 FD-MOPSO 算法步骤

FD-MOPSO 算法的具体描述如下.

Step 1: 设置算法参数.

Step 2: 初始化粒子群, 对每个粒子, 确定其初始位置和初始速度, 粒子的初始自身最好位置 p_{best} 设

置为粒子本身.

Step 3: 计算粒子群中各粒子的目标向量, 根据模糊支配关系, 将其中的非劣解放入外部存储器 Rep 中.

Step 4: 为各粒子选择领导粒子. 采用第 2.2 节中拥挤距离值的计算方法计算 Rep 中各粒子的拥挤距离值, 并进行降序排列, 将拥挤距离值排在前 10% 的粒子作为候选领导粒子, 粒子群中每个粒子从中随机选择一个粒子作为自己的领导粒子 g_{best} .

Step 5: 根据 PSO 的基本公式更新粒子位置和速度, 并进行变异操作^[16].

Step 6: 计算新粒子群中每个粒子的目标向量.

Step 7: 更新粒子的自身最好位置.

Step 8: 更新外部存储器, 当存入新支配粒子和删除被支配粒子后, 若 Rep 中最优粒子数超过最大容量 N_r , 则采用第 2.2 节中拥挤距离值的计算方法计算 Rep 中各粒子的拥挤距离值, 裁剪拥挤距离值较小的粒子.

Step 9: 若达到最大迭代次数, 则转至 Step 10, 否则转至 Step 4.

Step 10: 输出外部档案中的 Pareto 最优解作为最终解.

3 实验分析

为了验证所提出算法的有效性, 进行两组实验: 第 1 组实验考查不同 p 取值对算法性能的影响; 第 2 组实验比较本文算法与典型区间多目标优化算法 IP-MOEA 和区间多目标粒子群优化算法 PD-MOPSO. 3 种算法的参数设置为: 对于 FD-MOPSO, 粒子群规模为 30, 惯性权重为 0.6, 学习因子皆为 1.8, 外部存储器容量为 20, 最大迭代次数为 200; 对于 IP-MOEA, 群体规模为 20, 进化代数为 100, 交叉概率为 0.9, 变异概率为 0.1; 对于 PD-MOPSO, 采用文献 [11] 中的参数设置. 第 2 组实验中的决策者悲观程度系数取为 4.

3.1 性能测度

本文采用以下 3 种性能指标, 从收敛性、多样性和精确性 3 个方面评价所提出 FD-MOPSO 算法的性能:

1) IC 测度是 C 测度^[17]在区间多目标优化问题中的推广, 用来评价算法的收敛性, 定义为

$$IC(A, B) = \frac{|\{b \in B | \exists a \in A, a \succ_F b \vee a = b\}|}{|B|}. \quad (9)$$

$IC(A, B) = 1$ 表示集合 B 中的解完全被集合 A 中的解支配; $IC(A, B) = 0$ 表示集合 B 中没有解被集合 A 中的任何解支配; IC 越大, 表示集合 B 的受支配程度越大, 反之则越小.

2) ISP 测度是 SP 测度^[18]在区间多目标优化问题

中的推广, 用来评价解集的多样性, 定义为

$$ISP = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{D} - D_i)^2}. \quad (10)$$

其中

$$D_i = \min_j \{D(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) | i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j\},$$

$$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i,$$

n 为非劣解的个数. ISP 值越小, 非劣解分布越均匀; $ISP = 0$ 表示所得非劣解完全均匀地分布在目标空间中.

3) I 测度^[1]用来反映所求解集的不确定程度. 对于两目标优化问题, I 测度量度所有非劣解对应区域面积之和, I 测度的值越小, 非劣解集的不确定程度越低、越精确.

3.2 p 取值对算法性能的影响

以 FON 函数为例, 分析 p 的取值对 FD-MOPSO 算法性能的影响. 表 1 给出了不同 p 取值下算法运行 30 次得到的平均实验结果, 其中 I 测度的值均为目标值归一化后的结果. 分析可得以下结论:

1) 当 p 取较大值时, 算法所得解的多样性较好. 当 $p = 1/4$ 时, 所得解集的 ISP 值为 0.0469; 当 $p = 4$ 时为 0.0405.

2) 当 p 取较大值时, 用于外部存储器更新操作的非劣解个数较多, 所需代价较大, 算法运行时间较长. 当 $p = 1/4$ 时, 算法用于外部存储器更新的非劣解个数为 2320, 算法运行时间为 11.0790 s; 当 $p = 4$ 时算法用于外部存储器更新的非劣解个数为 2784, 算法运行时间为 14.4840 s.

3) 当 p 取较大值时, 算法所得结果的不确定程度较高. 由图 3 可见, 随着 p 增大, 所得区间目标值的面积和增大, 反映了所得结果不确定程度的增大. 表 1 中 I 测度的值随着 p 的增大而增大, 进一步证实了这一点.

表 1 p 取值对 FD-MOPSO 性能的影响

	$p = 1/4$	$p = 1/2$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 4$
ISP 测度	0.0469	0.0447	0.0435	0.0420	0.0405
I 测度	0.0139	0.0376	0.0607	0.1011	0.1329
算法运行时间	11.0580	12.0060	12.7550	13.9080	14.4840

3.3 算法的性能比较

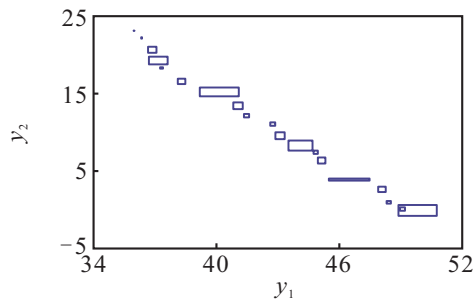
与 IP-MOEA^[1]和 PD-MOPSO^[11]进行比较, 以验证本文算法的有效性. 表 2 和表 3 分别给出利用 3 种算法对不确定 KUR 和 ZDT3 进行 30 次优化所得的平均结果. 对于不确定 KUR, 对比所得 IC 测度的结果可知, 本文算法和其他两种算法所得结果之间受支配的

表 2 采用 3 种算法优化不确定 KUR 的结果

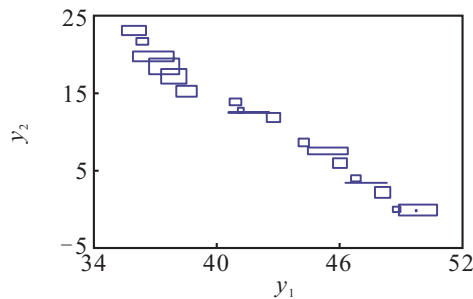
算法	IC 测度			ISP 测度	I 测度
	IC (FD-MOPSO,*)	IC (PD-MOPSO,*)	IC (IP-MOEA,*)		
FD-MOPSO	—	0.283 2	0.247 8	0.540 1	0.080 6
PD-MOPSO	0.287 7	—	0.229 3	0.884 2	0.105 1
IP-MOEA	0.260 5	0.256 8	—	0.931 6	0.131 1

表 3 采用 3 种算法优化不确定 ZDT3 的结果

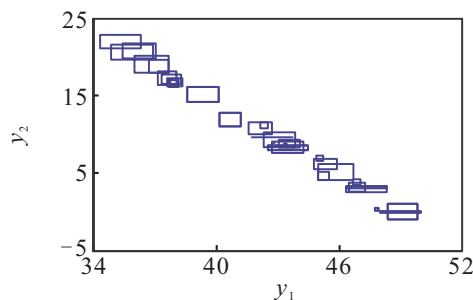
算法	IC 测度			ISP 测度	I 测度
	IC (FD-MOPSO,*)	IC (PD-MOPSO,*)	IC (IP-MOEA,*)		
FD-MOPSO	—	0.057 5	0.040 1	0.062 3	0.059 8
PD-MOPSO	0.577 8	—	0.065 6	0.163 1	0.060 9
IP-MOEA	0.666 7	0.301 3	—	0.157 4	0.101 2



(a) FD-MOPSO 结果



(b) PD-MOPSO 结果

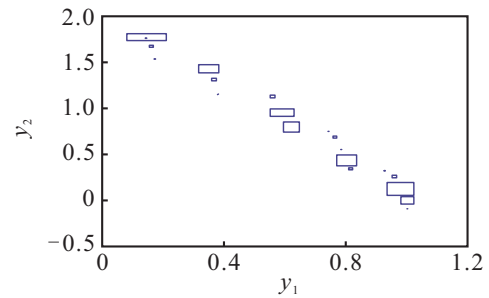


(c) IP-MOEA 结果

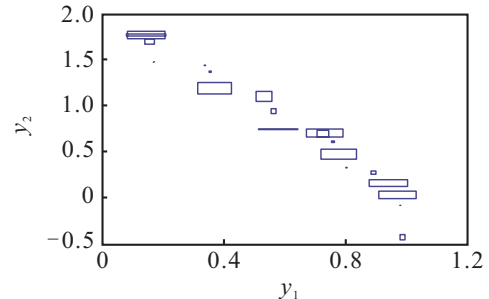
图 3 采用 3 种算法优化不确定函数 KUR 所得 Pareto 前沿

程度相差不大; 对于 ISP 和 I 测度, 本文算法所得平均值皆优于 IP-MOEA 和 PD-MOPSO. 对于 ZDT3, 本文算法以 0.5 以上的概率支配其他两种算法, 因此在收敛性方面的优势较为明显; 对于 I 测度, 本文算法所得结果与 PD-MOPSO 相当, 优于 IP-MOEA; 对于 ISP 测度, 本文算法所得结果优于其他两种算法. 为了进一步比较性能, 图 3 和图 4 分别给出了 3 种算法优化不确定 KUR 和 ZDT3 所得的 Pareto 最优前沿.

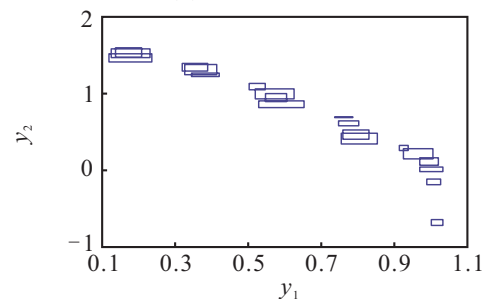
由图 3 和图 4 可见, 与其他两种算法相比, FD-



(a) FD-MOPSO 结果



(b) PD-MOPSO 结果



(c) IP-MOEA 结果

图 4 采用 3 种算法优化不确定函数 ZDT3 所得 Pareto 前沿

MOPSO 展现出良好的性能, 导致其优越性的主要原因有如下两点: 1) 合理的区间序关系定义. 区间序关系的定义决定解的支配关系的定义, 从而影响解的比较. IP-MOEA 中不精确 Pareto 支配关系的定义过于简单, 因此导致结果具有较大的不确定性. 2) 有效的外部存储器更新机制和领导粒子选择策略. PD-MOPSO 在进行外部存储器更新和领导粒子选择时, 未充分考虑外部存储器中粒子的分布情况, 从而导致最优解的多样性较差.

4 结 论

本文结合决策者信息求解区间多目标优化问题,运用模糊集理论,定义了模糊支配关系,改进了传统多目标粒子群优化算法中的相关算子,提出了一种基于模糊支配的多目标粒子群优化算法.选择3个区间多目标测试函数作为测试对象,并与其他两种区间多目标优化算法进行比较.结果表明,所提出的算法在求解区间多目标优化问题上更为有效.

参考文献(References)

- [1] Philipp L, Daniel E S. An optimization algorithm for imprecise multi-objective problem functions[C]. Proc of IEEE Congress on Evolutionary Computation. Munich: IEEE Press, 2005: 459-466.
- [2] Kao C, Liu S T. Linear programming with interval data: A two-level programming approach[M]. Optimization, Simulation and Control. New York: Springer, 2013: 63-77.
- [3] Luo J, Li W, Wang Q. Checking strong optimality of interval linear programming with inequality constraints and nonnegative constraints[J]. J of Computational and Applied Mathematics, 2014, 260: 180-190.
- [4] Borza M, Rambely A, Saraj M. Solving linear fractional programming problems with interval coefficients in the objective function: A new approach[J]. Applied Mathematical Sciences, 2012, 6(69): 3443-3452.
- [5] Huang G H, Cao M F. Analysis of solution methods for interval linear programming[J]. J Environ Inform, 2011, 17(2): 54-64.
- [6] 常志朋,程龙生,刘家树.基于马田系统与TOPSIS的区间数多属性决策方法[J].系统工程理论与实践,2014,34(1): 168-175.
(Chang Z P, Cheng L S, Liu J S. Multiple attribute decision making method with intervals based on Mahalanobis-Taguchi system and TOPSIS method[J]. Systems Engineering - Theory and Practice, 2014, 34(1): 168-175.)
- [7] Philipp L. Multi-objective optimization of problems with epistemic uncertainty[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3410: 413-427.
- [8] Sahoo L, Bhunia A K, Kapur P K. Genetic algorithm based multi-objective reliability optimization in interval environment[J]. Computers & Industrial Engineering, 2012, 62(1): 152-160.
- [9] 孙靖,巩敦卫,季新芳.基于偏好方向的区间多目标交互进化算法[J].控制与决策,2013,28(4): 542-546.
(Sun J, Gong D W, Ji X F. Interactive evolutionary algorithms for interval multi-objective optimization problems based on preference direction[J]. Control and Decision, 2013, 28(4): 542-546.)
- [10] Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization[C]. Proc of IEEE Int Conf on Neural Networks. Perth: IEEE Press, 1995: 1942-1948.
- [11] 张勇,巩敦卫,郝国生,等.含区间参数多目标系统的微粒群优化算法[J].自动化学报,2008,34(8): 921-928.
(Zhang Y, Gong D W, Hao G S, et al. Particle swarm optimization for multi-objective systems with interval parameters[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(8): 921-928.)
- [12] Lodwick W A, Jamison K D. Special issue: Interfaces between fuzzy set theory and interval analysis[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 135(1): 1-3.
- [13] Sengupta A, Pal T K. On comparing interval numbers[J]. European J of Operational Research, 2000, 127(1): 28-43.
- [14] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.
- [15] 张勇.区间多目标优化问题的微粒群优化理论及应用[D].徐州:中国矿业大学信息与电气工程学院,2009.
(Zhang Y. Theory of particle swarm optimization for interval multi-objective optimization problems and applications[D]. Xuzhou: School of Information and Electronic Engineering, China University of Mining and Technology, 2009.)
- [16] Pham M T, Zhang D, Koh C S. Multi-guider and cross-searching approach in multi-objective particle swarm optimization for electromagnetic problems[J]. IEEE Trans on Magnetics, 2012, 48(2): 539-542.
- [17] Zitzler E, Deb K, Thiele L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results[J]. Evolutionary Computation, 2000, 8(2): 173-195.
- [18] Schott J R. Fault tolerant design using single and multicriteria genetic algorithm optimization[D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1995.

(责任编辑:郑晓蕾)