

## 基于自适应神经网络的分数阶混沌系统滑模同步

张友安, 余名哲, 吴华丽

(海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264001)

**摘要:** 针对一类异结构不确定分数阶混沌系统的同步问题, 基于 Lyapunov 稳定性理论和分数阶系统稳定性理论, 提出一种神经网络结合干扰观测器的主动反馈控制方法. 设计一种非线性干扰观测器对干扰进行观测, 通过滑模控制对未观测出的部分干扰进行补偿, 最终实现分数阶混沌系统的同步. 与现有方法相比, 采用的模型更符合工程应用实际, 且不需要已知不确定项上界. 数值仿真验证了所提出方法的有效性和正确性.

**关键词:** 分数阶混沌系统; 滑模控制; 神经网络; 干扰观测器

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Sliding mode synchronization of fractional-order chaotic systems based on adaptive neural network

ZHANG You-an, YU Ming-zhe, WU Hua-li

(Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China.

Correspondent: YU Ming-zhe, E-mail: 18953589889@189.cn)

**Abstract:** Based on the Lyapunov stability theory and the fractional-order system stability theory, an active feedback control method using neural networks and disturbance observer is proposed for the robust synchronization of a class of different fractional-order chaotic systems with uncertainties. The disturbance observer is designed to observe the disturbance, and the disturbance that is not observed is compensated by sliding mode control. Finally, the synchronization of fractional-order chaotic systems is realized. Compared with the existed methods, the adopted models in the proposed approach are more in line with engineering practice, and the upper bounds of the uncertainties are not required. Numerical simulations verify the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** fractional-order chaotic system; sliding mode control; neural network; disturbance observer

### 0 引言

随着对分数阶微积分研究热潮的兴起<sup>[1]</sup>, 学者将分数阶微分算子引入混沌系统, 发现在一定条件下, 当阶次为分数时, 系统仍能维持混沌状态, 并且混沌吸引子比整数阶时更加复杂, 同时系统的动力学行为具有分数阶系统的某些特性<sup>[2]</sup>, 因此, 研究分数阶混沌系统的同步具有更重要的意义.

近年来涌现出很多对分数阶混沌系统进行同步和控制的方法, 这些方法的研究对象主要针对理想的分数阶混沌系统<sup>[3]</sup>, 或仅考虑了系统存在参数摄动的情况<sup>[4]</sup>. 文献[5]采用自适应控制方法, 基于分数阶系统稳定性理论和 Lyapunov 稳定性理论构建了一类  $J$  函数, 对存在未知参数的分数阶混沌系统进行同步控制, 该方法结构简单, 控制效果好, 但是当系统存在外部扰动时, 该方法不再适用; 文献[6]研究了一类异结

构分数阶混沌系统的投影同步, 基于分数阶系统稳定性理论和 Lyapunov 稳定性理论, 提出了一种证明分数阶系统稳定的新方法, 该方法的研究对象模型为理想系统; 文献[7]基于正交多项式展开方法, 将分数阶系统还原为等价的确定性系统, 实现了存在参数摄动的分数阶混沌系统的同步, 该方法的缺点是鲁棒性不强; 文献[8]针对存在多种不确定因素影响下的分数阶混沌系统, 基于 Mittag-Leffler 稳定性理论, 实现了有限时间同步, 但是这种方法要求系统的不确定项上界已知.

可以看出, 分数阶混沌系统的同步有其特殊性, 特别是在考虑不确定因素的影响之后, 同步控制更加困难. 文献[9]采用神经网络和干扰观测器的方法, 实现了存在多种不确定性因素影响下的同结构整数阶时滞混沌系统同步, 该方法鲁棒性强, 可以抑制包括

收稿日期: 2014-03-19; 修回日期: 2014-05-30.

作者简介: 张友安(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事导航、制导及智能控制等研究; 余名哲(1982—), 男, 博士生, 从事混沌同步及非线性控制的研究.

未知时滞项在内的多种不确定因素的影响,但是这种方法并不适用于分数阶混沌系统的同步.为了提高保密通信的安全性,同时更加符合工程应用的实际情况,本文综合考虑了分数阶混沌系统存在未知参数、非线性不确定项和外部扰动等多种不确定性因素影响的情况,针对以往分数阶混沌同步方法中存在的不足,在文献[9]的基础上提出了一种适用于分数阶混沌同步的设计非线性干扰观测器的方法,该方法用于观测系统的扰动,并对未观测到的部分干扰采用滑模控制进行补偿.与现有方法相比,本文方法考虑的模型更符合工程应用的实际情况,且不需要已知不确定项的上界.

## 1 问题描述

考虑具有如下形式的分数阶混沌系统:

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A})\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{d}_x(t), \quad (1)$$

Riemann-Liouville 分数阶导数为

$$D^\alpha x = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau.$$

其中:  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $\Gamma(\cdot)$  为 Gamma 函数,  $\mathbf{x}(t)$  为系统  $n$  维状态向量,  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为系统的参数矩阵,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^n$  为系统未知光滑非线性函数,  $\Delta \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为系统适当维的参数摄动矩阵,  $\mathbf{d}_x(t) \in \mathbf{R}^n$  为未知有界的外部扰动.

现将系统(1)作为驱动系统,建立具有控制输入的响应系统如下:

$$D^\alpha \mathbf{y}(t) = (\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B})\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{d}_y(t) + \mathbf{u}(t). \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{y}(t)$  为响应系统的状态向量,  $\mathbf{B}$  和  $\Delta \mathbf{B}$  分别为响应系统的参数矩阵和参数摄动矩阵,  $\mathbf{g}(\mathbf{y}, t)$  为未知光滑非线性函数,  $\mathbf{d}_y(t)$  为外部扰动,  $\mathbf{u}(t)$  为待设计的控制输入.

定义驱动系统与响应系统的误差为  $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ , 本文的目的就是设计控制器  $\mathbf{u}(t)$ , 使得当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $\|\mathbf{e}\| \rightarrow 0$ , 即实现驱动与响应系统同步.

考虑驱动系统(1)和响应系统(2), 可以得到分数阶同步误差系统方程如下:

$$\begin{aligned} D^\alpha \mathbf{e} = & \\ & \mathbf{B}\mathbf{e} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{x} + \\ & \mathbf{d}_y - \mathbf{d}_x + \Delta \mathbf{B}\mathbf{y} - \Delta \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u} = \\ & \mathbf{B}\mathbf{e} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{D} + \mathbf{d} + \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (3)$$

其中:  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{B}\mathbf{y} - \Delta \mathbf{A}\mathbf{x}$  为系统内部与状态相关的不确定项,  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_y - \mathbf{d}_x$  为外部复合干扰.

引理 1<sup>[10]</sup> 考虑分数阶系统

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t).$$

其中:  $0 < \alpha < 1$ ,  $\mathbf{x}(t)$  为系统的状态向量,  $\mathbf{C}$  为系统参数矩阵. 当  $0 < \alpha < 1$  时, 若系统的参数矩阵  $\mathbf{C}$  的所有特征值的实部都不大于零, 则该系统是渐近稳定的.

引理 2<sup>[11]</sup> 对于任意有界初始条件, 如果存在一个  $C^1$  连续且正定的 Lyapunov 函数  $V(\mathbf{x})$ , 并且满足  $\pi_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(\mathbf{x}) \leq \pi_2(\|\mathbf{x}\|)$ , 使得如下不等式成立:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\kappa V(\mathbf{x}) + c,$$

则  $\mathbf{x}(t)$  是一致有界的. 其中  $\pi_1(\cdot)$  和  $\pi_2(\cdot)$  为  $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  的  $K$  类函数, 且有  $c > 0$ ,  $\kappa > 0$ .

## 2 RBF 神经网络和干扰观测器设计

参照文献[9], 对同步误差系统(3)进行分析, 显然式(3)中与状态相关的非线性项  $\mathbf{D}$  未知, 采用 RBF 神经网络对其学习逼近是十分合适的.

RBF 神经网络是一种具有单隐层的简单 3 层前馈网络, 对  $\mathbf{D}$  的逼近可表示为

$$\mathbf{D} = \mathbf{W}^{*\text{T}} \Phi(\mathbf{Z}) + \varepsilon. \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{W}^* \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为 RBF 神经网络的最优权值向量矩阵;  $\mathbf{Z} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]^{\text{T}}$  为神经网络的输入,  $\Phi(\mathbf{Z}) \in \mathbf{R}^n$  为神经网络的径向基函数向量, 并且根据神经网络的性质, 有  $\|\Phi(\mathbf{Z})\| \leq \eta$ ,  $\eta$  为大于零的常数;  $\varepsilon$  为对  $\mathbf{D}$  的逼近误差, 且有  $\|\varepsilon\| \leq \bar{\varepsilon}$ ,  $\bar{\varepsilon}$  为最小逼近误差.

$\mathbf{D}$  的估计  $\hat{\mathbf{D}}$  可描述如下:

$$\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{W}}^{\text{T}} \Phi(\mathbf{Z}), \quad (5)$$

$\hat{\mathbf{D}}$  为权值向量  $\mathbf{D}$  的估计, 其更新律选择为

$$\dot{\hat{\mathbf{W}}} = \Gamma(\Phi(\mathbf{Z})\mathbf{s}^{\text{T}} - \sigma \hat{\mathbf{W}}). \quad (6)$$

其中:  $\Gamma$  为权值矩阵,  $\sigma$  为正常数. 将式(4)代入(3), 系统误差方程可改写为

$$\begin{aligned} D^\alpha \mathbf{e} = & \\ & \mathbf{B}\mathbf{e} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{W}^{*\text{T}} \Phi(\mathbf{Z}) + \varepsilon + \mathbf{d} + \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (7)$$

接下来设计干扰观测器来逼近复合干扰项  $\mathbf{d}$ . 这里首先将控制器设计成两部分: 一部分为反馈控制项  $\mathbf{u}_1$ , 另一部分为干扰观测补偿项  $\mathbf{u}_2$ , 即

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t), \quad (8)$$

其中设计  $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{B}\mathbf{e} - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . 将控制器(8)代入(7), 误差系统变为

$$D^\alpha \mathbf{e} = \mathbf{W}^{*\text{T}} \Phi(\mathbf{Z}) + \varepsilon + \mathbf{d} + \mathbf{u}_2(t). \quad (9)$$

下面设计干扰观测器. 对于同步误差系统(9), 引入辅助变量如下:

$$\delta = \mathbf{d} - \mathbf{K}D^{\alpha-1}\mathbf{e}, \quad (10)$$

其中  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T > 0$  为干扰观测器的增益矩阵. 对式 (10) 两边关于时间求导, 并将式 (9) 和 (10) 代入, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\delta}} &= \dot{\mathbf{d}} - \mathbf{K}D^\alpha \mathbf{e} = \\ \dot{\mathbf{d}} - \mathbf{K}(\mathbf{W}^{*T} \Phi(\mathbf{Z}) + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\delta} + \mathbf{K}D^{\alpha-1} \mathbf{e} + \mathbf{u}_2). \end{aligned} \quad (11)$$

设计中间变量  $\delta$  的观测器如下:

$$\dot{\hat{\delta}} = -\mathbf{K}(\hat{\delta} + \mathbf{K}D^{\alpha-1} \mathbf{e} + \mathbf{u}_2), \quad (12)$$

其中  $\hat{\delta}$  为中间变量  $\delta$  的估计值. 如此设计  $\hat{\delta}$  的目的是为了使  $\dot{\hat{\delta}}$  可以实现, 并且使后面  $\dot{\hat{\delta}}$  中不出现  $\mathbf{K}D^{\alpha-1} \mathbf{e}$  和  $\mathbf{u}_2$  项, 有利于定理 1 的证明.

由式 (10) 可以得到干扰估计

$$\hat{\mathbf{d}} = \hat{\delta} + \mathbf{K}D^{\alpha-1} \mathbf{e}. \quad (13)$$

定义干扰逼近误差  $\tilde{\mathbf{d}}$ , 考虑式 (10) 和 (13), 有

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}} = \delta - \hat{\delta} = \tilde{\delta}. \quad (14)$$

对式 (14) 关于时间求导, 将式 (11) 和 (12) 代入, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{d}}} &= \dot{\tilde{\delta}} = \dot{\delta} - \dot{\hat{\delta}} = \\ \dot{\mathbf{d}} - \mathbf{K}(\mathbf{W}^{*T} \Phi(\mathbf{Z}) + \boldsymbol{\varepsilon} + \tilde{\delta}). \end{aligned} \quad (15)$$

**假设 1** 外部扰动  $\mathbf{d}_x(t)$  和  $\mathbf{d}_y(t)$  的变化率有界, 则复合扰动  $\mathbf{d}(t)$  的变化率也是有界的, 令  $\|\dot{\mathbf{d}}(t)\| \leq \omega$ , 其中  $\omega$  为未知正常数.

综合以上分析, 可以归纳如下定理来保证干扰观测器 (12) 和 (13) 的收敛性.

**定理 1** 对于同步误差系统 (9), 设计式 (12) 和 (13) 所示的干扰观测器. 当设计干扰反馈增益矩阵  $\mathbf{K} > 1.5\mathbf{I}_{n \times n}$  时, 估计值  $\hat{\mathbf{d}}(t)$  能以有界误差逼近  $\mathbf{d}(t)$ .

**证明** 构建 Lyapunov 函数如下:

$$V_D = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{d}}^T \tilde{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \tilde{\delta}^T \tilde{\delta}.$$

对上式两边关于时间求导, 并将式 (15) 代入, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_D &= \tilde{\delta}^T \dot{\tilde{\delta}} = \\ \tilde{\delta}^T \dot{\mathbf{d}} - \tilde{\delta}^T \mathbf{K} \tilde{\delta} - \tilde{\delta}^T \mathbf{K} \mathbf{W}^{*T} \Phi(\mathbf{Z}) - \tilde{\delta}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned}$$

由式  $a^2 + b^2 \geq \pm 2ab$ , 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_D &\leq \left( \frac{1}{2} \tilde{\delta}^T \tilde{\delta} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}^T \dot{\mathbf{d}} \right) - \tilde{\delta}^T \mathbf{K} \tilde{\delta} + \\ &\left[ \frac{1}{2} \tilde{\delta}^T \tilde{\delta} + \frac{1}{2} (\eta^2 \|\mathbf{K}\|^2 \|\mathbf{W}^*\|^2) \right] + \\ &\left[ \frac{1}{2} \tilde{\delta}^T \tilde{\delta} + \frac{1}{2} (\|\mathbf{K}\|^2 \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2) \right] \leq \\ &-\tilde{\delta}^T (\mathbf{K} - 1.5\mathbf{I}_{n \times n}) \tilde{\delta} + \\ &\frac{1}{2} (\omega^2 + \eta^2 \|\mathbf{K}\|^2 \|\mathbf{W}^*\|^2 + \|\mathbf{K}\|^2 \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2). \end{aligned}$$

由上式结果结合引理 2 可知, 选取观测器增益  $\mathbf{K} > 1.5\mathbf{I}_{n \times n}$  可使观测误差  $\tilde{\mathbf{d}}$  渐近收敛. 分析结果可知, 观测器增益  $\mathbf{K}$  的取值能够影响干扰逼近效果.  $\square$

### 3 同步控制器设计

参照文献 [12], 选取滑模面如下:

$$\mathbf{s} = D^{\alpha-1} \mathbf{e} + \int_0^t \mathbf{e}(\tau) d\tau. \quad (16)$$

对式 (16) 两边关于时间求导, 可得

$$\dot{\mathbf{s}} = D^\alpha \mathbf{e} + \mathbf{e}. \quad (17)$$

当系统发生滑模运动时, 需满足条件  $\mathbf{s} = 0$  和  $\dot{\mathbf{s}} = 0$ , 结合式 (17) 可得

$$D^\alpha \mathbf{e} = -\mathbf{e}. \quad (18)$$

由引理 1 可知, 随着  $t \rightarrow \infty$ , 式 (18) 是渐近稳定的. 又由滑模运动对干扰的不敏感特性可知, 系统具有较好的鲁棒性.

由以上的分析可知, 所设计的滑模面将分数阶问题转化为整数阶的稳定性问题, 此时运用引理 2 是合理的. 为了保证同步误差的收敛性, 可归结如下定理.

**定理 2** 当控制器设计如下式时:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \\ &-(\mathbf{B} + 1)\mathbf{e} - \hat{\mathbf{W}}^T \Phi(\mathbf{Z}) - \mathbf{L}\mathbf{s} - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \hat{\mathbf{d}}, \end{aligned} \quad (19)$$

误差系统 (9) 状态将渐近收敛到滑模面  $\mathbf{s} = 0$ , 即按预设条件给定的驱动系统 (1) 和响应系统 (2) 可以实现同步, 其中  $\mathbf{L}$  为适当维反馈增益正定矩阵.

**证明** 将设计的控制器  $\mathbf{u}(t)$  代入式 (7), 可得

$$D^\alpha \mathbf{e} = -\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{W}}^T \Phi(\mathbf{Z}) + \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{L}\mathbf{s} + \tilde{\mathbf{d}}, \quad (20)$$

其中  $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^* - \hat{\mathbf{W}}$ .

构造 Lyapunov 函数如下:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\mathbf{W}}) + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{d}}^T \tilde{\mathbf{d}}.$$

对上式两边关于时间求导, 并考虑式 (17)、(6) 和 (20), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} + \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}) + \tilde{\mathbf{d}}^T \dot{\tilde{\mathbf{d}}} = \\ &\mathbf{s}^T (-\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{W}}^T \Phi(\mathbf{Z}) + \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{L}\mathbf{s} + \tilde{\mathbf{d}} + \mathbf{e}) - \\ &\text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \Gamma^{-1} \Gamma(\Phi(\mathbf{Z})\mathbf{s}^T - \sigma \tilde{\mathbf{W}})) + \dot{V}_D = \\ &-\mathbf{s}^T \mathbf{L}\mathbf{s} + \mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{d}} + \text{tr}(\sigma \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}}) + \\ &\tilde{\delta}^T (\dot{\mathbf{d}} - \mathbf{K}(\boldsymbol{\varepsilon} + \tilde{\delta} + \mathbf{W}^{*T} \Phi(\mathbf{Z}))). \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \Phi(\mathbf{Z})\mathbf{s}^T) &= \\ \text{tr}(\mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{W}}^T \Phi(\mathbf{Z})) &= \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{W}}^T \Phi(\mathbf{Z}), \end{aligned}$$

又依据式  $a^2 + b^2 \geq \pm 2ab$ , 有

$$\begin{aligned} \text{tr}(\sigma \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}}) &= \text{tr}(\sigma \tilde{\mathbf{W}}^T (\mathbf{W}^* - \tilde{\mathbf{W}})) = \\ \text{tr}(\sigma \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{W}^* - \sigma \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}}) &\leq \\ -\frac{1}{2} \sigma \|\tilde{\mathbf{W}}\|^2 + \frac{1}{2} \sigma \|\mathbf{W}^*\|^2, \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -s^T L s - \frac{1}{2} \sigma \|\tilde{W}\|^2 + \frac{1}{2} \sigma \|W^*\|^2 + \left(\frac{1}{2} s^T s + \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon\right) + \\ & \left(\frac{1}{2} s^T s + \frac{1}{2} \tilde{d}^T \tilde{d}\right) + \tilde{d}^T (\dot{d} - K(W^{*T} \Phi(Z) + \varepsilon + \tilde{d})) \leq \\ & -s^T (L - I_{n \times n}) s - \tilde{d}^T (K - 2I_{n \times n}) \tilde{d} - \frac{1}{2} \sigma \|\tilde{W}\|^2 + \\ & \frac{1}{2} (\omega^2 + \eta^2 \|K\|^2 \|W^*\|^2 + \|K\|^2 \|\varepsilon\|^2 + \\ & \|\tilde{\varepsilon}\|^2 + \sigma \|W^*\|^2). \end{aligned}$$

由引理2可知, 当观测器增益  $K > 2I_{n \times n}$  以及设定的反馈增益矩阵  $L$  满足  $L - I_{n \times n} > 0$  时, 滑模曲面  $s$  和观测误差  $\tilde{d}$  是渐近收敛的, 即驱动系统和响应系统达到同步. 为了提高系统的鲁棒性, 可以适当增大  $L$ .  $\square$

**注1** 神经网络逼近误差  $\varepsilon$  为最优逼近时是一个当相小的量, 根据神经网络逼近原理可使  $\varepsilon$  尽可能小, 因此本文考虑到  $\varepsilon$  不会对系统稳定性造成影响, 未对其进行处理. 也可以将其纳入复合误差  $d$  中, 利用干扰观测器进行观测.

### 4 数值仿真

为了验证上文所设计的神经网络干扰观测器和控制策略的有效性, 以异结构的分数阶 Lorenz 系统和分数阶 Chen 系统分别作为驱动系统和响应系统为例, 进行数值仿真. 带参数摄动和干扰的分数阶 Lorenz 混沌系统为

$$\begin{aligned} D^\alpha x = & \left( \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix} \right) x + \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.7 \sin(t) \\ 0.5 \sin(t) \\ 0.4 \sin(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

带控制输入的不确定分数阶 Chen 系统为

$$\begin{aligned} D^\alpha y = & \left( \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 \\ -7 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.05 & 0.05 & 0 \\ 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \end{bmatrix} \right) y + \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1 y_3 \\ y_1 y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \sin(t) \\ 0.4 \cos(t) \\ 0.6 \sin(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

驱动系统的初始值选为  $(2, 4, 1)^T$ , 响应系统的初始值选为  $(4, 3, 2)^T$ , 在  $\alpha = 0.93$  时, 主、从系统是混沌的<sup>[13]</sup>. 选取控制器参数矩阵

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \Gamma = I.$$

为了使驱动系统和响应系统达到同步, 设计滑模曲面(16), 并采用RBF神经网络和干扰观测器逼近不确定项, RBF神经网络权值的自适应律选取式(6), 干扰观测器设计为式(12)、(13), 控制器设计为式(19), 采用预估-校正法进行数值仿真, 仿真结果如图1~图4所示.

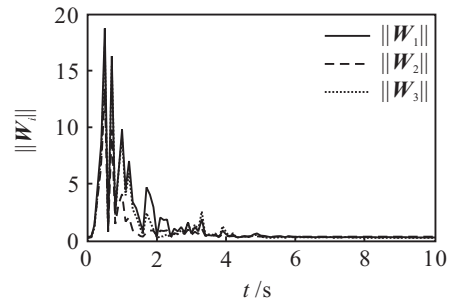


图1 神经网络权值向量  $W_i$  的范数

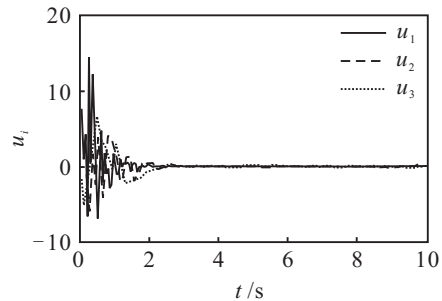


图2 控制量  $u_i$

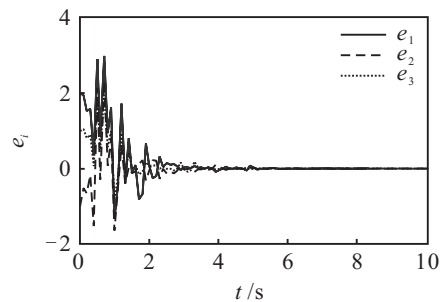


图3 误差向量  $e_i$

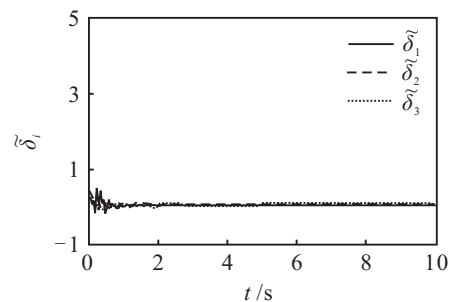


图4 干扰观测误差  $\tilde{\delta}_i$

从图1可以看出, 神经网络权值在有限时间内稳定在一有限范围内, 说明本文对权值的设计是合理的;

图2为控制输入沿时间的变化规律,可见该控制为有界控制,是可以实现的;图3为同步误差变化曲线,在有限时间内,同步误差在控制输入 $u$ 的作用下收敛到零,即驱动系统与响应系统达到同步;图4为干扰观测器对干扰的观测误差 $\tilde{\delta}$ 的变化曲线,从图4可以看出, $\tilde{\delta}$ 随时间收敛于一有界范围,表明所设计的干扰观测器能较好地逼近外部干扰。

就给定的两个不确定分数阶混沌系统的仿真情况而言,所设计的同步控制器使驱动系统与响应系统在有限时间内达到同步,且对系统的不确定性具有较好的抑制能力。

## 5 结 论

本文针对现有的分数阶混沌系统同步研究中存在的不足,研究了在异结构的分数阶混沌系统既存在参数不确定性、也存在外部时变干扰和非线性不确定项影响的情况下,如何实现系统同步的问题。首先,对系统非线性不确定部分采用RBF神经网络方法进行逼近;然后,对外部干扰部分设计了干扰观测器进行观测;最后,在处理不确定项的基础上,设计了主动反馈滑模控制器,采用滑模控制对未观测到的部分干扰进行补偿,从而实现系统的鲁棒同步控制。数值仿真结果与理论分析的结论一致,表明了所设计的控制方法的有效性和正确性,该方法既具有重要的理论意义,也具有广阔的应用前景。

## 参考文献(References)

- [1] Machado J T, Kiryakova V, Mainardi F. Recent history of fractional calculus[J]. *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16(3): 1140-1153.
- [2] Petráš I. Fractional-order chaotic systems[M]. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2011: 103-184.
- [3] Zhang R, Yang S. Stabilization of fractional-order chaotic systems via a single state adaptive-feedback controller[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 68(1/2): 45-51.
- [4] 董俊, 张广军, 姚宏, 等. 异结构的分数阶超混沌系统函数投影同步及参数辨识[J]. *电子与信息学报*, 2013, 35(6): 1371-1375.  
(Dong J, Zhang G J, Yao H, et al. Function projective synchronization and parameter identification of different fractional-order hyper-chaotic systems[J]. *J of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(6): 1371-1375.)
- [5] 李冬, 邓良明, 杜永霞, 等. 分数阶超混沌Chen系统和分数阶超混沌Rossler系统的异结构同步[J]. *物理学报*, 2012, 61(5): 050502.  
(Li D, Deng L M, Du Y X, et al. Synchronization for fractional order hyper-chaotic Chen system and fractional order hyper-chaotic Rossler system with different structure[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(5): 050502.)
- [6] 黄丽莲, 马楠. 一种异结构分数阶混沌系统投影同步的新方法[J]. *物理学报*, 2012, 61(16): 160510.  
(Huang L L, Ma N. A new method for projective synchronization of different fractional order chaotic systems[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(16): 160510.)
- [7] Ma S J, Shen Q, Hou J. Modified projective synchronization of stochastic fractional order chaotic systems with uncertain parameters[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(1/2): 93-100.
- [8] Ahababa M P. Finite-time chaos control and synchronization of fractional-order nonautonomous chaotic(hyperchaotic) systems using fractional nonsingular terminal sliding mode technique[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69(1/2): 247-261.
- [9] Mei R, Wu Q X, Jiang C S. Robust adaptive backstepping control for a class of uncertain nonlinear systems based on disturbance observers[J]. *Science China-Information Science*, 2010, 53(6): 1201-1215.
- [10] Matignon D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing[C]. *Computational Engineering in Systems Applications*. Paris: Gerf EC Lille, Villeneuve D'Ascq, France, 1996: 963-968.
- [11] Chen M, Ge S S, How B. Robust adaptive neural network control for a class of uncertain MIMO nonlinear systems with input nonlinearities[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2010, 21(5): 796-812.
- [12] 黄丽莲, 齐雪. 基于自适应滑模控制的不同维分数阶混沌系统的同步[J]. *物理学报*, 2013, 62(8): 080507.  
(Huang L L, Qi X. The synchronization of fractional order chaotic systems with different orders based on adaptive sliding mode control[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(8): 080507.)
- [13] 胡建兵, 韩焱, 赵灵冬. 分数阶系统的一种稳定性判定定理及在分数阶统一混沌系统同步中的应用[J]. *物理学报*, 2009, 58(7): 4402-4407.  
(Hu J B, Han Y, Zhao L D. A stability theorem about fractional systems and synchronizing fractional unified chaotic systems based on the theorem[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(7): 4402-4407.)

(责任编辑: 闫 妍)