

## 基于云发生算法的犹豫语言多准则决策方法

杨恶恶<sup>1,2,4</sup>, 王坚强<sup>3</sup>, 马超群<sup>2</sup>, 汪新凡<sup>3</sup>

(1. 中南林业科技大学 经济学院, 长沙 410004; 2. 湖南大学 工商管理学院, 长沙 410082; 3. 中南大学 商学院, 长沙 410083; 4. 创新型企业风险管理与控制技术湖南省工程实验室, 长沙 410004)

**摘要:** 犹豫语言集比传统语言变量能更好地表示不确定决策信息, 但因其具有非均匀和离散的特点, 使用时难以找到对应的解析词运算规则和比较方法. 对此, 利用云模型的云滴生成算法, 通过数值模拟方法解决犹豫语言信息的运算与比较问题, 提出了相应的多准则决策方法, 并通过算例分析了其有效性.

**关键词:** 多准则; 犹豫模糊; 云模型; 蒙特卡洛模拟

中图分类号: C934

文献标志码: A

### Hesitant linguistic multiple criteria decision making method based on cloud generating algorithm

YANG Wu-e<sup>1,2,4</sup>, WANG Jian-qiang<sup>3</sup>, MA Chao-qun<sup>2</sup>, WANG Xin-fan<sup>3</sup>

(1. School of Economics, Central South University of Forestry and Technology, Changsha 410004, China; 2. School of Business Administration, Hu'nan University, Changsha 410082, China; 3. School of Business, Central South University, Changsha 410083, China; 4. Hu'nan Provincial Engineering Laboratory of Risk Management and Control Techniques for the Innovative Enterprises, Changsha 410004, China. Correspondent: YANG Wu-e, E-mail: yangwue@gmail.com)

**Abstract:** Hesitant linguistic fuzzy term sets express uncertain decision information better than original linguistic variables. However, since such sets are heterogeneous and discrete, the related comparing method and analytic word-computing operations are hard to be found. Therefore, by using the algorithm for generating cloud drops, the hesitant linguistic information can be operated and compared through the numerical simulation. A multi-criteria decision-making method is proposed accordingly. A numerical example shows the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** multiple criteria; hesitant fuzzy; cloud model; Monte Carlo simulation

## 0 引言

在多准则决策问题中, 采用语言变量来表达决策信息更为方便实用<sup>[1]</sup>. 所谓语言变量<sup>[1]</sup>是指一种结构化的语言信息, 为一个先行决定了语义的句子或词. 若干个语言变量通常按偏好顺序排列为一个有序的语言标度<sup>[2]</sup>. 在实际表达决策信息时, 决策者对方案在不同准则下的表现的评价可能会在标度中多个离散语言变量之间犹豫, 这种类型的语言信息被称为犹豫语言信息, 可以通过犹豫语言集 (hesitant fuzzy linguistic term set)<sup>[3]</sup>加以表示.

随之带来两个困难: 1) 如何比较犹豫语言信息; 2) 如何在保证信息不丢失的情况下对犹豫语言信息

加以操作. 这两点困难产生的主要原因是犹豫语言信息的离散与非均匀特性限制了利用解析手段对其进行处理. 现有研究主要采用模糊包络技术<sup>[3-4]</sup>将犹豫语言集退化为语言区间进行区间运算与比较, 这种转化牺牲了犹豫语言信息的离散特征, 可能会导致信息丢失.

本文尝试将犹豫语言集转化为云模型<sup>[5]</sup>来解决上述困难. 该模型在将定性概念转化为定量表示的过程中, 能有效地同时处理定性概念中所蕴含的随机与模糊两种主要的不确定性<sup>[5]</sup>, 其理论被成功地扩展到诸多领域<sup>[6-8]</sup>. 更重要的是, 云模型具有一个显著的优点: 由于它将定性概念向定量信息的转化采用生成云

收稿日期: 2013-12-25; 修回日期: 2014-07-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71401185); 教育部人文与社会科学基金项目(13YJC630200); 中国博士后科学基金项目(2014M552135); 湖南省自然科学基金项目(14JJ4050).

作者简介: 杨恶恶(1979—), 男, 讲师, 博士后, 从事风险管理与决策分析的研究; 王坚强(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与方法等研究.

滴来实现,除更加直观外,这种转换方式尤其适合离散信息的数值模拟需要,从而能够解决一些用解析手段无法处理的问题.显然,云模型同样适合于处理犹豫语言信息.

针对准则值为犹豫语言集的多准则决策问题,本文设计一组云发生算法,首先将犹豫语言评价信息转化为云模型加以表示和操作;在此基础上,将方案在不同准则下的评价集成为方案综合评价云,准则权重通过云滴相对数量加以体现.利用这组算法,通过蒙特卡洛模拟<sup>[9]</sup>生成各方案综合评价云的云滴并加以统计,然后按照统计结果对各方案进行排序比较并做出决策.

## 1 云模型及犹豫语言集

**定义 1** 设  $T$  是与论域  $X$  相联系的定性概念,  $X$  中的元素  $x$  对  $T$  所表达的定性概念的隶属度  $\mu_T(x)$  是一个具有稳定倾向的随机数,该隶属度在论域上的分布称为隶属云,简称云,即  $\mu_T: X \rightarrow [0, 1], \forall x \in X, x \rightarrow \mu_T(x)$ <sup>[5]</sup>.

**定义 2** 利用云的数字特征,通过特定的算法对定性概念所进行的一次随机的数值转化结果称为一颗云滴,一颗云滴中包含了论域  $X$  中的一个元素  $x$  和该元素在此次转换中对概念  $T$  的隶属度  $y$ ,记为  $(x, y)$ ,其中  $x \in X, y \in [0, 1]$ <sup>[5]</sup>.

**定义 3** 当云的随机隶属度在其对应论域上的分布具有正态分布特征时,称其为正态云.正态云可以通过 3 个对应的数字特征加以刻画,即期望  $Ex$ ,熵  $En$  和超熵  $He$ .其中:期望  $Ex$  是定性概念在对应数值论域的中心值,熵  $En$  是定性概念模糊度的度量,超熵  $He$  反映了云滴的离散程度及隶属度的随机性变化.一朵正态云  $Y$  可以表示为  $Y = (Ex, En, He)$ <sup>[5]</sup>.

**定义 4** 对于云滴  $(x, y)$ ,称  $s = xy$  为该云滴对概念  $T$  的一次计分. $s$  的数学期望  $\hat{s}$  (或二分位数  $s_{mid}$ ) 称为云对概念的总计分.对于同一论域中的任意两朵云  $Y_1$  与  $Y_2$ ,当所对应的总计分  $\hat{s}_1 \geq \hat{s}_2$  (或  $s_{mid1} \geq s_{mid2}$ ) 时,称  $Y_1$  大于等于  $Y_2$ ,记为  $Y_1 \geq Y_2$ <sup>[8]</sup>.

**定义 5** 有序语言标度  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_g\}$  为  $g$  个有序语言项的集合.其中  $s_a < s_b$  当且仅当  $a < b, a, b \in \{1, \dots, g\}$ <sup>[2]</sup>.本文中采用的 5 项语言标度为  $S = \{s_1: \text{很差}, s_2: \text{差}, s_3: \text{一般}, s_4: \text{好}, s_5: \text{很好}\}$ .

**定义 6** 犹豫语言集  $H_S$  是有序语言标度  $S$  的子集,即为  $S$  中有限个语言项的集合. $H_S$  中包含语言项的个数表示为  $n(H_S)$ <sup>[3]</sup>.

## 2 犹豫语言集转化为云的生成算法

大部分模糊概念用正态隶属函数刻画最接近人类思维<sup>[5]</sup>,因此可将语言变量转化为正态云模型,并

通过语言标度的结构特征来估计这一转化过程中的参数.在此基础上,设计将犹豫语言集转化为对应云模型的算法.

### 2.1 正态云发生算法

文献 [5] 中提出的正态云发生算法如下.

输入: 正态云  $Y = (Ex, En, He)$  的数字特征  $(Ex, En, He)$  和云滴数  $N$ ;

输出:  $N$  个云滴的定量值以及每个云滴所代表的概念确定度.

**Step 1:** 生成以  $En$  为期望、 $He$  为标准差的正态随机数  $En'$ ;

**Step 2:** 生成以  $Ex$  为期望、 $abs(En')$  为标准差的正态随机数  $x$ ;

**Step 3:** 计算  $y = \exp(-((x - Ex)/En')^2)$ , 该值反映了  $x$  属于所表示概念的确定度;

**Step 4:**  $(x, y)$  完整地反映了一次定性转换的全部内容,形成一颗云滴;

**Step 5:** 重复上述步骤,直到产生  $N$  颗云滴.

### 2.2 单个语言项到正态云的转化

如果语言项  $s_k$  所反映的定性概念与给定论域上的一朵正态云  $Y_k = (Ex_k, En_k, He_k)$  相对应 ( $k = 1, 2, \dots, g$ ), 则整个有序语言标度转化为一组给定论域上的正态云,所有的语言项构成了该论域的一个划分.为便于描述,可将该论域定义为  $[0, g + 1]$  区间.这样,当认为语言标度是均匀分布时,可令  $Ex_k = k$ , 此时,每个语言项所对应的云应具有类似的形状,有  $En_k = En, He_k = He, k = 1, 2, \dots, g$ .

由于所有的语言项构成了论域的一个划分,用以表示各语言项的所有云滴应能覆盖整个论域,则每个语言项  $s_k$  所对应的云滴元素  $x$  至少要覆盖区间  $[k - 0.5, k + 0.5]$ ; 而由 2.1 节中的云发生算法可知,当  $x = Ex_{k+1} = k + 1$  时对于概念  $s_{k+1}$  的隶属度为 1, 即该元素必然隶属于概念  $s_{k+1}$ . 因此,概念  $s_k$  的云滴在统计意义上其绝大部分应处于区间  $[k - 1, k + 1]$  内.

根据正态分布的  $\sigma$  原则,概念  $s_k$  所对应的云滴应有 95% 以上处于区间  $[k - 2\sigma, k + 2\sigma]$  内.据前所述,该区间最窄可至  $[k - 0.5, k + 0.5]$ , 最宽可至  $[k - 1, k + 1]$ , 因此  $2\sigma$  的取值应在  $[0.5, 1]$  内; 根据云模型理论,  $\sigma$  本身服从以  $En$  为期望、 $He$  为标准差的正态分布, 因此,  $2\sigma$  的 0.95 置信区间为  $[2(En - 2He), 2(En + 2He)]$ . 该区间应与前述  $[0.5, 1]$  近似相等, 可解得  $En = 0.375, He = 0.0625$ .

图 1 给出了语言项  $s_k$  到正态云的转化及各种参数设定示意.

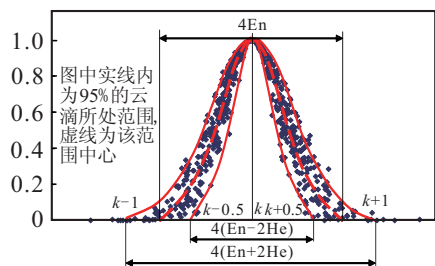


图 1 语言变量  $s_k$  所对应的正态云

### 2.3 犹豫语言集到云的转化

犹豫语言集  $H_S = \{s_k | s_k \in S\}$  可视为  $n(H_S)$  个离散语言项的并集, 表示这些语言项所对应定性概念的加总. 例如, {好, 很好} 表示对方案的评价为“好或者很好”. 将犹豫语言集转化为云的生成算法如下.

输入: 犹豫语言集  $H_S = \{s_k | s_k \in S\}$ , 云滴数  $N$  及  $H_S$  中各语言项所对应的正态云  $Y_k = (Ex_k, En_k, He_k)$  的数字特征  $Ex_k$ 、 $En_k$ 、 $He_k$ ;

输出:  $N$  颗云滴的定量值以及每颗云滴对  $H_S$  所表示概念的隶属度.

Step 1: 分别生成以  $En_k$  为期望、 $He_k$  为标准差的  $n(H_S)$  个正态随机数  $En'_k$ ;

Step 2: 按照等概率分布函数  $P(k) = 1/n(H_S)$ , 随机选择  $\hat{k} \in \{k | s_k \in H_S\}$ ;

Step 3: 生成以  $Ex_{\hat{k}}$  为期望、 $abs(En'_{\hat{k}})$  为标准差的正态随机数  $x$ ;

Step 4: 计算  $n(H_S)$  个  $y_k$ , 即

$$y_k = \exp(-((x - Ex_k)/En'_k)^2);$$

Step 5: 计算  $y = \max y_k$ , 该值反映了  $x$  对  $H_S$  所表示概念的隶属度;

Step 6:  $(x, y)$  完整地反映了一次定性转换的全部内容, 形成一颗云滴;

Step 7: 重复 Step 1 ~ Step 6, 直到产生  $N$  颗云滴.

图 2 显示了由 700 颗云滴组成的犹豫语言集 {差, 一般, 好} 所对应的云.

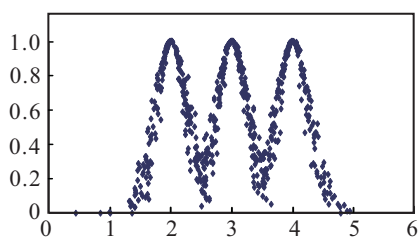


图 2 犹豫语言集所对应云

### 3 基于云发生算法的多准则决策方法

犹豫语言多准则决策问题可表述为: 有  $m$  个方案  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ,  $n$  个决策准则  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ , 对应的准则相对重要性权重向量为  $W = [w_1, w_2,$

$\dots, w_n]^T$ , 其中  $w_j \in [0, 1], \sum_{j=1}^n w_j = 1$ , 决策者所给出的评价矩阵为  $A = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$ ,  $\tilde{a}_{ij}$  是以犹豫语言集形式给出的评价信息, 用来确定方案的排序.

#### 3.1 方案综合评价云的生成

对方案的综合评价可以形成一朵云, 这朵云由大量的评价云滴聚集而成, 不同准则下的评价对应其中不同的云滴. 准则权重反映了不同准则在决策中的相对重要性, 可通过对应的云滴数量加以体现, 即权重大的准则下的评价将对应更多的云滴. 利用这一思路, 可生成方案的综合评价云, 并通过所生成云来比较方案的优劣. 方案  $a_i$  的综合评价云发生算法如下.

输入: 各准则  $c_j$  的权重  $w_j$ , 方案  $a_i$  在各准则下的犹豫语言评价  $\tilde{a}_{ij} (j=1, 2, \dots, n)$  和总云滴数  $N$ ;  
输出:  $N$  颗云滴.

Step 1: 调用 2.3 节中算法, 生成准则  $c_j$  下犹豫语言评价  $\tilde{a}_{ij}$  所对应的  $w_j N$  颗云滴;

Step 2: 重复上述过程, 直到产生所有准则下对应的总计  $N$  颗云滴.

例 1 两个决策准则  $c_1, c_2$  的权重分别为 0.85, 0.15. 方案  $a_i$  在两个准则下对应的评价分别为 {差, {一般, 好}. 图 3 显示了由 1000 颗云滴所组成的该方案综合评价云, 其中密集的部分为准则  $c_1$  下的评价云滴 (850 颗), 稀疏部分为准则  $c_2$  下的评价云滴 (150 颗).

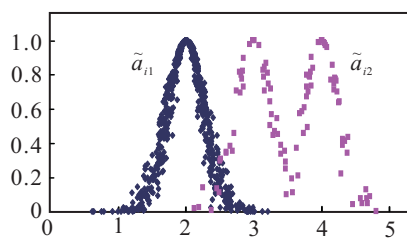


图 3 综合评价云

#### 3.2 综合评价云的比较

用定义 4 比较两朵云时, 由于  $s$  的分布往往不满足常见的概率分布形态, 通过解析的方法获得  $\bar{s}$  或  $s_{mid}$  非常困难. 根据蒙特卡洛模拟的思想, 可利用计算机程序借用云滴生成算法生成大量云滴 ( $N$  个) 作为样本, 计算其记分均值  $\bar{s} = \sum_{i=1}^N s_i / N$ , 估计  $\bar{s}$  对云的大小并加以比较 (或者利用样本的中位数  $s_m$  代替  $s_{mid}$ ).

#### 3.3 决策步骤

综上所述, 一个完整的犹豫语言多准则决策问题的求解包含以下步骤:

Step 1: 生成各方案的综合评价云;

Step 2: 统计各方案综合评价云中云滴的计分均值或计分中位数;

Step 3: 根据 Step 2 得出的计分均值或计分中位数按照降序对方案进行排序.

#### 4 算 例

某电子产品公司从 5 种可能的新技术方案中挑选其未来 2 ~ 3 年内的发展方向, 选取 4 个准则: 技术水平与适宜度 ( $c_1$ )、产品预期市场表现 ( $c_2$ )、后续可升级能力 ( $c_3$ ) 和可能投资成本 ( $c_4$ ) 对各方案进行评价. 由于决策者对各方案在每种准则下方案的表现评价具有极大的不确定性, 决策者根据自己的知识和经验给出的语言决策信息如表 1 所示, 即方案  $a_i$  在准则  $c_j$  下的准则值. 其中: VP 表示“很差”, P 表示“差”, F 表示“一般”, G 表示“好”, VG 表示“很好”; 准则权重向量  $W = [0.3, 0.3, 0.2, 0.2]$ .

表 1 决策信息

方案	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$a_1$	{P}	{G, VG}	{VG}	{P, F, G}
$a_2$	{F, G}	{F, G}	{VG}	{G}
$a_3$	{VP, P}	{VG}	{G, VG}	{P}
$a_4$	{F, G, VG}	{F, G, VG}	{G}	{VP, P, F}
$a_5$	{VG}	{G, VG}	{P, F}	{VP}

决策步骤如下.

Step 1: 生成方案  $a_1$  的综合评价云, 并利用蒙特卡洛模拟统计云滴计分均值. 按照综合评价云发生算法, 生成了由 50 000 颗云滴组成的评价云, 并对云滴的计分加以统计, 统计频数如图 4 所示. 可以看到, 该计分值不具有常见的分布形态.

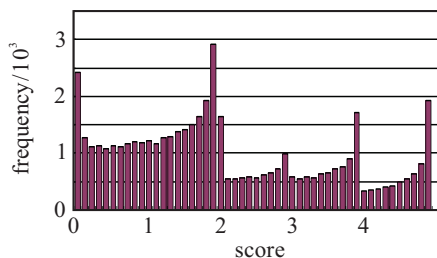


图 4 计分统计频数图

重复上述模拟 10 次, 得到了稳定的结果,  $\bar{s}_1$  和  $s_{m1}$  的均值分别为 2.13 和 1.88, 标准差分别为 0.008 和 0.007, 可用该均值对  $\hat{s}_1$ 、 $s_{mid1}$  进行估计.

Step 2: 类似地, 生成方案  $a_2 \sim a_5$  的综合评价云并进行模拟后统计. 表 2 给出了各方案的统计结果.

表 2 方案综合评价云总计分统计

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$\bar{s}_k$	2.13	2.34	1.92	2.22	2.12
$s_{m.k}$	1.88	2.45	1.58	2.14	1.81

Step 3: 按照  $\bar{s}$  降序对方案进行排序, 获得  $a_2 \succ$

$a_4 \succ a_1 \succ a_5 \succ a_3$ . 因此, 建议该公司选择方案  $a_2$ . 如果利用  $s_m$  对方案进行比较, 则结果也是一致的.

#### 5 结 论

本文将云模型应用于处理准则值为犹豫语言集的多准则决策问题. 通过所设计的云发生算法生成各方案综合评价云, 对云滴加以统计并对方案进行排序比较. 算例分析表明, 该方法能够有效地解决此类多准则决策问题. 由于现实决策中采用犹豫语言集能更方便地表示决策者的判断或偏好, 本文介绍的方法具有广泛的适用性. 但若准则权重也以犹豫语言方式给出, 则如何进行决策分析尚有待进一步研究.

#### 参考文献(References)

- [1] Zadeh L. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - I[J]. Information Sciences, 1975, 8(3): 199-249.
- [2] Martínez L, Herrera F. An overview on the 2-tuple linguistic model for computing with words in decision making: Extensions, applications and challenges[J]. Information Sciences, 2012, 207(1): 1-18.
- [3] Rodríguez R M, Martínez L, Herrera F. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2012, 20(1): 109-119.
- [4] Liu H, Rodríguez R M. A fuzzy envelope for hesitant fuzzy linguistic term set and its application to multicriteria decision making[J]. Information Sciences, 2014, 258(1): 220-238.
- [5] 李德毅, 刘常昱. 论正态云模型的普适性[J]. 中国工程科学, 2004, 6(8): 28-34.  
(Li D Y, Liu C Y. Study on the universality of the normal cloud model[J]. Engineering Science, 2004, 6(8): 28-34.)
- [6] Wang J Q, Wang P, Wang J, et al. Atanassov's interval-valued intuitionistic linguistic multi-criteria group decision-making method based on trapezium cloud model[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, DOI: 10.1109/TFUZZ.2014.2317500.
- [7] Wang S L, Li D R, Shi W Z, et al. Cloud mode-based spatial data mining[J]. Annals of GIS, 2003, 9(1/2): 60-70.
- [8] 王坚强, 杨恶恶. 基于蒙特卡罗模拟的直觉正态云多准则群决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(11): 2859-2865.  
(Wang J Q, Yang W E. Multiple criteria group decision making method based on intuitionistic normal cloud by Monte Carlo simulation[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2013, 33(11): 2859-2865.)
- [9] Binder K, Monte-Carlo Methods. Mathematical tools for physicists[M]. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2006: 249-280.

(责任编辑: 李君玲)