关于分析力学的定义与内容
—— 分析力学札记之二十五

梅凤翔 1)

(北京理工大学宇航学院，北京 100081)

摘要 学习和研究分析力学多年，回过头来看，还是有不少问题值得商讨，如分析力学怎样定义，分析力学哪些概念是不可缺少的，Newton 力学与分析力学的关系等. 该文就分析力学的这些问题做一归纳并提出一些看法.

关键词 分析力学，Newton 力学

中图分类号：O316 **文献标识码**：A

doi：10.6052/1000-0879-15-032

1 分析力学的定义

1.1 3 种观点

甘特马赫 (Гантмахер) 在其《分析力学讲义》[1] 的序中写道：

"'分析力学' 一词，在力学著述中并无统一涵义. 有的作者把分析力学和理论力学看作是等同的. 另一些人认为，以广义坐标叙述力学理论是分析力学的主要标志. 本书作者所持的第 3 种观点则是：分析力学的特征既表现在叙述的体系方面，也表现在所探讨的问题的范围方面.

以普遍原理 (微分的或积分的) 为基础，用分析的方法来导出运动基本微分方程，这就是分析力学叙述体系的特征. 阐述力学的普遍原理、由这些原理导出基本运动微分方程，并研究这些方程本身及其积分方法 —— 所有这些就构成分析力学的基本内容."

上述把分析力学与理论力学等同起来的是指甘特马赫的老师苏斯洛夫 (Суслов) 1911—1912 年出版的《分析力学基础》，1946 年变成了《理论力学》[2]. 第 2 种观点强调了广义坐标的特征. 第 3 种观点是指分析力学的内容与方法，而不是定义.

1.2 百科全书的条目

《中国大百科全书 · 力学》中的条目 "分析力学" 由汪家訸先生书写，其写道 [3]："分析力学 一般力学的分支，以广义坐标为描述质点系的变数，以牛顿运动定律为基础，运用分析的方法研究宏观现象中的力学问题. 1788 年出版的拉格朗日 ·JL 的《分析力学》一书，为这门学科奠定了基础. "

这是对分析力学的一个定义性的描述. 说到广义坐标的特征，说到牛顿定律的基础，说到研究对象，也说到来源与所属. 应该说是一个较全面较准确的描述.

1.3 力学词典的条目

中国大百科全书出版社于 1990 年出版一本《力学词典》[4]. 在分析力学条目下有如下描述："分析力学 一般力学的一个分支，以广义坐标为描述质点系的变量，以虚位移原理和达朗伯原理为基础，运用数学分析方法研究宏观现象中的力学问题. 1788 年出版的拉格朗日的《分析力学》为这门学科奠定了基础. 1834 年和 1843 年哈密顿建立哈密顿原理和正则方程，把分析力学推进一步. 1894 年赫兹提出将约束和系统分成完整的和非完整的两大类，从此开始非完整系统分析力学的研究. 分析力学的基本内容是阐述力学的普遍原理，由这些原理出发导出基本运动微分方程，并研究这些方程本身以及它们的积分方法. 近 20 年来，又发展出用近代微分几何观点来研究分析力学的原理和方法. 分析力学是经典物理学的基础之一，也是整个力学的基础之一. 它广泛应用于结构分析，机器动力学与振动，航天力学，多

本文于 2015–02–03 收到.

1) E-mail: meifx@bit.edu.cn

引用格式：梅凤翔. 关于分析力学的定义与内容 —— 分析力学札记之二十五. 力学与实践, 2015, 37(2): 238-242

Mei Fengxiang. On the definition and the content of analytical mechanics. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(2): 238-242

刚体和机器人动力学以及各种工程实际，也可推广应用于连续介质力学和相对论力学.”

以上段落参照了汪家訸先生书写的条目和甘特马赫书的前言，应该说是更为全面的描述，不仅给出了定义，还有内容，发展及应用等. 笔者参与了上述条目的编审.

1.4 Papastavridis 的《分析力学》

Papastavridis 于 2002 年出版的 1 400 页的《分析力学》[5] 中有如下描述：

“什么是分析力学？

经典力学 —— 即非相对论非量子的力和运动的精密科学，17 世纪已建立 …… 史上第 1 个完全的动力学理论，即力学的 Newton–Euler 方法. ……第 2 个方法称为 d′ Alembert–Lagrange 方法，简称 Lagrange 方法，构成了分析力学或 Lagrange 力学的基础. …… 约束的概念是分析力学的核心. ……

在 Newton–Euler 方法中，基本原理是线动量和角动量原理，以及关于内力的作用反作用原理. Newton–Euler 方法是基于动量原理的系统力学. …… 在 Lagrange 方法中，首要公理是对约束反作用的虚功动力学原理，次者是约束解除原理. Lagrange 方法是基于能量原理的系统力学. …… 分析力学构成高等工程动力学的理论基础，广泛应用于结构动力学，机器动力学，车辆动力学，转子动力学，机器人动力学，空天动力学，控制理论，系统动力学，天体力学等.”

以上描述将经典力学分成 Newton–Euler 力学和 d′Alembert–Lagrange 力学，即分析力学，并指出两者的差别，同时指出分析力学的应用.

1.5 朱照宣，周起钊，殷金生的《理论力学》

朱照宣，周起钊，殷金生的《理论力学》下册 [6] 中有如下文字：

“在此以前，动力学问题基本上建立在牛顿定律的基础上，简称牛顿力学. …… 拉格朗日力学和哈密顿力学 (还有其他一些内容) 可统称为 ‘分析力学’，以区别于原来的 ‘向量力学’. …… 牛顿力学 (或向量力学) 和分析力学尽管有各自的特点，但并非独立无关的，它们具有同样的适用范围，都属于 ‘经典力学’ 的范畴. 它们的基本原理以及理论结果都是相互联系着的. …… 分析力学的理论内容牵涉很广，应用方面涉及工程技术、天体力学、理论物理，…… 诸方面，形成一个力学的专门分支. ”

以上描述将经典力学分为牛顿力学和分析力学，并指出两者的区别与联系.

1.6 分析力学与理论力学

理论力学的名著，如苏斯洛夫 [2] 的，Hamel[7] 的，Appell[8] 的，都有分析力学的内容. 文献 [9] 将苏斯洛夫的和 Appell 的《理论力学》作为分析力学的 3 本名著之中的 2 本. 近年俄罗斯的，如马尔契夫 [10] 的《理论力学》也有相当篇幅的分析力学内容. 因此，认为分析力学是理论力学的一部分. 当然，在理论力学教材中，分析力学有的是初步，如文献 [6]，有的更多一些，如文献 [11].

以上各种表述都从各自角度回答了 “什么是分析力学？”

可归纳如下：

(1) 文献 [6] 指出：“拉格朗日力学和哈密顿力学 (还有其他一些内容) 可统称为 ‘分析力学’”. 这里 “其他一些内容” 应包括非完整力学，Birkhoff 力学，几何力学等.

(2) 分析力学属于经典力学 —— 非相对论非量子的力学. 文献 [12] 指出，经典力学分为 5 个阶段：Newton 力学，Lagrange 力学，Hamilton 力学，非完整力学以及 Birkhoff 力学. 后 4 个阶段都是分析力学.

(3) Newton 力学 (Newton–Euler 力学) 的基本原理是动量 (线动量和角动量) 原理以及关于内力的作用反作用原理. Lagrange 力学的基本原理是对约束反作用的虚功的动力学原理以及约束解除原理 [5].

(4) 分析力学是一般力学的分支，是理论力学的一部分.

2 分析力学的基本概念

2.1 约束

约束是分析力学不可缺少的基本概念. Newton 力学和 Euler 力学主要研究无约束系统力学，分析力学主要研究约束系统力学. 约束可分为完整的和非完整的，定常的和非定常的，单面的和双面的，理想的和非理想的，主动的和被动的，等等. 约束的数学表现为约束方程，约束的物理表现为约束力. 文献 [13] 对约束的研究很系统，很深入.

2.2 广义坐标

凡是能够确定系统位置的，适当选取的独立变量称为广义坐标. 当约束系统受有约束时，由直角坐标过渡到广义坐标是特别方便的，而且也是十分必要的 [14]. 广义坐标是分析力学的基本概念，也是

分析力学的特色之一. 在 Lagrange 著作中未见 “广义坐标” 的提法，也未见 q 的记号. 但在 Lagrange 著作的附录Ⅵ提到 “用 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 表记 k 个新变量，使得 $3n$ 个坐标 $x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n$ 可表示为这些变量和时间 t 的函数”. 这个附录由法国数学家 Bertrand JLF(1822—1900) 给出. Appell 的著作将这些坐标称为完整系统的坐标 [8]. Levi–Civita 和 Amaldi 称其为广义坐标，或 Lagrange 坐标 [14].

2.3 虚位移

在给定的固定时刻为加在点上的约束所允许的所有假想的无限小位移，称为点的虚位移 [14]. 虚位移是分析力学的基本概念，没有虚位移就没有虚位移原理，也就没有分析静力学和分析动力学. 因此，有人说，分析力学是建立在 “虚” 上的 [5]. Lagrange 的著作中没有虚位移，但有虚速度. 苏斯洛夫的《理论力学》引出 3 个彼此不同的术语：实位移，可能位移和虚位移，并把虚位移定义为两个可能位移之差. 苏联 30 年代的理论力学教材，有的开始用可能位移，后来改为虚位移. Lurie 认为 “虚的” 和 “可能的” 是同义词，因为都来自法文 “virtuel”[15]. 这个词汉译为 “潜在的”，“有可能的”, “虚的”. 与虚位移相关的一个重要问题是约束对虚位移的限制条件. 对完整约束和线性非完整约束都没有问题. 但是，对非线性非完整约束，限制条件是什么？传统的 Hölder 原则已不适用. 于是，出现了 Chetaev 条件. 有些应用数学家出于对 Chetaev 条件的怀疑，而抛弃虚位移和约束对虚位移的限制条件，这就导致了 Vacco 动力学，如美国 Edelen DGB，俄罗斯 Kozlov VV，郭仲衡等. 20 世纪 90 年代，梅凤翔曾与俄罗斯院士 Rumyantsev VV 讨论过此事，他说 Vacco 动力学不是力学.

2.4 理想约束

Newton 力学主要将力分为内力和外力，而分析力学主要将力分为主动力和约束力. 专著 [5] 指出，历史上最早将力分为主动力和约束力的做法是法国学者 Delaunay 在他 1856 年的著作中提出的. 约束力在虚位移上的功为零或非零. 约束，无论完整的，还是非完整的，满足约束力在系统点的任何虚位移上所做元功之和等于零，则称其为理想约束 [15]. 理想约束概念的形成有相当一段历史 [14,16]. Lagrange 的著作中未见 liaison parfaite(理想约束) 的提法. Appell 的著作中也没有，仅有 “无摩擦约束” 的提法 [8]. Appell 巨著的前两卷俄译本《理论力学》，第 1 卷第 8 章第 164 节的标题为 “无摩擦约束的一般定义”，俄译本将其改为 “理想约束的一般定义”. 俄译本第 2 卷第 343 节有一译者注：“无摩擦约束应理解为不产生运动阻抗的约束，例如，不仅光滑曲面，而且粗糙曲面，如果沿其发生无滑动地滚动.” Lurie 的著作 6.2 节中写道 “理想约束或无摩擦约束”[15]. 理想约束假定的重要性在于虚位移原理和动力学普遍方程中消除了约束力，使问题变得简单了. 理想约束假定也有足够的精确度.

3 分析力学的基本原理与运动微分方程

3.1 微分变分原理

(1) d′Alembert–Lagrange 原理

Lagrange 在其著作中给出 “对任何物体系统运动的动力学普遍公式” 为

$$\int m\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\delta x+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\delta y+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\delta z\right)+\int m\,(P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\cdots)=0 \tag{1}$$

这就是 d′Alembert–Lagrange 原理的原型，也叫动力学普遍方程. 现代形式为

$$(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0\quad(i=1,2,\cdots,N) \tag{2}$$

这儿及以后相同指标表示求和. 原理 (2) 的前提条件是：双面理想约束，不论约束是否定常，也不论约束是否完整.

(2) Jourdain 原理

$$(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=0 \tag{3}$$

其中 $\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 称为速度空间虚位移. 文献 [17] 认为这个原理是非完整力学的基本原理.

(3) Gauss 原理

原理表示为

$$(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i=0 \tag{4}$$

或

$$\delta Z_w=0\,,\quad Z_w=\frac{1}{2}m_i\left(\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right)^2 \tag{5}$$

文献 [13] 指出，Gauss 原理在处理一阶约束系统时是完备的. 用 Gauss 原理可导出 d′Alembert–Lagrange 原理和 Jourdain 原理.

3.2 积分变分原理

(1) Hamilton 原理

原理表示为

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1}L\left(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}\right)\mathrm{d}t=0 \tag{6}$$

Hamilton 原理 (6) 是力学的基本原理，并且它把力学原理归结为更一般的形式. 同时，它和坐标选择无关，因此，更具普遍性并在多方面应用上更为方便. 原理的前提是：约束是双面理想的，广义力是有势的.

对受有非势力的完整系统，原理有形式

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T+Q_s\delta q_s\right)\mathrm{d}t=0 \tag{7}$$

非完整系统的 Hamilton 原理有苏斯洛夫形式和 Hölder 形式 [14].

(2) Pfaff–Birkhoff 原理

Hamilton 作用泛函由 Pfaff 作用泛函

$$A=\int_{t_0}^{t_1}\left[R_\nu(t,\boldsymbol{a})\dot{a}^\nu-B(t,\boldsymbol{a})\right]\mathrm{d}t \\ (\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{8}$$

来推广，得到 Pfaff 作用原理 [18]

$$\delta A=0 \tag{9}$$

文献 [19] 称其为 Pfaff–Birkhoff 原理.

3.3 由原理导出运动微分方程

(1) 完整和非完整系统的方程

d′Alembert–Lagrange 原理 (2) 可写成广义坐标形式，有

Euler–Lagrange 形式

$$\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}+Q_s\right)\delta q_s=0\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{10}$$

Nielsen 形式

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T+2\frac{\partial T}{\partial q_s}+Q_s\right)\delta q_s=0 \tag{11}$$

Appell 形式

$$\left(-\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_s}+Q_s\right)\delta q_s=0 \tag{12}$$

由原理 (10) 可导出第 2 类 Lagrange 方程；利用乘子法可导出第 1 类 Lagrange 方程；考虑到非完整约束对 δq_s 的限制，如 Chetaev 条件，可导出非完整系统的方程. 类似地，由原理 (11) 可导出各类 Nielsen 型方程，由原理 (12) 可导出各类 Appell 型方程.

(2) Birkhoff 方程

展开式 (9) 并利用端点条件，得到

$$\delta A=\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\right. \\ \left.\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right]\delta a^\mu\mathrm{d}t=0 \tag{13}$$

由此注意到 δa^μ 的独立性和积分区间的任意性，便得 Birkhoff 方程. 由式 (13) 还可得到

$$\left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right]\delta a^\mu=0 \tag{14}$$

文献 [19] 称其为 Pfaff–Birkhoff–d′Alembert 原理. 如果 δa^μ 不是彼此独立的，可由式 (14) 研究约束 Birkhoff 系统动力学.

(3) Kane 方程

Kane 于 1961 年提出一种列写动力学方程的方法，称为 Kane 方法，导出的那个方程有人称为 Kane 方程. 问题是：那个方程是 Kane 第 1 个得到的吗？Kane 方程是分析力学的方程吗？Papastavridis 找到了 1912 年出版的一本书，书中有一方程与 Kane 的一样. 文献 [20] 指出，有些过高评价称 “Lagrange 方程是 Kane 方程的特殊情况”，“Kane 方程与动力学普遍方程完全等效” 等是不合理的. 实际上，Kane 方程是由 d′Alembert–Lagrange 原理走向分析力学方程的一个中间结果. 正如周起钊先生 80 年代末说的，Kane 走到分析力学的门口就停下来了. 可见，Kane 方程不属于分析力学. 当然，Kane 方法也有它的好处.

4 分析力学的积分方法

(1) Lagrange 方程的降阶法

包括: ①利用循环积分的 Routh 降阶法; ②利用能量积分的 Whittaker 降阶法

在一些限制下，上述方法也可推广应用于某些非完整系统.

(2) Hamilton 方程的积分方法

包括：①Poisson 方法；②Jacobi 方法；③正则变换；④积分不变量；

(3) 通用积分方法

包括：①场积分方法；②势积分方法；③Jacobi 最终乘子法；④Noether 对称性方法；⑤Lie 对称性方法；⑥形式不变性方法；⑦Lagrange 对称性方法.

5 分析力学的专题和几何力学

5.1 分析力学的专题

包括：(1) 准坐标下完整和非完整系统的方程；(2) 耗散函数的 Lagrange 方程；(3) 初始运动问题；(4) 打击运动的 Lagrange 方程；(5) 运动稳定性与小振动理论；(6) 刚体定点转动问题的分析动力学；(7) 相对运动动力学；(8) 变质量系统动力学；(9) 事件空间动力学；(10) 可控系统动力学；(11) 机电系统的 Lagrange 方程；(12) Lagrange 力学逆问题；(13) 梯度系统与约束力学系统.

5.2 几何力学

(1) 3 本圣经

Abraham 等 [21]，Arnold[22] 和 Godbillion[23] 的 3 本著作被称为几何力学的 3 本圣经. Arnold 指出："事实上，很多数学方法和概念都在经典力学中得到应用，如微分方程和相流，光滑映射和流形，李群和李代数，辛几何和各态历经理论. 许多现代数学理论产生于力学中的问题，只有在后来才达到抽象的公理形式，并且使得它们难以理解. "[22]

由于 Lagrange，Hamilton，Jacobi，Poincaré，Lyapunov 等的工作十分完美，19 世纪末人们普遍认为，再没有什么更本质的东西可以补充到有限自由度动力系统中了. 20 世纪 60 年代以来，由于大范围微分几何的发展和流形上泛函分析的发展，促成了分析力学的几何化. 上述 "三本圣经" 是几何力学的代表作.

(2) 我国有关几何力学的工作

由于近代微分几何比较难学，我国有关工作还较少. 文献 [24] 介绍了分析力学的数学方法，其中有 Lagrange 力学与 Hamilton 力学的几何框架. 20 世纪 80 年代至 90 年代，有关工作，如文献 [24-33]，大多还是初步的.

6 结 语

本文对分析力学的定义和内容做一归纳，并提出一些看法. 希望能找到既能反映历史又能反映现状的关于分析力学的定义. 相信分析力学还会发展，内容也还会扩充.

参 考 文 献

1 甘特马赫 ФР. 分析力学讲义. 钟奉俄, 薛问西译. 北京：人民教育出版社, 1963
2 Суслов ГК. Основы Аналитической Механики. Киев, 1911-1912; Суслов ГК. Теоретическая Механики. Москва: Гостехиздат, 1946
3 中国大百科全书编辑部. 中国大百科全书 · 力学. 北京：中国大百科全书出版社, 1985
4 力学词典编辑部. 力学词典. 北京：中国大百科全书出版社, 1990
5 Papastavridis JG. Analytical Mechanics. New York: Oxford Univ Press, 2002
6 朱照宣, 周起钊, 殷金生. 理论力学 (下册). 北京：北京大学出版社, 1982
7 Hamel G. Theoretische Mechanik. Berlin: Springer–Verlag, 1949
8 Appell P. Traité de Mécanique Rationnelle T 1, 2. Paris: Gautier-Villars et C^{ie} Éd, 1953
9 梅凤翔. 关于分析力学的三本名著. 力学与实践，2014, 36(1): 84-87
10 马尔契夫 АП. 理论力学. 李俊峰译. 北京：高等教育出版社, 2006
11 梅凤翔, 尚玫. 理论力学 Ⅰ, Ⅱ. 北京：高等教育出版社, 2012
12 梅凤翔, 吴惠彬. 经典力学的历史贡献与启示. 科技导报, 2012, 30(11): 61-68
13 陈滨. 分析动力学. 北京：北京大学出版社, 1987
14 梅凤翔. 分析力学 Ⅰ, Ⅱ. 北京：北京理工大学出版社, 2013
15 Лурье АИ. Аналитическая Механика. Москва: ГИФМЛ, 1961
16 梅凤翔. 关于理想约束与虚位移原理. 力学与实践, 2012, 34(5): 61–63
17 牛青萍. 经典力学基本微分原理与不完整力学系统的运动方程. 力学学报, 1964, 7(2): 139-148
18 Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics II. New York: Springer–Verlag, 1983
19 梅凤翔, 史荣昌, 张永发等. Birkhoff 系统动力学. 北京：北京理工大学出版社, 1996
20 梅凤翔. 小议 Kane 方程. 力学与实践, 1996, 18(6): 59-60
21 Abraham R, Marsden JE. Foundations of Mechanics. New York: Benjamin–Cummings, 1978
22 Arnold VI. Mathematical Methods of Classical Mechanics. New York: Springer–Verlag, 1978
23 Godbillon C. Géometrie Différentielle et Mécanique Analytique. Paris: Hermann, 1969
24 刘端, 梅凤翔, 陈滨. 分析力学的数学方法. 见：陈滨. 现代数学理论与方法在动力学、振动与控制中的应用. 北京：科学出版社, 1992. 1-17
25 赵国景. 分析力学的基本微分原理. 上海力学, 1983, 4(1): 64-74
26 Wang KM. A differential geometry version on nonlinear nonholonomic mechanics. In: Proc of ICNM, Shanghai, 1985
27 Zhao SY. The differential geometric principles of Chetaev-type nonholonomic mechanical systems. In: Proc of ICNM, Shanghai, 1985
28 段成尧. 力学微分原理的 Riemann 型及动力学方程. 力学与实践, 1986, 8(4): 30–34
29 慕小武, 郭仲衡. 非完整力学系统 "几何化" 处理的新途径与可解性研究. 中国科学 A 辑, 1989, 9: 949-956
30 刘端, 史荣昌, 梅凤翔. 非完整力学的几何方法. 北京理工大学学报, 1990, 10: 12-18
31 吴惠彬. Birkhoff 系统的几何理论. [博士论文]. 北京：北京理工大学, 1994
32 郭永新. 约束力学系统的几何结构研究. [博士论文]. 北京：北京理工大学, 1996
33 Guo YX, Shang M, Mei FX. Poincaré–Cartan integral invariants of nonconservative dynamical systems. *Int J Theor Phys*, 1999, 38(3): 1017-1027

(责任编辑：胡 漫)