文章编号: 1001-0920 (2015) 01-0091-07 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.1572

基于前景理论的具有指标期望的多指标决策方法

刘云志, 樊治平

(东北大学 工商管理学院，沈阳 110004)

摘 要: 针对决策者给出单一与组合指标期望情形的多指标决策问题, 提出一种基于前景理论的决策分析方法. 首先, 依据前景理论将决策者给出的指标期望视为参照点, 分别计算各方案针对各单一与各组合指标期望的前景价值, 并构建各方案的综合前景价值向量; 然后, 将原始决策问题转化为相应的广义优序模糊约束满意问题 (GPFCSP), 进而计算各方案针对相应推理准则的总体满意度, 并据此对各方案进行排序; 最后, 通过算例表明了该方法的可行性.

关键词: 多指标决策；指标期望；前景理论；广义优序模糊约束满意问题；方案排序

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Multiple attribute decision making considering attribute aspirations: A method based on prospect theory

LIU Yun-zhi, *FAN Zhi-ping*

(School of Business Administration，Northeastern University，Shenyang 110004，China. Correspondent：LIU Yun-zhi, E-mail：yunzhi_liu@126.com)

Abstract: A method based on the prospect theory is proposed to solve the multiple attribute decision making problem in which single and combination attribute aspirations are provided by the decision-maker. Firstly, according to the prospect theory, the attribute aspirations given by the decision-maker are regarded as the reference points. Then the prospect values of each alternative with regard to all single and combination attribute aspirations are calculated, respectively, and the comprehensive prospect value vector concerning each alternative is constructed. Based on this, the original decision problem is converted into the corresponding generalized prioritized fuzzy constraint satisfaction problem (GPFCSP). Further, the overall satisfaction degree of each alternative with regard to the corresponding reasoning standard is calculated, and the ranking of all alternatives can be determined. Finally, a numerical example is used to illustrate the feasibility of the proposed method.

Keywords: multiple attribute decision making；attribute aspirations；prospect theory；GPFCSP；ranking

0 引 言

考虑决策者给出指标期望的多指标决策问题是指, 在决策过程中同时考虑各备选方案针对多个指标的决策信息与决策者给出的指标期望要求 (简称指标期望), 进而针对有限方案进行排序或优选. 由于这类决策问题在投资项目选择等诸多领域具有大量的实际背景, 近年来有关这类决策问题的模型与方法研究受到了人们的关注[1-13]. 在现实中, 决策者可能会针对各单一指标给出相应的期望要求, 同时也可能会针对多个指标给出组合期望要求 (简称组合指标期望), 而针对考虑决策者给出单一与组合指标期望情形的多指标决策问题则是一个需要研究的新课题. 目前, 针对该决策问题的研究还不多见, 但可以看到一些相关的研究成果[1-13]. 例如: 文献 [1] 针对概率和指标值均为区间灰数且指标权重系数不完全确定的灰色随机多准则决策问题, 通过使用区间灰数排序方法以及前景价值函数, 并通过构建前景决策矩阵与离差最大化模型来得到方案的排序结果; 文献 [2] 针对指标值为不确定语言变量且具有区间概率的风险型决策问题, 提出了一种基于前景理论的决策分析方法; 文献 [3] 针对带有指标期望且指标值的数据类型为清晰数、区间数及三角模糊数 3 种形式的风险型多指标

收稿日期: 2013-11-10；**修回日期:** 2014-03-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271051)；中央高校基本科研业务费专项资金项目(N130606001)；辽宁省高等学校创新团队支持计划项目(WT2013004).

作者简介: 刘云志(1985−), 男, 博士生, 从事决策理论与方法的研究; 樊治平(1961−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与方法等研究.

决策问题, 提出了一种基于前景理论的决策分析方法; 文献 [4] 针对带有指标期望且状态概率和属性值均为区间数的风险型多指标决策问题, 提出了一种基于前景理论的决策分析方法; 文献 [5] 提出了一种搜寻最接近指标期望水平方案的算法, 并基于该算法给出了一个寻找决策者最满意方案的交互式程序; 文献 [6] 针对备选方案数目众多的决策问题, 提出了一种基于四叉树的交互式方法; 文献 [7] 给出了基于指标期望水平的交互式方案, 并给出了期望水平模型的实际应用; 文献 [8] 提出了一种交互式方法以解决一类随机多指标决策问题; 文献 [9] 提出了一种考虑决策者满意度的多指标决策的交互式方法; 文献 [10] 针对多因素决策问题, 构造了基于令人满意原则的多因素决策模型, 同时给出了模型求解的算法; 文献 [11] 针对带有指标期望且决策信息的数据类型为清晰数与区间数两种形式的多指标决策问题, 提出了一种基于前景理论的决策分析方法.

需要指出的是, 已有研究大多是考虑决策者给出单一指标期望的情形, 而很少考虑决策者给出组合指标期望的情形. 鉴于此, 本文针对考虑决策者给出单一与组合指标期望情形的多指标决策问题, 提出一种基于前景理论的决策分析方法. 该方法依据前景理论, 首先将决策者给出的单一与组合指标期望视为参照点, 分别计算各方案针对各单一与各组合指标期望的前景价值; 然后将原始决策问题转化为相应的广义优序模糊约束满意问题 (GPFCSP); 在此基础上, 计算各方案针对相应推理准则的总体满意度并据此对所有方案进行排序; 最后通过一个算例验证了该方法的可行性.

1 预备知识

下面对广义优序模糊约束满意问题 (GPFCSP) 及其总体满意度的计算方法做以简单介绍, 具体内容可参见文献 [14-19].

定义 1[14] 一个模糊约束满意问题 (FCSP) 可描述为一个三元组 (X, D, C^f). 其中:

1) $X = \{x_i | i = 1, 2, \cdots, n\}$ 为一个变量集;

2) $D = \{d_i | i = 1, 2, \cdots, n\}$ 为一个有限论域集, d_i 为变量集 X 中元素 x_i 的论域;

3) C^f 为一个模糊约束集, 即

$$C^f = \Big\{R_i^f | \mu_{R_i^f} : \Big(\prod_{x_j \in \mathrm{var}(R_i^f)} d_j\Big) \to [0, 1],\\ i = 1, 2, \cdots, m\Big\},$$

$\mathrm{var}(R_i^f)$ 为模糊约束 R_i^f 的变量集.

定义 2[14] 变量 x 的一个分配值被称为一个标记, 记为 v_x. 关于集合 $X' = \{x_1', \cdots, x_m'\} \subseteq X$ 中全变量的一个复合标记视为 $v_{X'}$, 即 $v_{X'} = (v_{x_1'}, \cdots, v_{x_m'})$.

定义 3[14] 在一个 FCSP (X, D, C^f) 中, 已知 v_X 为变量集 X 的一个复合标记, 则 FCSP 的总体满意度 $\alpha(v_X)$ 定义为

$$\alpha(v_X) = \oplus\{\mu_{R^f}(v_{\mathrm{var}(R^f)}) | R^f \in C^f\},$$

其中 $\oplus$ 为 $[0, 1]^n$ 到 $[0, 1]$ 的一个聚合算子.

定义 4[14] 一个优序模糊满意约束问题 (PFCSP) 可描述为一个四元组 (X, D, C^f, ρ), 其中 (X, D, C^f) 为一个 FCSP, 称为 PFCSP 的匹配 FCSP, 且 $\rho: C^f \to [0, \infty)$ 为一个优序函数.

定义 5[14] 在一个 PFCSP (X, D, C^f, ρ) 中, 已知 v_X 为变量集 X 的一个复合标记, 则 $\alpha_\rho(v_X)$ 定义为

$$\alpha_\rho(v_X) = \oplus_\rho\{g(\rho(R^f), \mu_{R^f}(v_{\mathrm{var}(R^f)})) | R^f \in C^f\}.$$

其中: $\oplus_\rho : [0, 1]^n \to [0, 1]$, $g : [0, +\infty] \times [0, 1] \to [0, 1]$. 若 $\alpha_\rho(v_X)$ 满足下述公理, 则 $\alpha_\rho(v_X)$ 被称为 PFCSP 的总体满意度.

1) 若存在模糊约束 $R^f_{\max}$, $\rho_{\max} = \rho(R^f_{\max}) = \max\{\rho(R^f) | R^f \in C^f\}$ (下文均沿用这里定义的符号), 则 $\mu_{R^f_{\max}}(v_{\mathrm{var}(R^f_{\max})}) = 0 \Rightarrow \alpha_\rho(v_X) = 0$.

2) 若 $\exists \rho_0 \in [0, 1], \forall R^f \in C^f, \rho(R^f) = \rho_0$, 则 $\alpha_\rho(v_X) = \oplus_\rho\{\mu_{R^f}(v_{\mathrm{var}(R^f)}) | R^f \in C^f\}$, 其中 $\oplus_\rho$ 为 T 范数.

3) 对于 $\forall R_i^f, R_j^f \in C^f$, 假定 $\rho(R_i^f) \geqslant \rho(R_j^f)$, $\delta > 0$, 且存在两个不同的复合标记 v_X 和 v_X', $\forall R^f \in C^f$, 有以下几种情况:

① 当 $R^f \neq R_i^f$ 且 $R^f \neq R_j^f$ 时, 有

$$\mu_{R^f}(v_{\mathrm{var}(R^f)}) = \mu_{R^f}(v'_{\mathrm{var}(R^f)});$$

② 当 $R^f = R_i^f$ 时, 有

$$\mu_{R^f}(v_{\mathrm{var}(R^f)}) = \mu_{R^f}(v'_{\mathrm{var}(R^f)}) + \delta;$$

③ 当 $R^f = R_j^f$ 时, 有

$$\mu_{R^f}(v'_{\mathrm{var}(R^f)}) = \mu_{R^f}(v_{\mathrm{var}(R^f)}) + \delta.$$

如果存在 $g(\rho(R_i^f), \mu_{R_i^f}(v_{\mathrm{var}(R_i^f)})) \leqslant g(\rho(R_j^f), \mu_{R_j^f}(v_{\mathrm{var}(R_j^f)}))$, 则 $\alpha_\rho(v_X) \geqslant \alpha_\rho(v_X')$.

4) 对于两个不同的复合标记 v_X 和 v_X', 若 $\forall R^f \in C^f$, $\mu_{R^f}(v_{\mathrm{var}(R^f)}) \geqslant \mu_{R^f}(v'_{\mathrm{var}(R^f)})$, 则 $\alpha_\rho(v_X) \geqslant \alpha_\rho(v_X')$.

5) 若存在一个复合标记 v_X, 使得 $\forall R^f \in C^f$, $\mu_{R^f}(v_{\mathrm{var}(R^f)}) = 1$, 则有 $\alpha_\rho(v_X) = 1$.

定义 6[15] 一个广义优序模糊约束满意问题 (GPFCSP) 可描述为一个多元组 $(X, D, C^f, \rho, g, \bigwedge, \bigvee, \neg)$. 若给定某一复合标记 v_X, 则 GPFCSP 满足下述公理.

1) 设 $F = \displaystyle\bigwedge_{i \in \{1, \cdots, n\}} f_i$ 为 GPFCSP 中的一个推理准则, 其中 f_i $(i \in \{1, \cdots, n\})$ 为单元推理准则, 且设 C^f 为推理准则 F 中的一个模糊约束集. 对于模糊约

束 $R^f_{\max}$, 有

$$\rho_{\max}=\rho(R^f_{\max})=\max\{\rho(R^f)|R^f\in C^f\},$$

则对于任意的推理准则 F, 有 $\mu_{R^f_{\max}}(v_{\mathrm{var}(R^f_{\max})})=0 \Rightarrow \alpha_F(v_X)=0$.

2) 若 $\forall R^f\in C^f$, $\rho(R^f)=\rho_0$, 则对于任意推理准则 F, 有 $\alpha_F(v_X)=F_L(v_X)$, 其中 F_L 为一般的模糊逻辑 $L(\bigvee,\bigwedge,\neg)$.

3) 对于 $\forall R^f_i, R^f_j\in C^f$, 假定 $\rho(R^f_i)\geqslant\rho(R^f_j)$, $\delta>0$, 且存在两个不同的复合标记 v_X 和 v'_X, $\forall R^f\in C^f$, 有以下几种情况:

① 当 $R^f\neq R^f_i$ 且 $R^f\neq R^f_j$ 时, 有

$$\mu_{R^f}(v_{\mathrm{var}(R^f)})=\mu_{R^f}(v'_{\mathrm{var}(R^f)});$$

② 当 $R^f=R^f_i$ 时, 有

$$\mu_{R^f}(v_{\mathrm{var}(R^f)})=\mu_{R^f}(v'_{\mathrm{var}(R^f)})+\delta;$$

③ 当 $R^f=R^f_j$ 时, 有

$$\mu_{R^f}(v'_{\mathrm{var}(R^f)})=\mu_{R^f}(v_{\mathrm{var}(R^f)})+\delta.$$

于是存在下述性质: 已知

$$F=\bigwedge_{k=1}^{n}(x_k,\rho(R_k)),\ x_k\in\mathrm{Dom}(R_k),$$

或

$$F=\bigvee_{k=1}^{n}(x_k,\rho(R_k)),\ x_k\in\mathrm{Dom}(R_k),$$

如果存在

$$g(\rho(R^f_i),\mu_{R^f_i}(v_{\mathrm{var}(R^f_i)}))\leqslant g(\rho(R^f_j),\mu_{R^f_j}(v_{\mathrm{var}(R^f_j)})),$$

则 $\alpha_F(v_X)\geqslant\alpha_F(v'_X)$.

4) 对于两个不同的复合标记 v_X 和 v'_X, 且 $\forall R^f\in C^f$, $\mu_{R^f}(v_{\mathrm{var}(R^f)})\geqslant\mu_{R^f}(v'_{\mathrm{var}(R^f)})$, 若推理准则 F 中不存在否定逻辑关系, 则 $\alpha_F(v_X)\geqslant\alpha_F(v'_X)$.

5) 假定存在一个复合标记 v_X, 且 $\forall R^f\in C^f$, $\mu_{R^f}(v_{\mathrm{var}(R^f)})=1$, 若 F 为推理准则 $F=\bigwedge_{i=1}^{n}f_i$, 其中 $f_i\,(i\in\{1,\cdots,n\})$ 为单元推理准则, 则有 $\alpha_F(v_X)=1$.

定理 1[15]　已知多元组 $(X,D,C^f,\rho,g,\bigwedge,\bigvee,\neg)$ 表示 GPFCSP, “$\bigwedge$” $=T_L$, “$\bigvee$” $=S_L$, “$\neg$” $=N_S$, $g(\mu_{R^f_i}(v_{\mathrm{var}(R^f_i)}),\rho(R^f_i))=S_P(\mu_{R^f_i}(v_{\mathrm{var}(R^f_i)}),1-\rho(R^f_i)/\rho_{\max})$, 则关于推理准则 F 的总体满意度为

$$\alpha_F(v_X)=\mathcal{F}\{g(\mu_{R^f_i}(v_{\mathrm{var}(R^f_i)}),\rho(R^f_i))|R^f_i\in C^f\}.$$

其中: $\rho_{\max}=\max\{\rho(R^f_i),R^f_i\in C^f\}$, C^f 为推理准则 F 的约束集, $S_P(x,y)=x+y-xy$ 为 S 范数, $\mathcal{F}$ 为推理准则 F 所对应的逻辑运算.

2　问题描述

考虑决策者给出单一与组合指标期望情形的多指标决策问题, 为便于分析, 下面的符号用来描述该问题中所涉及的集和量.

$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$: 备选方案集合. 其中: A_i 为第 i 个备选方案, $i\in M$, $M=\{1,2,\cdots,m\}$.

$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$: 指标集合. 其中: C_j 为第 j 个指标, 且 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是加性独立的, $j\in N$, $N=\{1,2,\cdots,n\}$.

$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$: 指标权重向量. 其中: ω_j 为指标 C_j 的权重, $j\in N$, 且满足 $\omega_j\geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$.

$D=[d_{ij}]_{m\times n}$: 决策矩阵. 其中: d_{ij} 为方案 A_i 针对指标 C_j 的指标值或结果值, $i\in M$, $j\in N$.

$Q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$: 决策者针对指标集 C 所给出的单一指标期望水平向量. 其中: q_j 为决策者针对指标 C_j 所给出的指标期望水平, $j\in N$. 若方案 A_i 针对指标 C_j 的指标值 $d_{ij}\geqslant q_j\,(d_{ij}\leqslant q_j)$, 则表明指标值 d_{ij} 达到了决策者给出的期望水平; 若方案 A_i 针对指标 C_j 的指标值 $d_{ij}<q_j\,(d_{ij}>q_j)$, 则表明指标值 d_{ij} 未达到决策者给出的期望水平.

$\widehat{q}_l$: 决策者针对组合指标 $\widehat{C}_l$ 所给出的组合期望水平. 其中: $\widehat{C}_l=f_l(C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 为由指标集 $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 中元素所组合构成的第 l 个组合指标; f_l 是以 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为变量的符号函数; $l\in K$, $K=\{1,2,\cdots,k\}$, 且 $f_i\neq f_j$, $i\neq j$, $i,j\in K$. 例如, 组合指标 $\widehat{C}_1=f_1(C_1,C_2,\cdots,C_n)=C_1+2C_2+C_3$, $\widehat{C}_2=f_2(C_1,C_2,\cdots,C_n)=C_2\times C_4$ 等. 需要说明的是, 指标集 $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 中指标 C_j 也可以视为特殊的组合指标, 即指标 C_j 由自身组合所构成, $\widehat{C}_j=C_j$. 同时, 决策者针对指标 C_j 给出的指标期望水平 q_j 也可以视为决策者针对特殊的组合指标 C_j 所给出的期望水平, 即 $\widehat{q}_j=q_j$.

η: 决策者针对单一指标期望水平向量 $Q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 所给出的关注程度, 且满足 $\eta\in[0,1]$.

$\widehat{\eta}_l$: 决策者针对第 l 个组合期望水平 $\widehat{q}_l$ 所给出的关注程度, $l\in K$, 且满足 $\widehat{\eta}_l\in[0,1]$.

N_b、N_c: 效益型指标和成本型指标的下标集合, 且满足 $N_b\bigcap N_c=\varnothing$, $N_b\bigcup N_c=N$.

本文要解决的问题是依据上述决策信息, 运用一种决策分析方法对所有方案进行排序或优选.

3　决策方法

针对上述考虑决策者给出单一与组合指标期望情形的多指标决策问题, 阐述本文提出的决策分析方法. 该方法的基本思想是: 首先, 依据前景理论, 将决策者给出的单一与组合指标期望视为参照点, 分别计算各方案针对各单一与各组合指标期望的前景价值, 进而构建各方案的综合前景价值向量; 然后, 将原

始决策问题转化为相应的广义优序模糊约束满意问题 (GPFCSP); 最后, 计算各方案针对相应推理准则的总体满意度并据此对所有方案进行排序. 下面给出本文方法的基本原理.

3.1 各方案的综合前景价值向量的构建

依据前景理论, 将各单一指标期望水平 q_j 与各组合指标期望水平 $\widehat{q}_l$ 视为参照点, 分别计算各方案针对各单一指标期望与各组合指标期望的前景价值, 其具体计算过程如下.

1) 计算各方案针对指标 $\widehat{C}_l$ 的指标值 $\widehat{d}_{il}$, 即

$$\widehat{d}_{il} = \widehat{f}_l(d_{i1}, d_{i2}, \cdots, d_{in}),\ i \in M,\ l \in K, \tag{1}$$

其中 $\widehat{f}_l$ 是与符号函数 f_l 对应的且以 $d_{i1}, d_{i2}, \cdots, d_{il}$ 为变量的实函数. 例如, 已知指标 $\widehat{C}_l = f_l(C_1, C_2, \cdots, C_n) = C_1 + C_2$, 则各方案针对指标 $\widehat{C}_l$ 的指标值为 $\widehat{d}_{il} = \widehat{f}_l(d_{i1}, d_{i2}, \cdots, d_{in}) = d_{i1} + d_{i2}, i \in M, l \in K$.

2) 将各单一指标期望水平 q_j 与各组合指标期望水平 $\widehat{q}_l$ 视为参照点, 若 $d_{ij} \geqslant q_j$, $\widehat{d}_{il} \geqslant \widehat{q}_l$ (或 $d_{ij} \leqslant q_j$, $\widehat{d}_{il} \leqslant \widehat{q}_l$), 则表明 d_{ij} 和 $\widehat{d}_{il}$ 分别达到了决策者所给出的期望水平 q_j 和 $\widehat{q}_l$, 这时可将指标值 d_{ij} 和 $\widehat{d}_{il}$ 超过 (或未达到) 期望水平 q_j 和 $\widehat{q}_l$ 的部分视为方案 A_i 的 "收益"; 若 $d_{ij} < q_j$, $\widehat{d}_{il} < \widehat{q}_l$ (或 $d_{ij} > q_j$, $\widehat{d}_{il} > \widehat{q}_l$), 则表明 d_{ij} 和 $\widehat{d}_{il}$ 未达到决策者所给出的期望水平 q_j 和 $\widehat{q}_l$, 这时可将指标值 d_{ij} 和 $\widehat{d}_{il}$ 未达到 (或超过) 期望水平 q_j 和 $\widehat{q}_l$ 的部分视为方案 A_i 的 "损失". 依据前景理论[20], 分别计算指标值 d_{ij} 和 $\widehat{d}_{il}$ 相对于参照点 q_j 和 $\widehat{q}_l$ 的益损值 $F(d_{ij})$ 和 $F(\widehat{d}_{il})$, 即

$$F(d_{ij}) = \begin{cases} d_{ij} - q_j,\ i \in M,\ j \in N \bigcap N_b; \\ q_j - d_{ij},\ i \in M,\ j \in N \bigcap N_c. \end{cases} \tag{2}$$

$$F(\widehat{d}_{il}) = \begin{cases} \widehat{d}_{il} - \widehat{q}_l,\ i \in M,\ l \in N \bigcap N_b; \\ \widehat{q}_l - \widehat{d}_{il},\ i \in M,\ l \in N \bigcap N_c. \end{cases} \tag{3}$$

3) 考虑到决策者面对 "收益" 和 "损失" 时具有不同的风险态度, 依据益损值 $F(d_{ij})$ 和 $F(\widehat{d}_{ij})$, 可分别计算方案 A_i 针对指标 C_j 和 $\widehat{C}_l$ 的指标值所对应的前景价值 v_{ij} 和 $\widehat{v}_{il}$, 即

$$v_{ij} = \begin{cases} v_{ij}^{(-)},\ F(d_{ij}) < 0; \\ v_{ij}^{(+)},\ F(d_{ij}) \geqslant 0; \end{cases} \quad i \in M,\ j \in N. \tag{4}$$

$$\widehat{v}_{il} = \begin{cases} \widehat{v}_{il}^{(-)},\ F(\widehat{d}_{il}) < 0; \\ \widehat{v}_{il}^{(+)},\ F(\widehat{d}_{il}) \geqslant 0; \end{cases} \quad i \in M,\ l \in K. \tag{5}$$

式 (4) 中, $v_{ij}^{(-)}$ 和 $v_{ij}^{(+)}$ 分别表示方案 A_i 针对指标 C_j 遭受 "损失" 时所对应的前景价值和获得 "收益" 时所对应的前景价值, 其计算公式分别为

$$v_{ij}^{(-)} = -\theta(-F(d_{ij}))^{\beta},\ i \in M,\ j \in N; \tag{6}$$

$$v_{ij}^{(+)} = (F(d_{ij}))^{\alpha},\ i \in M,\ j \in N. \tag{7}$$

式 (5) 中, $\widehat{v}_{il}^{(-)}$ 和 $\widehat{v}_{il}^{(+)}$ 分别表示方案 A_i 针对指标 $\widehat{C}_l$ 遭受 "损失" 时所对应的前景价值和获得 " 收益" 时所对应的前景价值, 其计算公式分别为

$$\widehat{v}_{il}^{(-)} = -\theta(-F(\widehat{d}_{il}))^{\beta},\ i \in M,\ l \in K; \tag{8}$$

$$\widehat{v}_{il}^{(+)} = (F(\widehat{d}_{il}))^{\alpha},\ i \in M,\ l \in K. \tag{9}$$

式 (6) ∼ (9) 中, α 和 β 为决策者的风险态度系数[20-21], $\alpha, \beta \in (0, 1)$, α 和 β 越大, 表明决策者越倾向于冒险; θ 为损失规避系数[20-21], $\theta > 1$, θ 越大, 表明决策者对损失越敏感. Kahneman 等[20]在研究中发现, 当参数 $\alpha = \beta = 0.88$, $\theta = 2.25$ 时, 与经验数据较为一致. 同时也有一些学者在实证研究中得出 β 的取值应比 α 的取值要大[22]. 例如: Abdellaoui[22]在实证分析中建议 α 和 β 的取值分别为 0.89 和 0.92. Tversky 等[21]建议 $\theta \in [2, 2.5]$.

4) 将前景价值 v_{ij} 和 $\widehat{v}_{il}$ 规范化为 z_{ij} 和 $\widehat{z}_{il}$, 即

$$z_{ij} = \frac{v_{ij}}{v_{\max j}},\ i \in M,\ j \in N; \tag{10}$$

$$\widehat{z}_{il} = \frac{\widehat{v}_{il}}{\widehat{v}_{\max l}},\ i \in M,\ l \in K. \tag{11}$$

其中

$$v_{\max j} = \max_{i \in M}\{|v_{ij}|\},\ j \in N;$$

$$\widehat{v}_{\max l} = \max_{i \in M}\{|\widehat{v}_{il}|\},\ l \in K.$$

5) 依据指标权重向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ 构建各方案的综合前景价值向量 $U_i = (u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{i(k+1)})$. 其中: u_{io} 表示方案 A_i 所对应的第 o 个综合前景价值, $i \in M$, $o \in \bar{K}$, $\bar{K} \in \{1, 2, \cdots, k+1\}$, 即

$$u_{io} = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j z_{ij},\ o \in \{1\}; \\ \widehat{z}_{i(o-1)},\ o \in \bar{K}/\{1\}; \end{cases} \quad i \in M,\ o \in \bar{K}. \tag{12}$$

3.2 原始决策问题与 GPFCSP 的转化及各方案总体满意度的计算

依据计算得到的各方案的综合前景价值向量, 将考虑决策者给出单一与组合指标期望情形的多指标决策问题转化为相应的广义优序模糊约束满意问题 (GPFCSP), 进而计算各方案针对相应推理准则的总体满意度并据此对所有方案排序, 其具体计算过程如下.

1) 依据各方案的综合前景价值向量 $U_i = (u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{i(k+1)})$, 计算得到各综合前景价值所对应的论域 Y_o, $o \in \bar{K}$, $\bar{K} \in \{1, 2, \cdots, k+1\}$, 即

$$Y_o = [Y_o^L, Y_o^U] = [\min_{i \in M}\{u_{io}\}, \max_{i \in M}\{u_{io}\}],\ o \in \bar{K}. \tag{13}$$

2) 依据综合前景价值 u_{io} 所对应的论域 Y_o, 构建广义优序模糊约束满意问题 (GPFCSP) 中相应的模糊

约束 $R_o^f, o\in\bar{K}$, 即

$$R_o^f=\text{HIGH}\ u_o,\ o\in\bar{K}. \tag{14}$$

从而, 各模糊约束构成一个模糊约束集, 这里记此模糊约束集为 C^f, 即 $C^f=\{R_1^f,R_2^f,\cdots,R_{k+1}^f\}$.

进一步, 构建模糊约束集 C^f 中模糊约束 R_o^f 所对应的隶属度函数, 即

$$\mu_o(x)=\begin{cases}\dfrac{x-Y_o^L}{Y_o^U-Y_o^L},\ x\in Y_o;\\ 0,\ \text{otherwise};\end{cases}\quad o\in\bar{K}. \tag{15}$$

由式 (15) 计算各方案针对各模糊约束的隶属度向量 $\mu_i=(\mu_{i1},\mu_{i2},\cdots,\mu_{ik+1})$, 其中 μ_{io} 表示方案 A_i 针对模糊约束 R_o^f 的隶属度, 有

$$\mu_{io}=\mu_o(u_{io})=\frac{u_{io}-Y_o^L}{Y_o^U-Y_o^L},\ i\in M,\ o\in\bar{K}. \tag{16}$$

3) 将决策者针对单一指标期望水平向量 $Q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 和组合期望水平 $\widehat{q}_l$ 所给出的关注程度 η 和 $\widehat{\eta}_l$ 转化为各模糊约束的优势系数 $\rho(R_o^f)$, $l\in K, o\in\bar{K}$, 即

$$\rho(R_o^f)=\begin{cases}\eta,\ o\in\{1\};\\ \widehat{\eta}_{o-1},\ o\in\bar{K}/\{1\};\end{cases}\quad o\in\bar{K}. \tag{17}$$

4) 依据模糊约束集 C^f 中各模糊约束及其对应的优势系数, 确定推理准则 F, 即

$$F:\ (R_1^f,\rho(R_1^f))\ \text{and}\ (R_2^f,\rho(R_2^f))\ \cdots\ \text{and}\ (R_{k+1}^f,\rho(R_{k+1}^f)). \tag{18}$$

其中: $(R_o^f,\rho(R_o^f))$ 表示第 o 个模糊约束与其对应的优势系数所组成的二元组, $o\in\bar{K}$. 由此可知, 推理准则 F 的现实意义是优选方案应具有

$$\text{HIGH}\,u_1\ \text{and}\ \text{HIGH}\,u_2\ \cdots\ \text{and}\ \text{HIGH}\,u_{k+1}.$$

5) 通过步骤 1)～步骤 4), 便将考虑决策给出单一与组合指标期望情形的多指标决策问题转化为相应的广义优序模糊约束满意问题 (GPFCSP), 进而依据定理 1, 计算各方案针对推理准则 F 的总体满意度 $\alpha_F(U_i)$, 有

$$\alpha_F(U_i)=\mathcal{F}\Big\{g\Big(\mu_{io},\frac{\rho(R_o^f)}{\rho_{\max}}\Big)|R_o^f\in C^f\Big\}=\Big(\mu_{i1}+1-\frac{\rho(R_1^f)}{\rho_{\max}}-\mu_{i1}\Big(1-\frac{\rho(R_1^f)}{\rho_{\max}}\Big)\Big)\bigwedge\cdots\bigwedge\Big(\mu_{i(k+1)}+1-\frac{\rho(R_{k+1}^f)}{\rho_{\max}}-\mu_{i(k+1)}\Big(1-\frac{\rho(R_{k+1}^f)}{\rho_{\max}}\Big)\Big),\ i\in M. \tag{19}$$

其中 $\rho_{\max}=\max\{\rho(R_o^f),\ R_o^f\in C^f\}$. 进一步, 若 $\forall R_o^f\in C^f$, $\rho(R_o^f)=\eta_0$, 则式 (19) 退化为

$$\alpha_F(U_i)=\mathcal{F}\Big\{g\Big(\mu_{io},\frac{\rho(R_o^f)}{\rho_{\max}}\Big)|R_o^f\in C^f\Big\}=\mu_{i1}\bigwedge\cdots\bigwedge\mu_{i(k+1)},\ i\in M. \tag{20}$$

从而针对 $\alpha_F(U_i)$ 进行排序, 并得到所有方案的排序结果.

综上所述, 下面给出基于前景理论的具有指标期望的多指标决策方法的具体计算步骤.

Step 1: 由式 (1) 计算各方案针对指标 $\widehat{C}_l$ 的指标值 $\widehat{d}_{il}$.

Step 2: 由式 (2)～(9) 计算各方案针对指标 C_j 和 $\widehat{C}_l$ 的指标值所对应的前景价值 v_{ij} 和 $\widehat{v}_{il}$, 并由式 (10) 和 (11), 将前景价值 v_{ij} 和 $\widehat{v}_{il}$ 规范化为 z_{ij} 和 $\widehat{z}_{il}$.

Step 3: 由式 (12) 构建各方案的综合前景价值向量 $U_i=(u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{i(k+1)})$.

Step 4: 由式 (13) 计算得到综合前景价值 u_{io} 所对应的论域 Y_o.

Step 5: 由式 (14) 构建广义优序模糊约束满意问题 (GPFCSP) 中相应的模糊约束 R_o^f, 并由式 (16) 计算各方案针对各模糊约束的隶属度向量 $\mu_i=(\mu_{i1},\mu_{i2},\cdots,\mu_{ik+1})$.

Step 6: 由式 (17) 计算各模糊约束的优势系数 $\rho(R_o^f)$, 并由式 (18) 确定推理准则 F.

Step 7: 由式 (19) 计算各方案针对推理准则 F 的总体满意度 $\alpha_F(U_i)$, 进而对所有方案进行排序.

4　算例分析

考虑一个人员招聘选择问题. 某 IT 跨国分公司 Y 欲从 5 名竞聘者 (A_1,A_2,A_3,A_4,A_5) 中选择一名竞聘者来担任该公司的 CIO. 公司招聘决策者主要考虑两方面的技能指标, 即软技能指标 (C_1,C_2,C_3) 和硬技能指标 (C_4,C_5,C_6). 其中: 软技能指标包括战略构想 C_1、沟通能力 C_2、领导能力 C_3; 硬技能指标包括 IT 软件操作能力 C_4、个人行业经验 C_5、教育背景 C_6. 在这 6 项指标中, 所有指标的指标值均为清晰数的形式, 其中 6 项指标所对应的指标值是由该 IT 跨国分公司委派的专家组在综合分析竞聘者笔试及面试成绩后, 按照 0～100 分 (0 分为最低分值, 100 分为最高分值) 进行打分得到的, 且这 6 项指标均为效益型指标. 假设公司招聘决策者提供的指标权重向量为 $\omega=(0.2,0.1,0.2,0.2,0.2,0.1)$, 该决策者给出的指标期望如表 1 所示, 5 名竞聘者的决策数据信息如表 2 所示.

下面依据前文给出的决策分析方法来解决该决策问题.

首先, 由表 1 可知, 决策者针对各技能指标给出的单一期望水平向量为 $Q=(75,75,75,80,80,80)$; 决策者针对组合指标 $\widehat{C}_l\,(l\in\{1,2,3\})$ 所给出的指标期望水平分别为 $\widehat{q}_1=240$, $\widehat{q}_1=260$, $\widehat{q}_1=1$.

由式 (1) 计算各竞聘者针对指标 $\widehat{C}_l$ 的指标值 $\widehat{d}_{il}$, $i\in\{1,2,3,4,5\}$, $l\in\{1,2,3\}$, 其计算结果如表 3 所示.

表 1 决策者给出的指标期望

单一与组合指标	单一指标与组合指标期望
C_1	得分值最好不低于 75 分
C_2	得分值最好不低于 75 分
C_3	得分值最好不低于 75 分
C_4	得分值最好不低于 80 分
C_5	得分值最好不低于 80 分
C_6	得分值最好不低于 80 分
$\widehat{C}_l = C_1 + C_2 + C_3$	软技能指标得分值最好不低于 240 分
$\widehat{C}_2 = C_4 + C_5 + C_6$	硬技能指标得分值最好不低于 260 分
$\widehat{C}_3 = \dfrac{C_4 + C_5 + C_6}{C_1 + C_2 + C_3}$	硬技能指标的总得分值最好不低于软技能指标的总得分值, 即硬技能指标的总得分值/软技能指标的得分值最好不低于 1

表 2 5 名竞聘者的决策数据信息

竞聘者	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	65	72	80	75	85	85
A_2	60	70	78	88	84	90
A_3	85	60	82	70	90	78
A_4	80	85	82	70	75	80
A_5	78	88	80	75	75	80

表 3 5 名竞聘者针对指标 $\widehat{C}_l$ 的指标值 $\widehat{d}_{il}$

竞聘者	$\widehat{C}_1$	$\widehat{C}_2$	$\widehat{C}_3$
A_1	217	245	1.13
A_2	208	262	1.26
A_3	227	238	1.05
A_4	247	225	0.91
A_5	246	230	0.93

由式 (2) ~ (9) 计算各竞聘者针对指标 C_j ($j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) 和 $\widehat{C}_l$ ($l \in \{1, 2, 3\}$) 的指标值所对应的前景价值 v_{ij} 和 $\widehat{v}_{il}$, 并由式 (10) 和 (11), 将前景价值 v_{ij} 和 $\widehat{v}_{il}$ 规范化为 z_{ij} 和 $\widehat{z}_{il}$, 其计算结果如表 4 和表 5 所示. 其中: 式 (6) ~ (9) 中的参数 α、β 和 θ 取值采用文献 [20] 中的实验值, 即 $\alpha = \beta = 0.88$, $\theta = 2.25$.

表 4 5 名竞聘者针对指标 C_j 的前景价值 z_{ij}

竞聘者	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	−0.70	−0.24	0.74	−0.54	0.44	0.54
A_2	−1	−0.38	0.47	0.37	0.37	1
A_3	0.31	−1	1	−1	0.82	−0.55
A_4	0.17	0.31	1	−1	−1	0
A_5	0.11	0.39	0.74	−0.54	−1	0

表 5 5 名竞聘者针对指标 $\widehat{C}_l$ 的前景价值 $\widehat{z}_{il}$

竞聘者	$\widehat{C}_1$	$\widehat{C}_2$	$\widehat{C}_3$
A_1	−0.74	−0.47	0.54
A_2	−1	0.04	1
A_3	−0.45	−0.67	0.23
A_4	0.12	−1	−0.88
A_5	0.10	−0.87	−0.71

由式 (12) 构建各竞聘者的综合前景价值向量, 其构建结果为

$$U_1 = (0.02, -0.74, -0.47, 0.54),$$
$$U_2 = (0.10, -1, 0.04, 1),$$
$$U_3 = (0.07, -0.45, -0.67, 0.23),$$
$$U_4 = (-0.14, 0.12, -1, -0.88),$$
$$U_5 = (-0.10, 0.10, -0.87, -0.71).$$

然后, 由式 (13) 得到各综合前景价值所对应的论域分别为 $Y_1 = [-0.14, 0.10]$, $Y_2 = [-1, 0.12]$, $Y_3 = [-1, 0.04]$, $Y_4 = [-0.88, 1]$.

由式 (14) 构建广义优序模糊约束满意问题 (GPFCSP) 中相应的模糊约束, 即 $R_1^f = \mathrm{HIGH}\, u_1$, $R_2^f = \mathrm{HIGH}\, u_2$, $R_3^f = \mathrm{HIGH}\, u_3$, $R_4^f = \mathrm{HIGH}\, u_4$.

由式 (16) 计算各竞聘者针对各模糊约束的隶属度向量, 其计算结果为

$$\mu_1 = (0.67, 0.23, 0.51, 0.76),$$
$$\mu_2 = (1, 0, 1, 1),$$
$$\mu_3 = (0.88, 0.49, 0.32, 0.60),$$
$$\mu_4 = (0, 1, 0, 0),$$
$$\mu_5 = (0.17, 0.98, 0.13, 0.10).$$

由于本例中公司招聘决策者未针对单一指标期望水平向量与各组合指标期望水平给出相应的关注程度, 即默认 $\eta = \widehat{\eta}_l = \eta_0 \in [0, 1]$, $l \in \{1, 2, 3\}$, 由式 (17), 有 $\forall R_o^f \in C^f$, $\rho(R_o^f) = \eta_0$, $o \in \{1, 2, 3, 4\}$, 即各模糊约束具有相同的优势系数 η_0. 进一步, 由式 (18) 确定推理准则 F, 即

$$F:\ (R_1^f, \rho(R_1^f))\ \text{and}\ (R_2^f, \rho(R_2^f))\ \text{and}$$
$$(R_3^f, \rho(R_3^f))\ \text{and}\ (R_4^f, \rho(R_4^f)).$$

最后, 依据式 (19) (由于 $\forall R_o^f \in C^f$, $\rho(R_o^f) = \eta_0$, 式 (19) 退化为 (20)), 计算各竞聘者针对推理准则 F 的总体满意度, 其计算结果为: $\alpha_F(U_1) = 0.23$, $\alpha_F(U_2) = 0$, $\alpha_F(U_3) = 0.32$, $\alpha_F(U_4) = 0$, $\alpha_F(U_5) = 0.10$. 进一步, 可知 $\alpha_F(U_3) > \alpha_F(U_1) > \alpha_F(U_5) > \alpha_F(U_2) = \alpha_F(U_4)$, 进而得到所有竞聘者的排序结果为 $A_3 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_2 \sim A_4$, 因此可以考虑选择竞聘者 A_3 担任该公司的 CIO.

5 结 论

本文提出了一种基于前景理论的决策分析方法以解决考虑决策者给出单一与组合指标期望情形的多指标决策问题. 该方法依据前景理论, 将决策者给出的单一与组合指标期望视为参照点, 分别计算各方案针对各单一与各组合指标期望的前景价值, 然后将原始决策问题转化为广义优序模糊约束满意问题, 并

在此基础上, 通过计算各方案针对相应推理准则的总体满意度对所有方案进行排序. 与已有方法不同的是, 本文着重考虑了决策者给出组合指标期望的情形, 为解决现实中考虑决策给出指标期望情形的多指标决策问题提供了一种新途径.

参考文献(References)

[1] 王坚强, 周玲. 基于前景理论的灰色随机多准则决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1658-1664.
(Wang J Q, Zhou L. Grey-stochastic multi-criteria decision-making approach based on prospect theory[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2010, 30(9): 1658-1664.)

[2] Liu P D, Jin F, Zhang X, et al. Research on the multi-attribute decision-making under risk with interval probability based on prospect theory and the uncertain linguistic variables[J]. Knowledge-based Systems, 2011, 24(4): 554-561.

[3] 张晓, 樊治平. 基于前景理论的风险型混合多属性决策方法[J]. 系统工程学报, 2012, 27(6): 772-781.
(Zhang X, Fan Z P. Method for risky hybrid multiple attribute decision making based on prospect theory[J]. J of Systems Engineering, 2012, 27(6): 772-781.)

[4] 张晓, 樊治平. 一种基于前景理论的风险型区间多属性决策方法[J]. 运筹与管理, 2012, 21(3): 44-50.
(Zhang X, Fan Z P. A method for risky interval multiple attribute decision making based on prospect theory[J]. Operations Research and Management Science, 2012, 21(3): 44-50.)

[5] Lotfi V, Stewart T J. An aspiration-level interactive model for multiple criteria decision making[J]. Computers & Operation Research, 1992, 19(7): 671-687.

[6] Sun M, Steuer R E. InterQuad: An interactive quad tree based procedure for solving the discrete alternative multiple criteria problem[J]. European J of Operational Research, 1996, 89(3): 462-472.

[7] Wang J, Zionts S. Web AIM: An online aspiration-level interactive method[J]. J of Multi-criteria Decision Analysis, 2005, 13(2/3): 51-63.

[8] Nowak M. INSDECM — An interactive procedure for stochastic multi criteria decision problems[J]. European J of Operational Research, 2006, 175(3): 1413-1430.

[9] Wang J, Zionts S. The aspiration level interactive method(AIM) reconsidered: Robustness of solutions[J]. European J of Operational Research, 2006, 175(2): 948-958.

[10] 李德清, 崔红梅, 李洪兴. 一种基于令人满意原则的多因素决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 12(1): 104-109.
(Li D Q, Cui H M, Li H X. A multiple decision making method based on satisfaction principle[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2003, 12(1): 104-109.)

[11] Fan Z P, Zhang X, Chen F D, et al. Multiple attribute decision making considering aspiration-levels: A method based on prospect theory[J]. Computers and Industrial Engineering, 2013, 65(2): 341-350.

[12] 胡军华, 陈晓红, 刘咏梅. 基于语言评价和前景理论的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(10): 1477-1482.
(Hu J H, Chen X H, Liu Y M. Multi-criteria decision making method based on linguistic evaluation and prospect theory[J]. Control and Decision, 2009, 24(10): 1477-1482.)

[13] 姜艳萍, 樊治平, 丛飞. 指标具有均衡期望的多指标决策方法[J]. 系统工程学报, 2011, 26(6): 743-751.
(Jiang Y P, Fan Z P, Cong F. Method for MADM with equilibrium aspiration on attributes[J]. J of Systems Engineering, 2011, 26(6): 743-751.)

[14] Luo X, Lee H, Leung H, et al. Prioritised fuzzy constraint satisfaction problems: Axioms, instantiation and validation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 136(2): 151-188.

[15] Skrbic S, Rackovic M, Takaci A. Prioritized fuzzy logic based information processing in relational databases[J]. Knowledge-based Systems, 2013, 38(1): 62-73.

[16] Takaci A. Schur-concave triangular norms: Characterization and application in PFCSP[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 155(1): 50-64.

[17] Takaci A, Skrbic S, Perovic A. Generalised prioritised fuzzy constraint satisfaction problem[C]. The 7th Int Symposium on Intelligent Systems and Informatics. Subotica: IEEE, 2009: 145-148.

[18] Dubois D, Fargier H, Prade H. Possibility theory in constraint satisfaction problems: handing priority, preference and uncertainty[J]. Applied Intelligence, 1996, 6(4): 287-309.

[19] Luo X, Jennings N R, Shadbolt N, et al. A fuzzy constraint based model for bilateral, multi-issue negotiations in semi-competitive environments[J]. Artificial Intelligence, 2003, 148(1): 53-102.

[20] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. Econometric, 1979, 47(2): 263-291.

[21] Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty[J]. J of Risk and Uncertainty, 1992, 5(4): 297-323.

[22] Abdellaoui M. Parameter-free elicitation of utility and probability weighting functions[J]. Management Science, 2000, 46(11): 1497-1512.

(责任编辑：李君玲)