

多平衡点二维线性时不变切换系统的稳定性及镇定性

朱礼营, 方盈盈

(浙江师范大学 数理与信息工程学院, 浙江 金华 321004)

摘要: 研究含不稳定子系统的多平衡点二维线性时不变切换系统的稳定性和镇定性问题. 首先, 在每一子系统仅有唯一焦点或中心、不同子系统的平衡点互异的情形下, 确定含所有子系统平衡点的唯一特定区域, 据此给出系统区域稳定的概念; 然后, 基于区域稳定的定义, 利用解析法得到系统全局区域渐近稳定的简单判据, 并设计了全局区域渐近镇定控制器及其算法. 最后, 通过数值仿真算例表明了所得结果的有效性和易操作性.

关键词: 切换系统; 区域稳定; 区域镇定; 多平衡点; 算法

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Stability and stabilization of two-dimensional linear time-invariant switched systems with multi-equilibria

ZHU Li-ying, FANG Ying-ying

(College of Mathematics Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China. Correspondent: ZHU Li-ying, E-mail: lyzhu@zjnu.edu.cn)

Abstract: Stability and stabilization issues of two-dimensional linear time-invariant switched systems with unstable subsystems and multi-equilibria are investigated. Firstly, for the case that each subsystem has a unique focus or center and these equilibria are different from each other, a unique determined region containing all equilibria is defined, and a concept of region stability is given. Then, based on the region stability introduced, several simple criteria of global region asymptotical stability are proposed for such switched systems via the mathematical analysis method. Global asymptotical region stabilizing controls and corresponding algorithms are also designed for the systems. Finally, an illustrative example and its simulations demonstrate the effectiveness and practicality of the obtained stability and stabilization results.

Keywords: switched systems; region stability; region stabilization; multiple-equilibria; algorithm

0 引言

对于自然与工程控制的诸多实际系统^[1]都可以利用切换系统刻画其复杂的运行机制, 切换系统是控制理论和工程界研究的热点之一, 目前已取得了切换系统分析和设计的大量研究成果^[1-12]. 同时, 共同 Lyapunov 函数法^[4]、多重 Lyapunov 函数法^[3]、多重储能函数法^[5]和线性矩阵不等式^[6-7]等方法现已成为研究切换系统的主要方法. 但是, 现有文献中的切换系统分析和设计结果, 大都基于切换系统所有子系统拥有唯一零平衡点且均稳定的基本假设. 由于实际系统自身的复杂性和外部的不确定性, 切换系统的某些或全部子系统可能同时拥有多个互异平衡点且不稳定. 如, 在由多台发电机构成的二维切换电力系统中, 通常存在多个互异的平衡点. 当该系统运行异常时, 作为衡量系统电压崩溃的某一指标——不稳定的鞍点

便会出现. 事实上, 带有多平衡点和不稳定子系统的实际切换系统大量存在, 由于多平衡点切换系统的复杂性, 以及适用于共同平衡点切换系统分析和设计的常用方法一般难以适用, 对多平衡点切换系统的研究较为困难, 但是仍取得了一些结果^[8-9]. 以上结果仅适用于所有子系统皆稳定的切换系统, 对于带有不稳定子系统的多平衡点切换系统, 目前还较少有相关文献报道.

基于此, 本文研究带有不稳定子系统的多平衡点二维线性时不变切换系统区域稳定和区域镇定性问题. 当每一子系统仅有唯一焦点或中心、各平衡点互异且都位于同一条直线(即切换线)上时, 确定了唯一一个含所有平衡点的区域, 据此给出了系统区域稳定/镇定的概念. 基于该区域稳定定义, 利用分析法得到两个该类切换系统全局区域渐近稳定的简单判据;

收稿日期: 2014-02-26; 修回日期: 2014-10-08.

作者简介: 朱礼营(1972—), 男, 副教授, 从事切换系统、切换混杂 Hamilton 系统等研究; 方盈盈(1990—), 女, 硕士生, 从事切换系统的研究.

基于所得区域稳定的结论,设计了该类切换系统全局可区域渐近镇定的状态反馈控制器及其算法.数值仿真算例验证了所得结果的有效性和易操作性.

1 预备知识

考虑如下多平衡点二维切换线性控制系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}(x(t) - x_e^{\sigma(t)}) + B_{\sigma(t)}u, \\ x(t_0) &= x^{(0)}. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $t \geq t_0$, $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbf{R}^2$ 为状态, $u \in \mathbf{R}^2$ 为控制输入; 映射 $\sigma: [t_0, +\infty) \rightarrow \Lambda = \{1, 2, \dots, N\}$ 为分段右连续常值函数, 称为切换路径或切换法则, $N \geq 2$ 为正整数; 当 $\sigma(t) = i$ 时, 表明第 i 个子系统起作用, 且 $A_i = (a_{kli})_{2 \times 2} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ 为非奇异矩阵, $B_i = (b_{ki})_{2 \times 1} \in \mathbf{R}^{2 \times 1}$, a_{kli} 和 b_{ki} ($i, k, l = 1, 2$) 为常数; $x_e^i = [x_1^i, x_2^i]^T$ 为子系统 i 的唯一平衡点, 且平衡点互异. 当 $u \equiv 0$ 时, 系统 (1) 可改写为如下开环系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}(x(t) - x_e^{\sigma(t)}), \\ x(t_0) &= x^{(0)}. \end{aligned} \quad (2)$$

为了方便分析, 对于系统 (1) 和 (2), 仅考虑如下情形:

1) 所有平衡点 x_e^i 都位于同一条直线上,

$$l: x_2 = k(x_1 - x_1^1) + x_2^1 \quad (3)$$

上, 即 $x_e^i = [x_1^i, x_2^i]^T \in l, \forall i \in \Lambda$, 其中

$$\begin{aligned} k &:= \tan \alpha = \frac{x_2^2 - x_2^1}{x_1^2 - x_1^1}, \\ \alpha &= \arctan k. \end{aligned} \quad (4)$$

2) 式 (3) 表示的直线 l 为切换线, 即切换路径

$$\sigma(t) = i_m \in \Lambda, t \in [t_m, t_{m+1}), \forall m \in \mathbf{N} \quad (5)$$

的切换状态 $x^{(m)} := x(t_m) \in l, \forall m \in \mathbf{N} - \{0\}$, 除初始状态 $x^{(0)}$ 外的其他切换状态均位于 l 上, 其中 $\mathbf{N} := \{0, 1, \dots\}$. 记 $\{x^{(m)}\}$ 为切换状态序列, 与其对应的切换时间序列为 $\{t_m\}$.

假定:

- 1) 切换路径即切换线, 是平衡点 x_e^i 所在的直线 l ;
- 2) 系统 (1) 和 (2) 轨线在切换点处不发生跳跃;
- 3) 当时间充分大时, 每个子系统总起作用.

2 稳定性

本节研究系统 (2) 的稳定性. 仅考虑如下情形: 对于矩阵 A_i , 存在可逆矩阵 P_i , 使得

$$P_i A_i P_i^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}, \forall i \in \Lambda.$$

基于此, 系统 (2) 存在如下唯一区域:

$$\Omega_e := \{x \in \mathbf{R}^2 : \|x - x_e\| \leq 1.5r\}. \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} x_e &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_e^i, \\ r &:= \max_{i \neq j \in \Lambda} \{\| \max\{1, e^{|\beta_j| \pi}\} x_e^j - x_e^i \|\}. \end{aligned} \quad (7)$$

可见, 区域 Ω_e 包含所有子系统的平衡点 $x_e^i, \forall i \in \Lambda$.

对于上述区域 Ω_e , 给出系统 (2) 的区域稳定概念^[9].

定义 1 (区域稳定) 考虑系统 (2)、区域 Ω_e 和 $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2$:

1) 若 $\forall \varepsilon > 0$, 总存在 $\delta := \delta(\varepsilon) > 0$ 和 $T \geq t_0$, 使得对于每一 $x^{(0)}$ 和 $\forall t \geq T$, 有

$$\text{dist}(x^{(0)}, \Omega_e) \leq \delta \Rightarrow \text{dist}(x(t), \Omega_e) \leq \varepsilon, \quad (8)$$

则称系统 (2) 在切换路径 σ 下关于区域 Ω_e 区域稳定.

2) 若系统区域稳定且

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(x(t), \Omega_e) = 0, \quad (9)$$

则称系统 (2) 在切换路径 σ 下关于区域 Ω_e 区域渐近稳定.

3) 若系统不是区域稳定的, 则称系统 (2) 在切换路径 σ 下关于区域 Ω_e 区域不稳定, 其中

$$\text{dist}(x, \Omega_e) := \inf \{\|x - y\| : \forall y \in \Omega_e\},$$

若以上定义条件分别对 $\mathbf{D} = \mathbf{R}^2$ 成立, 则称系统 (2) 是全局区域稳定/渐近稳定/不稳定.

注 1 当定义 1 中的区域 $\Omega_e = \{x_e\}$, 即 $x_e^i = x_e$ ($\forall i \in \Lambda$) 时, 系统 (2) 区域稳定/渐近稳定/不稳定即为通常的 Lyapunov 稳定/渐近稳定/不稳定.

注 2 当定义 1 中的切换路径 σ 任意时, 称系统 (2) 在任意切换下关于 Ω_e 是区域稳定/渐近稳定/不稳定的.

注 3 由定义 1 可知, 区域稳定本质上刻画系统 (2) 轨线当时间趋于无穷时的极限状态, 所以系统 (2) 从区域 Ω_e 出发的轨线允许在某些有限时间内逃逸到区域 Ω_e 外部. 由此可知, 定义 1 中的区域 Ω_e 不等同于非切换系统的 ω 极限集或 La Salle 不变集, 也不等同于文献 [8] 中给出的集合稳定定义或结果中的集合或区域.

定理 1 考虑系统 (2) 和区域 Ω_e (见式 (6)), 若子系统的系数矩阵为

$$A_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}, \forall i \in \Lambda,$$

以直线 l (见式 (3)) 为切换线的切换路径为

$$\sigma(t) = i_v \in \Lambda, t \in [t_{Nk+v-1}, t_{Nk+v}). \quad (10)$$

其中: $N \geq 2, \forall k \in \mathbf{N}, \forall v \in \Lambda$. 则如下结论成立:

1) 若矩阵 A_i 中的 α_i 和 β_i 为满足

$$e^{\sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{|\beta_j|} \pi} + e^{\frac{\alpha_{i_1}}{|\beta_{i_1}|} \pi} \left(1 + \sum_{\tau=1}^{N-1} e^{\sum_{j=\tau+1}^N \frac{\alpha_{i_j}}{|\beta_{i_j}|} \pi} \right) \leq 1 \quad (11)$$

的常数, 则系统 (2) 关于区域 Ω_e 在形如式 (10) 的切换路径 $\sigma(t)$ 下是全局区域渐近稳定的;

2) 若对于 $\forall i \in \Lambda, \alpha_i < 0$, 且 α_i 和 β_i 满足

$$q^N - 2q^{N+1} + 2q \leq 1, \quad (12)$$

其中 $q = e^{\max_{i \in \Lambda} \{\frac{\alpha_i}{|\beta_i|}\} \pi}$, 则系统 (2) 关于区域 Ω_e 在形如式 (10) 的任意切换路径 $\sigma(t)$ 下是全局区域渐近稳定的.

证明 以 x_e^i 为极坐标原点, ρ_i 为极半径, 分别建立 N 个不同的极坐标系 $(\rho_i, \theta_i), \forall i \in \Lambda$, 其中 $\theta_i = 0$ 表示平行于 x_1 轴且与其方向相同的 N 条射线. 直角坐标系 (x_1, x_2) 与第 i 个极坐标系 (ρ_i, θ_i) 之间的坐标变换关系为

$$x_1 - x_1^i = \rho_i \cos \theta_i, \quad x_2 - x_2^i = \rho_i \sin \theta_i, \quad \forall i \in \Lambda.$$

据此可将系统 (2) 转化为

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{i_v}(t) = \alpha_{i_v} \rho_{i_v}(t), \quad \dot{\theta}_{i_v}(t) = -\beta_{i_v}, \\ \rho_{i_v}(t_{Nk+v-1}) = \rho_{i_v}^{(Nk+v-1)} \in l, \\ \theta_{i_v}(t_{Nk+v-1}) = \theta_{i_v}^{(Nk+v-1)}. \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} t &\in [t_{Nk+v-1}, t_{Nk+v}), \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad \forall v \in \Lambda, \\ \rho_{i_1}^{(0)} &:= \rho_{i_1}(t_0) = \|x^{(0)} - x_e^{i_1}\|, \\ \theta_{i_1}^{(0)} &:= \theta_{i_1}(t_0). \end{aligned}$$

对于 $\forall i \neq j \in \Lambda$, 有 $\beta_i \beta_j > 0$ 和 $\beta_i \beta_j < 0$. 不失一般性, 以下仅考虑 $\beta_i > 0$ 和 $\beta_j > 0$, 即所有子系统轨线都绕其平衡点 x_e^i 顺时针旋转, 其他情形类似可证. 此时, 在极坐标系下式 (13) 的切换状态序列可表示为 N 个子序列 $\{\rho_{i_v}^{(Nk+v)}\}, \forall v \in \Lambda$, 其关系为

$$\begin{cases} \rho_{i_{v+1}}^{(Nk+v)} = \\ \left\{ \begin{array}{l} \rho_{i_v}^{(Nk+v)} + r(i_v, i_{v+1}), \quad x^{(0)} \in \Omega_{i_v}^-; \\ |\rho_{i_v}^{(Nk+v)} - r(i_v, i_{v+1})|, \quad x^{(0)} \in \Omega_{i_v}^+. \end{array} \right. \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \rho_{i_1}^{(Nk+N)} = \\ \left\{ \begin{array}{l} \rho_{i_N}^{(Nk+N)} + r(i_N, i_1), \quad x^{(0)} \in \Omega_{i_N}^-; \\ |\rho_{i_N}^{(Nk+N)} - r(i_N, i_1)|, \quad x^{(0)} \in \Omega_{i_N}^+. \end{array} \right. \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad v = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$r(i, j) := \max\{1, e^{\frac{\alpha_j}{|\beta_j|} \pi}\} x_e^j - x_e^i,$$

$$\Omega_i^+ := \{x \in \mathbf{R}^2 : 0 < \angle(x - x_e^i, x_e^j - x_e^i) \leq \pi\},$$

$$\Omega_i^- := \{x \in \mathbf{R}^2 : \pi < \angle(x - x_e^i, x_e^j - x_e^i) \leq 2\pi\};$$

$\angle(x - x_e^i, x_e^j - x_e^i)$ 为以 x_e^i 为顶点以向量 $x_e^j - x_e^i$ 为始

边逆时针旋转至终边 $x - x_e^i$ 的角度, $\forall i \neq j \in \Lambda$.

因初态 $x^{(0)}$ 任意, 只需考虑以下两种情形.

情形 1 任意初态 $x^{(0)} \notin \Omega_e$. 此时, $x^{(0)} \in \Omega_{i_1}^+$ 或 $x^{(0)} \in \Omega_{i_1}^-$. 不失一般性, 以下仅考虑 $x^{(0)} \in \Omega_{i_1}^-$. 对于序列 $\{\rho_{i_v}^{(Nk+v)}\}$, 仅考虑

$$\rho_{i_v}^{(Nk+v)} > r, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad v = 1, 2, \dots, N, \quad (16)$$

其中 r 见式 (7); 否则, 可将证明归为情形 2.

利用分离变量法求解 ODE 方程 (13), 得到

$$\begin{cases} \rho_{i_v}(t) = \rho_{i_v}^{(Nk+v-1)} e^{\alpha_{i_v}(t - t_{Nk+v-1})}, \\ \theta_{i_v}(t) = \theta_{i_v}^{(Nk+v-1)} - \beta_{i_v}(t - t_{Nk+v-1}). \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} t &\in [t_{Nk+v-1}, t_{Nk+v}), \\ \forall k &\in \mathbf{N}, \quad \forall v \in \Lambda. \end{aligned}$$

由 $x^{(m)} \in l$ 可知

$$\begin{aligned} \theta_{i_v}^{(Nk+v)} - \theta_{i_v}^{(Nk+v-1)} &= -\pi, \\ 2 &\leq v \leq N, \quad k \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

利用式 (14)~(16) 对 (17) 逐次迭代, 可得

$$\begin{aligned} \rho_{i_v}^{(Nk+v)} &= \\ \rho_{i_1}^{(0)} e^{\frac{\alpha_{i_1}}{\beta_{i_1}} \bar{\theta}_0 + k \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} \pi} e^{\sum_{j=2}^v \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} \pi} + \\ \sum_{s=1}^k \sum_{\tau=1}^{N-1} r(i_\tau, i_{\tau+1}) e^{\left[\sum_{j=\tau+1}^N \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} + (k-s) \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} + \sum_{j=1}^v \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} \right] \pi} + \\ \sum_{s=1}^k r(i_N, i_1) e^{\left[(k-s) \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} + \sum_{j=1}^v \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} \right] \pi} + \\ \sum_{\tau=1}^{v-1} r(i_\tau, i_{\tau+1}) e^{\sum_{j=\tau+1}^v \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} \pi}, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad \forall v \in \Lambda. \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$\bar{\theta}_0 = \angle(x^{(0)} - x_e^{i_1}, x_e^{i_2} - x_e^{i_1}).$$

当 $s > k$ 时, 有 $\sum_s a_s = 0$.

对于 $\forall v \in \Lambda$ 和 $\forall k \in \mathbf{N}$, 由式 (11)、(16) 和 (18), 可得

$$\begin{aligned} &[\rho_{i_v}^{(Nk+v)} - \rho_{i_v}^{(N(k+1)+v)}] \times \\ &e^{-\left[k \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} + \sum_{j=2}^v \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} \right] \pi} = \\ &\rho_{i_1}^{(0)} e^{\frac{\alpha_{i_1}}{\beta_{i_1}} \bar{\theta}_0} \left(1 - e^{\sum_{j=1}^N \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} \pi} \right) - e^{\frac{\alpha_{i_1}}{\beta_{i_1}} \pi} \times \\ &\left[\sum_{\tau=1}^{N-1} r(i_\tau, i_{\tau+1}) e^{\sum_{j=\tau+1}^N \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} \pi} + r(i_N, i_1) \right] > \\ &r \left[1 - e^{\sum_{j=1}^N \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} \pi} - \right. \end{aligned}$$

$$e^{\frac{\alpha_{i_1}}{\beta_{i_1}}\pi} \left(1 + \sum_{\tau=1}^{N-1} e^{j=\tau+1} \sum_{j=\tau+1}^N \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} \pi \right) \geq 0. \quad (19)$$

由式(12)得到

$$q^N + (1-q)^{-1}q(1-q^N) \leq 1. \quad (20)$$

对于 $\forall k \in \mathbf{N}$ 和 $\forall v \in \Lambda$, 由式(19)、(20)、 $\alpha_i < 0$ ($\forall i \in \Lambda$) 和 $q = e^{\max_{i \in \Lambda} \{\frac{\alpha_i}{\beta_i}\}\pi}$, 得到

$$\begin{aligned} & [\rho_{i_v}^{(Nk+v)} - \rho_{i_v}^{(N(k+1)+v)}] e^{-[k \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} + \sum_{j=2}^v \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}}] \pi} > \\ & r \left[1 - e^{\sum_{j=1}^N \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} \pi} - e^{\frac{\alpha_{i_1}}{\beta_{i_1}} \pi} \left(1 + \sum_{\tau=1}^{N-1} e^{j=\tau+1} \sum_{j=\tau+1}^N \frac{\alpha_{i_j}}{\beta_{i_j}} \pi \right) \right] \geq \\ & r [1 - q^N - (1-q)^{-1}q(1-q^N)] \geq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

无论式(11)和(12)哪一个成立, 由式(19)或(21)

可知, 对于 $\forall v \in \Lambda$, 均有

$$\rho_{i_v}^{(Nk+v)} > \rho_{i_v}^{(N(k+1)+v)} > r, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (22)$$

即数列 $\{\rho_{i_v}^{(Nk+v)}\}$ 严格单调递减且有下界 r . 故由单调有界数列必有极限和反证法可以证明

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho_{i_v}^{(Nk+v)} = r, \quad \forall v \in \Lambda. \quad (23)$$

由条件(11)和(12)可知, $\beta_i \neq 0, \forall i \in \Lambda$. 对于 $\forall T_2 > T_1 \geq t_0$ 和 $\forall i \in \Lambda$, 总有

$$\rho_i(T_2) \leq \rho_i(t) \leq \rho_i(T_1), \quad \forall t \in [T_1, T_2], \quad (24)$$

或

$$\rho_i(T_1) \leq \rho_i(t) \leq \rho_i(T_2), \quad \forall t \in [T_1, T_2]. \quad (25)$$

从而, 由式(14)、(15)、(18)、(23)~(25), 可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\rho_{i_v}(t), \Omega_e) = 0, \quad 1 \leq v \leq N.$$

情形 2 任意初态 $x^{(0)} \in \Omega_e$. 此时有 $\rho_{i_1}^{(0)} \leq r$. 不失一般性, 仅考虑 $x^{(0)} \in \Omega_{i_1}^-$. 类似情形 1, 可得式(18)、(24)和(25)成立. 由式(12)和(18), 易得

$$\rho_{i_v}^{(Nk+v)} \leq r, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad \forall v \in \Lambda. \quad (26)$$

从而, 由式(14)、(15)、(18)、(24)和(26)可推知, 对于 $v = 1, 2, \dots, N, \forall k \in \mathbf{N}$, 有

$$\rho_{i_v}(t) \in \Omega_e, \quad \forall t \in [t_{Nk+v-1}, t_{Nk+v}), \quad (27)$$

即式(8)和(9)均成立, 故由定义 1 可知, 定理 1 的结论 2) 成立.

由于结论 1) 中的条件含有 $\alpha_i > 0$ 的情形, 在情形 2 下, 若存在某个时刻 \bar{t} , 使得式(27)不成立, 则系统在 $t \geq \bar{t}$ 时归结为情形 1. 由情形 1 的证明可知, 结论 1) 也成立. \square

推论 1 考虑系统(2)和区域 Ω_e , 若满足

$$e^{\frac{\alpha_i}{|\beta_i|}\pi} \leq 0.5, \quad \forall i \in \Lambda, \quad (28)$$

则系统(2)关于区域 Ω_e 在形如式(10)且以直线 l 为切换线的任意切换路径 $\sigma(t)$ 下均全局区域渐近稳定.

证明 由条件(28)可知, $\alpha_i < 0, \forall i \in \Lambda$, 从而有

$$q^N - 2q^{N+1} + 2q \leq 0.5^N - 2 \times 0.5^{N+1} + 1 = 1,$$

即满足式(12). \square

定理 2 考虑系统(2)和区域 Ω_e , 若存在非奇异矩阵 $P \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$, 使得

$$PA_iP^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} =: \bar{A}_i, \quad \forall i \in \Lambda, \quad (29)$$

其中 α_i 和 β_i 为满足定理 1 中结论 1) 或结论 2) 的所有条件的常数, 则系统(2)关于区域 Ω_e 在形如式(10)且以直线 l 为切换线的特定或任意切换路径下是全局区域渐近稳定的, 其中 Ω_e 和 l 分别见式(6)和(3).

证明 由定理条件可知, 存在同一可逆变换 $z = Px$, 将系统(2)转化为

$$\dot{z} = \bar{A}_\sigma(z - z_e^\sigma), \quad z = [z_1, z_2]^T \in \mathbf{R}^2. \quad (30)$$

其中: σ 为切换路径, $z_e^\sigma = Px_e^\sigma$ 为子系统平衡点, 系数矩阵 \bar{A}_σ 见式(29). 由非奇异坐标变换的性质可知, 系统(2)的稳定性等价于系统(30)的稳定性. \square

3 镇定性

对于切换控制系统(1)和区域 Ω_e , 给出区域镇定概念.

定义 2(区域镇定) 考虑切换控制系统(1)、形如式(6)的区域 $\Omega_e \subset \mathbf{D}$ 和定义域 $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2$, 称系统(2)在切换路径 σ 下关于区域 Ω_e 是可区域镇定/渐近镇定的, 若对于任意子系统 $i(i \in \Lambda)$, 至少存在一个状态反馈控制器 $u_i = -K_i(x - x_e^i)$, 使得闭环系统(1)在切换路径 σ 和状态反馈控制器 $u = -K_\sigma(x - x_e^\sigma)$ 下, 关于 Ω_e 区域稳定/渐近稳定, 其中 $K_i \in \mathbf{R}^2$ 为常数矩阵且 $\forall i \in \Lambda$. 进一步地, 若以上定义条件对于 $\mathbf{D} = \mathbf{R}^2$ 成立, 则称系统(1)是全局可区域镇定/渐近镇定的.

注 4 由定义 2 和共同平衡点的系统镇定性定义可知, 当 $x_e^i = x_e$ ($\forall i \in \Lambda$) 时, 定义 2 的系统可区域镇定转化为通常的系统可镇定, 且当定义 2 中的控制器 $K_i \equiv K$ ($\forall i \in \Lambda$) 时, 系统(1)存在共同可区域镇定状态反馈控制器 $u = -K(x - x_e^\sigma)$.

引理 1^[12] 切换控制系统(1)在任意切换路径下关于区域 Ω_e 完全可控的充要条件是

$$\text{Rank}(B_i : A_i B_i) = 2, \quad \forall i \in \Lambda. \quad (31)$$

定理 3 考虑系统(1)和区域 Ω_e , 若条件(31)满足, 且存在可逆矩阵 $P \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ 和 $2N$ 个常数 k_{1i}, k_{2i} , 使得对于 $\forall i \in \Lambda$ 均有

$$P(A_i - B_i K_i)P^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} =: \bar{A}_i. \quad (32)$$

其中: $K_i = [k_{1i}, k_{2i}]$, α_i 和 β_i 为满足定理 1 所有条件

的常数. 则系统(1)关于区域 Ω_e 在以直线 l 为切换线的特定或任意切换路径 σ 和状态反馈镇定控制器 $u = -K_\sigma(x - x_e^\sigma)$ 下是全局可区域渐近镇定的.

类似定理2的证明,根据定义2,由条件(32)和定理1中的相应条件可证定理3成立,此略.

基于定理3,结合文献[11]的算法,给出系统(1)的共同全局可区域渐近镇定控制器和切换路径算法如下.

Step 1: 从 \mathbf{R} 内取2个实数 k_1 和 k_2 ,组成 $K = [k_1 \ k_2]$,计算 $A_i - B_i K, i = 1, 2, \dots, N$.

Step 2: 利用文献[11]求出 N 个矩阵 $A_i - B_i K$ 的共同非奇异矩阵 P ,计算

$$P(A_i - B_i K)P^{-1} =: \bar{A}_i, \forall i \in N.$$

若所有矩阵 \bar{A}_i 都具有式(32)的形式,则转至Step 3,否则返回Step 1.

Step 3: 检验Step 2所得的 N 个矩阵 \bar{A}_i 中的元素 α_i 和 $\beta_i (i \in N)$ 是否满足定理1中的条件(11)或(12)或推论1中的条件(28).若满足,则转至Step 4;若否且重复返回次数少于某个给定的有限正整数次,则返回Step 1;若否且重复返回次数大于或等于某个给定的有限正整数次,则转至Step 5.

Step 4: 所求的共同全局渐近镇定控制器为

$$u = K(x - x_e^i),$$

其中 $K = [k_1 \ k_2]$.同时,所求的全局区域渐近镇定切换路径是以各平衡点所在直线为切换线的(任意)切换路径.

Step 5: 在给定的有限时间内,不能设计出相应的镇定控制器,算法结束.

注5 上述算法中Step 3所进行的有限步检验,其目的是使得算法程序不会陷于死循环.依据该算法,不一定能在有限步内得到所需共同镇定控制器.

4 数值仿真

考虑二维线性时不变切换控制系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_i(x - x_e^i) + B_i u, \quad x(0) = x^{(0)}, \\ i &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.5 & -2 \\ 5 & -6.5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$x_e^1 = [2, 1]^T, x_e^2 = [1, 2]^T, x_e^3 = [0, 3]^T$ 和 $x_e^4 = [3, 0]^T$ 为子系统的平衡点; $B_1 = [0, -1]^T, B_2 = [1, 0]^T, B_3 = [-1, 2]^T, B_4 = [1, 1]^T$; u 为控制输入.

由式(6)得到系统(33)的唯一区域

$$\Omega_e := \{x \in \mathbf{R}^2 : \|x - x_e\| \leq 8.8912\},$$

其中 $x_e = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_e^i = [1.5, 1.5]^T$.易验证系统(33)满足引理1中的条件(31),根据第4节的算法得到全局可区域渐近镇定的共同状态反馈控制器

$$u_i = -K(x - x_e^i), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

其中 $K = [-3 \ 7]$.可逆矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

使得矩阵 $\bar{A}_i := P(A_i - B_i K)P^{-1}$ 分别为

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0.5 & -2 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

据此可知系统(33)的平衡点 x_e^1 是不稳定的焦点, x_e^2 和 x_e^4 是稳定的焦点, x_e^3 是中心.分别取如下两条切换路径:

$$\sigma_1(t) = \begin{cases} 4, & t \in [t_{4k}, t_{4k+1}); \\ 3, & t \in [t_{4k+1}, t_{4k+2}); \\ 2, & t \in [t_{4k+2}, t_{4k+3}); \\ 1, & t \in [t_{4k+3}, t_{4k+4}). \end{cases}$$

$$\sigma_2(t) = \begin{cases} 2, & t \in [t_{4k}, t_{4k+1}); \\ 3, & t \in [t_{4k+1}, t_{4k+2}); \\ 4, & t \in [t_{4k+2}, t_{4k+3}); \\ 1, & t \in [t_{4k+3}, t_{4k+4}). \end{cases}$$

$$k = 0, 1, \dots$$

其中 $x^{(4k+v)} \in l$.经计算,可得在切换路径 σ_1 和 σ_2 下

$$e^{\sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{|\beta_j|} \pi} + e^{\frac{\alpha_1}{|\beta_1|} \pi} \left(1 + \sum_{\tau=1}^{N-1} e^{\sum_{j=\tau+1}^N \frac{\alpha_j}{|\beta_j|} \pi} \right)$$

的值分别为0.6761和0.0410,即满足定理1的条件(11).由定理3可知,系统(33)关于区域 Ω_e 在以直线 $l: x_1 + x_2 + 3 = 0$ 为切换线的切换路径 σ_1 或 σ_2 和共同控制器 $u = -K(x - x_e^\sigma)$ 下,都是全局可区域渐近镇定的.

为验证上述结论,取4个初态

$$x^{(01)} = [1, 16]^T, \quad x^{(02)} = [0, 3]^T,$$

$$x^{(03)} = [-6, 0]^T, \quad x^{(04)} = [1, -16]^T$$

进行数值仿真.仿真结果见图1和图2,其中 $l: x_1 + x_2 + 3 = 0$.数值仿真表明了定理3及其算法的有效性和易操作性.

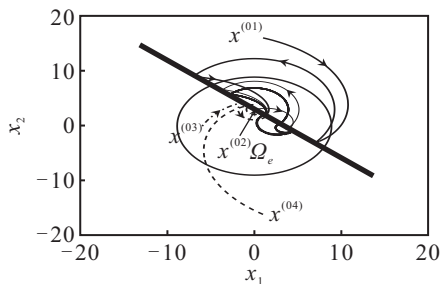


图1 系统(33)在路径 σ_1 下从初态 $x^{(0i)}$ 出发的轨线

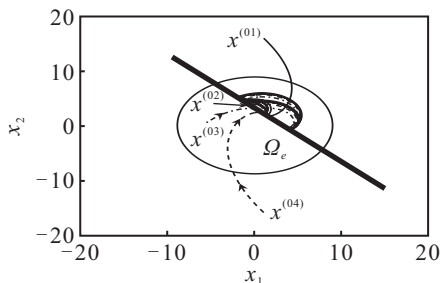


图2 系统(33)在路径 σ_2 下从初态 $x^{(0i)}$ 出发的轨线

5 结论

本文给出了几个多平衡点不稳定子系统的二维线性时不变切换系统的全局区域渐近稳定的判别条件,并设计了相应的镇定控制器和算法.数值仿真算例表明了所得结果的有效性和可操作性.虽然所得结论具有一定的保守性,但稳定性和镇定性的判别条件简单且极易验证.

本文所得结论的突出特点有:1)多平衡点区域易于确定;2)稳定性条件易于验证且控制器设计简单易操作;3)适用于含不稳定子系统的该类切换系统;4)给出了全局可区域渐近镇定控制器算法.

参考文献(References)

- [1] Lian J, Ge Y, Han M. Stabilization for switched stochastic neutral systems under asynchronous switching[J]. Information Sciences, 2013, 222: 501-508.
- [2] 刘毅, 赵军. 一类切换模糊时滞系统的状态反馈控制[J]. 控制与决策, 2008, 23(4): 445-449.
(Liu Y, Zhao J. State feedback control for a class of switching fuzzy time-delay systems[J]. Control and Decision, 2008, 23(4): 445-449.)
- [3] Branicky M. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(4): 475-482.

- [4] Narendra K S, Balakrishnan J. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting \mathcal{A} -matrices[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39(12): 2469-2471.
- [5] Zhao J, Hill D. Passivity and stability of switched systems: A multiple storage function method[J]. Systems and Control Letters, 2008, 57(2): 158-164.
- [6] Sun X, Zhao J, Hill D. Stability and L_2 -gain analysis for switched delay systems: A delay-dependent method[J]. Automatica, 2006, 42(10): 1769-1774.
- [7] 孙文安, 赵军. 基于LMIs的不确定线性切换系统 H_∞ 鲁棒控制[J]. 控制与决策, 2005, 20(6): 650-655.
(Sun W A, Zhao J. H_∞ robust control of uncertain switched linear systems based on LMIs[J]. Control and Decision, 2005, 20(6): 650-655.)
- [8] Navarro-Lopez E M, Laila D. Group and total dissipativity and stability of multi-equilibria hybrid automata[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2013, 58(12): 3196-3202.
- [9] 郭荣伟, 王玉振. 一类多平衡点线性切换系统稳定区域的估计[J]. 控制理论与应用, 2012, 29(4): 409-414.
(Guo R W, Wang Y Z. Estimation of stability region for a class of switched linear systems with multiple equilibrium points[J]. Control Theory & Applications, 2012, 29(4): 409-414.)
- [10] 赵胜芝, 李建华, 赵军. 单输入单输出切换系统的一致标准形及可镇定性[J]. 控制与决策, 2005, 20(10): 1161-1164.
(Zhao S Z, Li J H, Zhao J. Uniform normal form and stabilizability of single-input single-output switched systems[J]. Control and Decision, 2005, 20(10): 1161-1164.)
- [11] Cheng D, Hu X, Shen T. Analysis and design of nonlinear control systems[M]. Beijing: Science Press, 2010: 463-466.
- [12] 朱礼营, 王玉振. 线性切换系统一致能控性和能观性的充要条件[J]. 山东大学学报: 工学版, 2007, 37(1): 43-46.
(Zhu L Y, Wang Y Z. Necessary and sufficient conditions for uniform controllability and observability of linear switched systems[J]. J of Shandong University: Engineering Science, 2007, 37(1): 43-46.)

(责任编辑: 郑晓蕾)