

# 状态向量的扩展有限元方法研究

徐建新<sup>1)</sup> 曹旋<sup>2)</sup> 卿光辉<sup>3)</sup>

(中国民航大学航空工程学院, 天津 300300)

**摘要** 利用哈密顿正则方程的半解析法计算单元位移场和应力场, 可以得到精度比较高的解. 但此半解析法在计算应力尖峰区域时, 该区域要细化网格. 当裂纹扩展时, 又要重新生成刚度矩阵进行求解, 导致求解效率降低. 利用扩展有限元处理裂纹的不连续性, 当裂纹扩展时可以避免网格的重构. 为充分利用状态向量方程和扩展有限元的优势, 该文将两者结合起来分析材料的断裂问题: 计算应力强度因子和模拟裂纹扩展. 最后通过算例分析, 验证了该文提出方案的可行性.

**关键词** 哈密顿系统, 扩展有限元, 应力强度因子, 裂纹, 裂纹扩展

中图分类号: O242.21 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-14-203

## THE EXTENDED FINITE ELEMENT METHOD BASED ON THE STATE VECTOR

XU Jianxin<sup>1)</sup> CAO Xuan<sup>2)</sup> QING Guanghui<sup>3)</sup>

(Aeronautical Engineering College of Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

**Abstract** The displacement field and the stress field are computed by a semi-analytical method based on the Hamilton canonical equation, and the results are found very satisfactory. But when the tip field is considered, the tip field must be more finely meshed. Both the stiffness matrix and the stress field must be calculated anew when the crack propagates, which makes very low resolution efficiency. Based on the extended finite element method, the discontinuity of the crack could be taken care of, to avoid the re-meshing. In order to take a full advantage of the Hamilton system and the extended finite element method, this paper combines them to analyze the fracture problem, such as the calculation of the stress intensity factor and the simulation of the crack propagation. The results from the case analysis demonstrate that the method is feasible.

**Key words** Hamilton system, extended finite element method, stress intensity factor, crack, crack propagation

哈密顿系统最早是由哈密顿在几何光学研究中建立的, 根据光学与力学之间的深刻联系, 哈密顿理论在经典力学中也得到了广泛的应用. 近些年来, 在弹性力学中引入哈密顿求解体系, 显示了其强大的活力.

扩展有限元法<sup>[1-2]</sup> (extended finite element method, XFEM) 是在标准有限元方法的框架下, 提出来的一种用于解决不连续问题的数值方法, 在有限元近似函数中增加反映不连续问题的附加函数, 具有划分网格与结构内部的几何和物理界面无关的

2014-06-03 收到第 1 稿, 2014-07-23 收到修改稿.

1) 徐建新, 教授, 博士, 从事飞机复合材料结构设计、复合材料疲劳研究. E-mail: Jxx\_cauc@163.com

2) 曹旋, 硕士, 从事飞机复合材料的结构工程计算研究. E-mail: cao\_xuanzi@163.com

3) 卿光辉, 教授, 博士, 从事飞机复合材料力学性能分析、复合材料结构设计研究. E-mail: qingluke@126.com

**引用格式:** 徐建新, 曹旋, 卿光辉. 状态向量的扩展有限元方法研究. 力学与实践, 2015, 37(2): 214-217, 226

Xu Jianxin, Cao Xuan, Qing Guanghui. The extended finite element method based on the state vector. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(2): 214-217, 226

优点, 避免了常规有限元方法中的网格重构, 简化了裂纹扩展过程的分析过程 [3-5].

本文在前人的基础上尝试在哈密顿体系下建立哈密顿 [6-7] 正则方程的扩展有限元半解析法, 从而实现将哈密顿正则方程求解单元位移和应力的优势与扩展有限元法处理裂纹不连续问题的优越性相结合, 寻求一种新的计算方法, 最后通过典型算例计算应力强度因子, 并且进一步模拟裂纹的扩展, 验证了本方法的可行性.

### 1 单位分解函数

为了描述结构的不连续性, 在常规有限元中增加裂尖渐进函数和不连续函数, 渐进函数用来描述裂尖的奇异性, 不连续函数用来描述被裂纹截断区域的间断特性. 所以单位分解函数的表达式为 [8]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) = & \sum N_i(x, y)\mathbf{u}_i + \\ & \sum_j N_j(x, y)\mathbf{H}(x)\mathbf{a}_j + \\ & \sum_k N_k(x, y) \sum_{\alpha=1}^4 \mathbf{F}_\alpha(x, y)\mathbf{b}_k^\alpha \end{aligned} \quad (1)$$

式中,  $i$  是所有节点集合,  $j$  是有裂纹穿过单元的节点集合,  $k$  是含裂纹尖端单元的节点集合,  $N_i, N_j, N_k$  分别是对应节点形函数,  $\mathbf{u}_i, \mathbf{a}_j, \mathbf{b}_k^\alpha$  分别为对应节点的位移.  $H(x)$  为跳跃函数, 反映裂纹面位移的不连续性

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{裂纹上方, 即 } (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \\ -1 & \text{裂纹下方, 即 } (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n} < 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{x}$  是高斯点,  $\mathbf{x}^*$  是裂纹面上离  $\mathbf{x}$  最近一点,  $\mathbf{n}$  是  $\mathbf{x}^*$  处垂直于裂纹的法向量. 图 1 为裂纹面及裂纹尖端在有限元网格中的示意图.

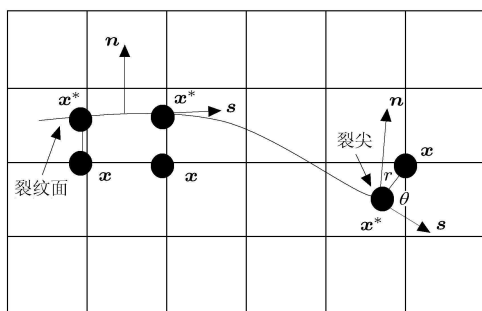


图 1 裂纹在有限元网格中的示意图

### 裂尖渐进函数

$$\mathbf{F}_\alpha(x, y) = \left[ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad (3)$$

式中,  $r, \theta$  为原点定义在裂纹尖端的极坐标值.

### 2 状态向量

对于各向同性、正交异性或各项异性弹性体, 修正后的 H-R 变分原理可表示为 [9-11]

$$\begin{aligned} \Pi = & \iiint_V \left( \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z} - \mathbf{H} \right) dV - \iint_{S_\sigma} \bar{\mathbf{T}}^T \mathbf{Q} dS - \\ & \iint_{S_u} \mathbf{T}^T (\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{Q}}) dS \end{aligned}$$

式中,  $\mathbf{Q} = [u \ v \ w]^T$ ,  $u, v$  和  $w$  分别是  $x, y$  和  $z$  这 3 个坐标方向上的位移分量;  $\mathbf{P} = [\sigma_{xz} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zz}]^T$ ,  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  和  $\sigma_{zz}$  为结构的平面外应力分量;  $\mathbf{H}$  是哈密顿函数,  $V$  为结构体积,  $\mathbf{T} = [T_x \ T_y \ T_z]^T$ ,  $T_x, T_y$  和  $T_z$  分别为  $x, y$  和  $z$  这 3 个坐标方向上的外力,  $S$  为结构的表面积.

对任一点上的  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  用形函数表示

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_e \\ \mathbf{Q}_e \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{N} = \text{diag}[\varphi]_{3 \times 3}$ ,  $\mathbf{P}_e = [\sigma_{xz}^e \ \sigma_{yz}^e \ \sigma_{zz}^e]^T$ ,  $\mathbf{Q}_e = [u^e \ v^e \ w^e]^T$ ,  $\phi(x) = \{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)\}^T$  为对应节点位移向量的形函数.

将式 (5) 代入式 (4), 进行变分并分步积分, 暂不考虑边界项, 得到哈密顿单元控制微分方程即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^e \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}^e(z) \\ \mathbf{Q}^e(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e \\ \mathbf{K}_{21}^e & \mathbf{K}_{22}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}^e(z) \\ \mathbf{Q}^e(z) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式中,  $\mathbf{M}^e, \mathbf{K}^e, \mathbf{F}^e$  的具体形式见文献 [10].

再将式 (6) 进一步按照一般有限元法组装, 可以得到单层板的控制微分方程, 即状态向量方程

$$\frac{\partial \mathbf{H}_m(z)}{\partial z} = \mathbf{K}_m \mathbf{H}_m(z) + \mathbf{G}_m \quad (7)$$

式中  $m$  表示第  $m$  板层. 然后通过求解式 (7), 得到每层板的位移和应力. 值得提出的是求解式 (7) 后的标准形式为

$$\mathbf{H}(z) = e^{K_m z} \mathbf{H}(0) + \int_0^z e^{K_m(z-\tau)} \mathbf{G}_m(\tau) d\tau \quad (8)$$

计算式 (8) 中的  $e^{K_m z}$  采用精细积分法计算<sup>[12]</sup>, 第 2 项的积分项采用五点抛物线规则计算.

### 3 计算应力强度因子

要模拟裂纹的开裂, 就必须先计算应力强度因子, 在本文中采用相互作用积分计算应力强度因子. 相互作用积分是一个在包含裂纹尖端的回路  $\Gamma$  上的能量积分, 它的表达式为<sup>[13-15]</sup>

$$I = \int_{\Gamma} \left[ W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial(u_i^{(2)})}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial(u_i^{(1)})}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (9)$$

其中,  $W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}$ , 状态 1 ( $\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}$ ) 是真实应力-变形场的变量, 状态 2 ( $\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}$ ) 是附加应力-变形场的变量.

式 (9) 写成与应力强度因子的关系式

$$I = \frac{2}{E^*} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) \quad (10)$$

其中,  $E^* = E$  (平面应力),  $E^* = E/(1-\mu^2)$  (平面应变). (1) 若令:  $K_I^{(2)} = 1, K_{II}^{(2)} = 0$  可以得到状态 1 的 I 型的应力强度因子  $K_I^{(1)}$ . (2) 同理若令  $K_I^{(2)} = 0, K_{II}^{(2)} = 1$ , 就可以得到 1 状态的 II 型应力强度因子  $K_{II}^{(1)}$ .

### 4 裂纹开裂准则

由哈密顿体系下的扩展有限元计算得到应力场和位移场后, 可以采用断裂力学的方法进行裂纹扩展分析. 模拟裂纹扩展需要解决 3 个问题: (1) 裂纹扩展的条件; (2) 裂纹扩展的方向; (3) 裂纹扩展的步长. 本文采用最大周向拉应力准则解决前 2 个问题, 裂纹开裂步长通常采用 Paris 公式<sup>[16-17]</sup> 和预先设定.

根据文献 [16], 裂纹周向和切向应力表达式为

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I(1 + \cos \theta) - 3K_{II} \sin \theta] \quad (11)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1)] \quad (12)$$

当周向应力达到最大时, 裂纹将沿着垂直于周向应力的方向扩展, 此时径向应力为 0, 周向应力为主应力, 所以令  $\tau_{r\theta} = 0$ , 得到确定开裂角  $\theta_0$  的方程

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II}(3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (13)$$

求解式 (13) 得

$$\theta_0 = 2 \arctan \frac{1}{4} \left[ K_I/K_{II} \pm \sqrt{(K_I/K_{II})^2 + 8} \right] \quad (14)$$

将式 (14) 代入式 (10), 便得到最大周向拉应力  $\sigma_{\theta \max}$ .

当  $\sigma_{\theta_1 \max} = \sigma_{\theta_1 c} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{2\pi r_0}}$  时, 发生断裂, 因此相当应力强度因子

$$K_e = \cos \frac{\theta_0}{2} \left( K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right) = K_{Ic} \quad (15)$$

式 (15) 就是裂纹的扩展条件.

### 5 算例分析

**算例 1** 图 2 所示, 有一块尺寸为  $W \times L$  ( $W = 2 \text{ m}$ ,  $L = 4 \text{ m}$ ) 的板, 厚度为  $0.04 \text{ m}$ , 边界上受到单向拉伸应力  $\sigma = 1 \text{ MPa}$ , 在板的左右两边各有一条裂纹并位于板的中央, 长度为  $a = 0.5 \text{ m}$ , 板的弹性常数为:  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\mu = 0.3$ . 采用  $11 \times 23$  计算网格, 应力强度因子精确解为

$$\left. \begin{aligned} K_I &= F \sigma \sqrt{a\pi} \\ F &= 1.122 + 0.43 \left( \frac{a}{W} \right) - 4.79 \left( \frac{a}{W} \right)^2 + \\ &15.46 \left( \frac{a}{W} \right)^3 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

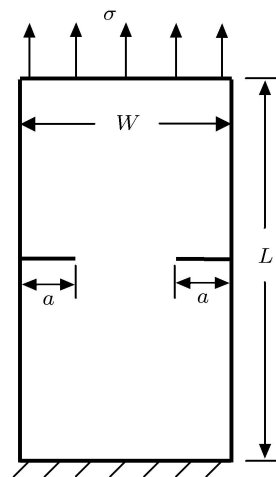


图 2 算例示意图

表 1 给出了不同的裂纹长度对应的无量纲裂纹强度因子  $\bar{K}_I = K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$  的表格的形式. 从表 1 中知, 本文得到解的误差小于 3%. 在划分网格较少 ( $11 \times 23$ ) (图 3) 的情况下可以得到较高的精度, 也表明, 导入哈密顿理论是可行的.

表 1 不同裂纹长度对应的  $\bar{K}_I$

裂纹长度 $a/m$	本文解	解析解	误差/%
0.2	1.117	1.133	1.3
0.3	1.102	1.131	2.5
0.4	1.119	1.140	1.8
0.5	1.159	1.172	1.1
0.6	1.226	1.237	0.9
0.7	1.341	1.349	0.6
0.8	1.556	1.517	2.7
0.9	1.757	1.754	0.2

表 2 左边裂尖位置坐标

步数	裂尖 ( $x$ 轴)	裂尖 ( $y$ 轴)
初始	0.5000	2.0000
1	0.5500	2.0013
2	0.5998	2.0053
3	0.6496	2.0103
4	0.6996	2.0103
5	0.7492	2.0040

表 3 右边裂尖位置坐标

步数	裂尖 ( $x$ 轴)	裂尖 ( $y$ 轴)
初始	1.5000	2.0000
1	1.4500	2.0013
2	1.4002	2.0053
3	1.3504	2.0103
4	1.3004	2.0103
5	1.2508	2.0040

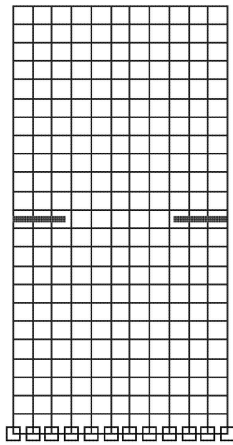


图 3 划分 11×23 网格

算例 2 将算例 1 的模型进一步模拟裂纹扩展, 采用 11×21 计算网格, 开裂步长  $\Delta h$  为 0.05 m.

图 4 为裂纹扩展路径 (开裂步数为: 5 步), 表 2 和表 3 分别是裂纹扩展过程中左裂尖位置的坐标和右裂尖位置的坐标, 从裂纹扩展图可知, 该裂纹扩展过程符合 I 型裂纹扩展特性, 几乎是沿着水平方向扩展, 并且扩展结果和文献 [5] 的结果相吻合.

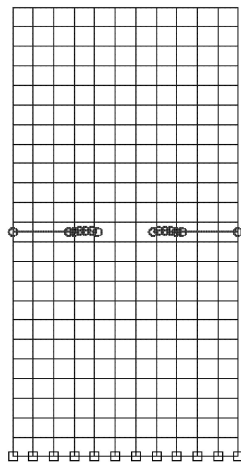


图 4 裂纹扩展路径

## 6 结 论

本文基于扩展有限元法和修正后的 H-R 变分原理, 分析材料的断裂问题, 推导了弹性力学的哈密顿状态向量方程, 此方程不仅可以同时得到单元的位移场和应力场而且在厚度方向是解析的, 考虑了模型上表面和下表面的约束问题, 使得求解更加精确, 扩展有限元方法的运用不仅能够处理裂纹的不连续性, 而且划分网格与裂纹的几何位置无关, 裂尖处不需要细化网格, 同时裂纹在发生扩展时, 不需要再一次网格重构, 提高了计算效率.

在数值算例中, 基于状态向量方程和扩展有限元方法, 研究了双边裂纹模型, 在划分网格较少的情况下, 计算了不同长度裂纹对应的应力强度因子, 求得的结果和精确解很接近, 表明了此方法的正确性. 而且进一步模拟了裂纹的扩展, 结果也和文献 [5] 一致. 研究表明, 基于哈密顿系统下的扩展有限元法, 在划分网格较少的情况下可以得到精度比较高的解, 是一种比较好的求解方法! 同时也为用此方法研究多裂纹情形提供了指导意义.

## 参 考 文 献

- 李录贤, 王铁军. 扩展有限元法 (XFEM) 及其应用. 力学进展, 2005, 35(1): 1-20
- Melenk JM, Babueska I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1): 289-314

(下转第 226 页)

治疗提供理论指导,是骨重建力学调控机制的补充.

本文仅讨论了静载荷对力学激励的影响,但人体受到的生理载荷主要是动载荷;同时考虑到骨骼的有生命这一特殊性,因此对于骨骼的破坏机制、力学感知机理及其自适应调控运作机制等方面还需要深入研究.

## 参考文献

- Pivonka P, Buenzli PR, Scheiner S, et al. The influence of bone surface availability in bone remodelling—a mathematical model including coupled geometrical and biomechanical regulations of bone cells. *Engineering Structures*, 2013, 47: 134-147
- 马宗民. 各向异性骨再造理论模型及骨质疏松模拟研究. [博士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2005
- 王璠. 骨质疏松与力学. *力学与实践*, 2004, 26(3): 94-95
- 杨桂通. 探索人体奥秘的古老故事——生物力学孕育期一瞥. *力学与实践*, 2004, 26(2): 80-83
- Stefan S, Peter P, Christian H. Coupling systems biology with multiscale mechanics, for computer simulations of bone remodeling. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2013, 254: 181-196
- Frost HM. Bone“mass”and the“mechanostat”: a proposal. *Anat Rec*, 1987, 219: 1-9
- Frost HM. Skeletal structural adaptations to mechanical usage (SATMU): 2. Redefining wolff’s law: the remodelling problem. *Anat Rec*, 1990, 226: 414-422
- Frost HM. Bone’s mechanostat: a 2003 update. *Anat Rec*, 2003, 275A: 1081-1101
- 朱东, 马宗民, 麻文焱等. 带有力学调控系统的各向异性骨再造模型. *生物医学工程学杂志*, 2006, 23(3): 525-529
- 刘鸿文主编. 材料力学 I (第 5 版). 北京: 高等教育出版社, 2011
- 刘鸿文主编. 材料力学 II (第 5 版). 北京: 高等教育出版社, 2011
- 钱英莉. 正畸力作用下尖牙移动过程的模拟研究. [硕士学位论文]. 成都: 四川大学, 2003
- 吴淑琴. 股骨皮质骨生物力学特性研究. *中北大学学报: 自然科学版*, 2012, 33(2): 216-220
- 赵宝林, 程杰平, 马洪顺等. 股骨头松质骨力学性质实验研究. *医用生物力学*, 2004, 18(4): 234-238
- Weinans H, Huiskes R, Grootenboer HJ. The behavior of adaptive bone-remodeling simulation models. *Journal of Biomechanics*, 1992, 25(12): 1425-1441
- 宋帮勇, 樊瑜波. 以主应力作为力学激励的骨再造方程. *生物医学工程学杂志*, 2004, 21 (4S): 117-118

(责任编辑: 刘希国)

(上接第 217 页)

- 余天堂. 不连续问题的扩展有限元法分析. *船舶力学*, 2007, 11(5): 716-722
- 茹忠亮, 朱传锐, 赵洪波. 裂纹扩展问题的改进 XFEM 算法. *工程力学*, 2012, 29(7): 12-23
- 王敏. 基于扩展有限元法的平板模型裂纹扩展研究. [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2011
- 钟万勰. 弹性力学求解新体系. 大连: 大连理工大学出版社, 1995
- 唐立民, 褚致中, 邹贵平等. 混合状态哈密顿元的半解析解和叠层板的计算. *计算结构力学及应用*, 1992, 9(4): 347-360
- Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 45(5): 601-620
- 唐立民. 弹性力学的混合方程和 Hamilton 正则方程. *计算结构力学及应用*, 1991, 8(4): 343-350
- 蔡宇. 复合材料层合板脱层损伤研究. [硕士学位论文]. 天津: 中国民航大学, 2008
- 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1981
- Moler C, Van Loan C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. *SIAM Review*, 1978, 20(4): 801-836
- Mergheim J, Kuhl E, Steinmann P. A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 63(2): 276-289
- Moës N, Dolbow J, Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46(1): 131-150
- 庄茁, 柳占立, 成斌斌等. 扩展有限单元法. 北京: 清华大学出版社, 2012
- 丁遂栋, 孙利民. 断裂力学. 北京: 机械工业出版社, 1997
- 王宇航, 聂建国. 基于断裂力学的组合梁栓钉疲劳性能. *清华大学学报 (自然科学版)*, 2009, 49(9): 35-38

(责任编辑: 刘希国)