用能量图形面积法计算非线性弹性材料任意加载方式的能量释放率 1)

王启智 2)　张财贵　周　妍　杨井瑞

(四川大学土木工程及应用力学系，成都 610065)

摘要　从能量释放率 G 的定义出发，用图解法，即能量图形面积法，分别对线弹性材料和非线性弹性材料，以及在固定位移，或固定载荷，或任意加载方式的情况下，推导出能量释放率的计算公式. 证明不同加载方式下的非线性弹性材料的能量释放率，在用能量图形面积法极限求导时，其数值是一样的.

关键词　能量释放率, 能量图形面积法, 加载方式, 线弹性材料, 非线性弹性材料

中图分类号：O343.1，O344.1　**文献标识码**：A

doi：10.6052/1000-0879-13-531

引　言

断裂力学教材 [1-4] 讲述平面裂纹构件的能量释放率时，一般只针对线弹性材料，加载方式或者是固定位移，或者是固定载荷. 著名的 Irwin–Kies 公式也是在上述条件下推出的，于是能量释放率可以通过构件的柔度对裂纹长度的导数求得，与加载方式无关. 但是，如果对既不是固定位移也不是固定载荷的任意加载方式，或者更进一步，材料又是非线性弹性的，能量释放率如何计算，以及是否与加载方式有关，有必要弄清楚. 参考文献 [5] 用解析方法给出相关的全面的公式推导，以便于进一步的理论推导使用，但是要求读者有相当的数学基础. 本文从不同的视角出发，采用比较形象的能量图形面积法加以推导，理解容易且使用方便，证明即使对非线性弹性材料，虽然不同加载方式下的能量释放率的计算公式在形式上有所不同，但在极限求导时它们的数值大小是一样的，差别只是高阶小量. 参考文献 [5] 中的公式与本文的公式如果取极限写成解析公式，本质上应该是一致的. 从 2012 年起，为了推进国际化教学，我们在本科生和研究生的断裂力学的教学中启用了美国著名的康奈尔大学 (Cornell University) 的最新原版教材 [6]，本文吸纳了该英文教材的优点，是讲授双语课程的教学体会之一.

1　线弹性材料

能量释放率是势能对裂纹面积的变化率 [6]，如式 (1) 所示

$$G=\frac{\Delta W-\Delta U}{\Delta A}=\frac{\partial (W-U)}{\partial A}=\frac{\partial (W-U)}{\partial a}\Big|_{B=1} \tag{1}$$

其中，W 是外力的功，U 是弹性应变能，A 是裂纹面积，$A=Ba$，a 是裂纹长度，B 是厚度，$B=1$ 时，$A=a$. Δ 代表增量，很小的增量也可以用 d 代替 Δ.

1.1　固定位移加载 ($A'\to B'$，载荷必随 da 改变)

如图 1 所示，由于位移 δ_1 固定，外力不做功，故 $\Delta W=0$，$\Delta W-\Delta U=$①. 其中：“初” 表示裂纹长度是 a 的状态，“末” 表示裂纹长度是 $a+\mathrm{d}a$ 的状态. ΔU 为末状态 (裂纹扩展 da 后) 下弹性应变能与初状态下弹性应变能的差, 即, ②–(①+ ②)=–①；符号 ① 和 ② 分别表示对应图形的面积，具有功和能的量纲，即力乘长度，于是

$$G=\frac{\partial (W-U)}{\partial a}=-\frac{\partial U}{\partial a}=\frac{①}{\mathrm{d}a} \tag{2}$$

dP 表示固定位移下，与 da 相对应的 P 的增量.

2014–01–15 收到第 1 稿，2014–06–10 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (51179115).

2) 王启智, 教授，主要研究方向为岩石和混凝土等材料和结构的动态强度和断裂. E-mail: qzwang2004@163.com

引用格式：王启智, 张财贵, 周妍等. 用能量图形面积法计算非线性弹性材料任意加载方式的能量释放率. 力学与实践, 2015, 37(2): 245-248

Wang Qizhi, Zhang Caigui, Zhou Yan, et al. An energy graphical area method for energy release rate of nonlinear elastic materials under arbitrary loading conditions. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(2): 245-248

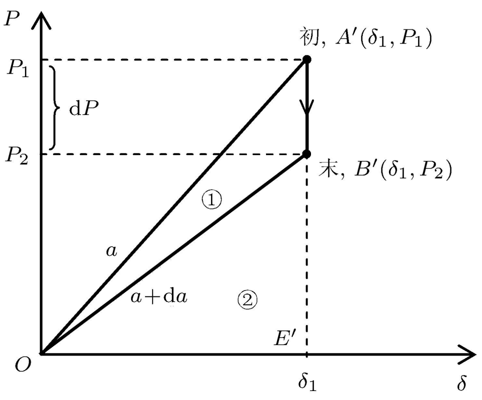

图 1 线弹性材料固定位移的加载路径 ($A' \to B'$)

1.2 固定载荷加载 ($A' \to C'$，位移必随 $\mathrm{d}a$ 改变)

如图 2 所示，加载载荷 P 不变，初末状态如 A', C' 所示.

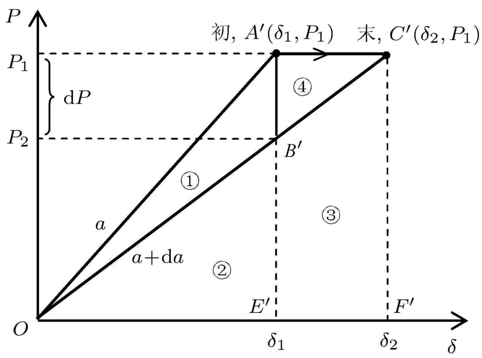

图 2 线弹性材料固定载荷的加载路径 ($A' \to C'$)

外力随位移的改变而做功

ΔW=③+④=2 (①+④)

ΔU=(②+③)–(①+②)=(③–①)=

(③+④)–(①+④)=(③+④)/2=①+④

则：$\Delta W - \Delta U$=①+④=ΔU

①，②，③，④ 分别表示对应图形的面积. 于是

$$G = \frac{\partial\,(W-U)}{\partial a} = \frac{①+④}{\mathrm{d}a} \tag{3}$$

1.3 任意加载 ($A' \to D'$，位移和载荷都随 $\mathrm{d}a$ 改变)

如图 3 所示，既不固定位移也不固定载荷

ΔW=③+④

ΔU=(②+③)–(①+②)=③–①

则有：$\Delta W - \Delta U$=(③+④)–(③–①)=①+④，于是

$$G = \frac{\partial\,(W-U)}{\partial a} = \frac{①+④}{\mathrm{d}a} \tag{4}$$

$\mathrm{d}\delta$ 表示固定载荷或者任意加载下，与 $\mathrm{d}a$ 相对应 δ 的增量，固定载荷时 $\mathrm{d}\delta = \delta_2 - \delta_1$，任意加载时 $\mathrm{d}\delta = \delta_3 - \delta_1$.

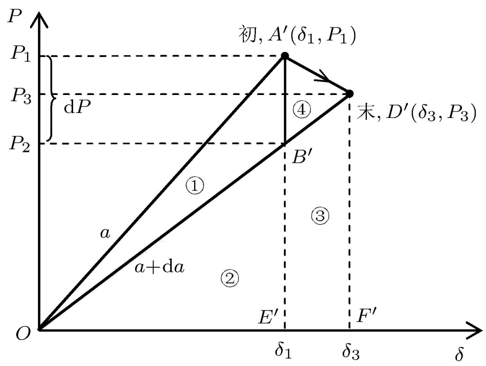

图 3 线弹性材料任意加载路径 ($A' \to D'$)

对于后两种情况都比第一种情况的 $\Delta W - \Delta U$=① 多出 ④，但总有面积 ④$\leqslant 1/2(\mathrm{d}P \cdot \mathrm{d}\delta)$，而面积 ①=$1/2(\mathrm{d}P \cdot \delta_1)$, 因为 $\mathrm{d}\delta \ll \delta_1$，故有面积 ④$\ll$ 面积 ①，故以上 3 种情况算出的 G 数值上相等，都是 G= ①/$\mathrm{d}a$. 注意到在参考文献 [4] 的第 56 页有一条译者注：“原文为 ‘这一面积是与加载方式无关的’，疑有误. ”，此书的中文译者把英文原文的意思改为：“这一面积的大小是取决于加载方式的. ” 其实原文并没有原则性的错误. 根据上述分析，固定载荷或者任意加载只比固定位移算的有关面积略大一点，在极限 (即求导) 意义上此微量趋于零 (见式 (1) 的第 3 个等式).

总结以上 3 种加载情况可知，计算能量释放率 G 的关键量 $\Delta W - \Delta U$ 就等于裂纹长度为 a 和 $a+\mathrm{d}a$ 的载荷–位移曲线与加载路径所围三角形的面积，在图 1，图 2 和图 3 中，此三角形的两边是载荷–位移曲线，而第 3 边是加载路径. G 为状态量，3 种加载情况都能得到相同的 G，而按固定位移方式求解最方便. 在极限求导的意义下，G 值与加载路径无关，都等于固定位移下的 G 值.

2 非线性弹性材料

同理可以证明，对非线性材料裂纹构件的载荷–位移关系式曲线，但仍可用式 (1) 求其能量释放率，上述结论仍然成立，唯一的区别是相应于线性材料的直边三角形现在变成了曲边三角形，故面积要用积分来算.

2.1 对恒位移加载 ($A' \to B'$，载荷必随 da 改变)

如图 4 所示，位移 δ 固定，外力不做功，故 $\Delta W = 0$，于是

$$\Delta U = ②–(① + ②) = –①$$

$$\Delta W - \Delta U =$$

$$\int_0^{\delta_1} P\,(a,\delta)\mathrm{d}\delta - \int_0^{\delta_1} P\,(a+\mathrm{d}a,\delta)\mathrm{d}\delta =$$

$$-\int_0^{\delta_1} \frac{\partial P}{\partial a}\mathrm{d}a\mathrm{d}\delta$$

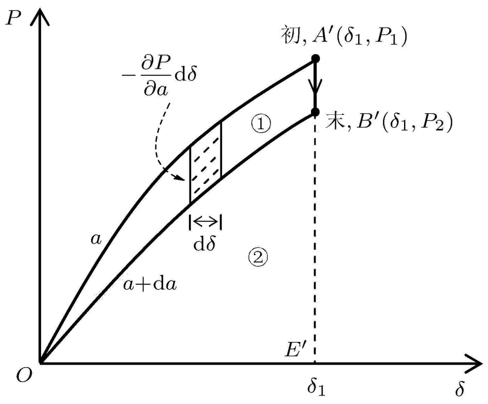

图 4 非线性材料固定位移加载 ($A' \to B'$)

从而

$$G = \frac{\partial\,(W-U)}{\partial a} = -\int_0^{\delta_1} \frac{\partial P}{\partial a}\mathrm{d}\delta \tag{5}$$

其中 P 即为 $P(a,\delta)$ 曲线.

2.2 对恒载荷加载 ($A' \to C'$，位移必随 da 改变)

如图 5 所示，加载 P 固定. 于是

$$\Delta W = ③+④$$

$$\Delta U = [②+③] - [①+②]$$

则 $\Delta W - \Delta U$=③+④–[(②+③)-(①+②)]=①+④

即

$$\Delta W - \Delta U =$$

$$\int_0^{P_1} \delta\,(a+\mathrm{d}a,P)\,\mathrm{d}p - \int_0^{P_1} \delta\,(a,P)\,\mathrm{d}p =$$

$$\int_0^{P_1} \frac{\partial \delta}{\partial a}\mathrm{d}a\mathrm{d}p$$

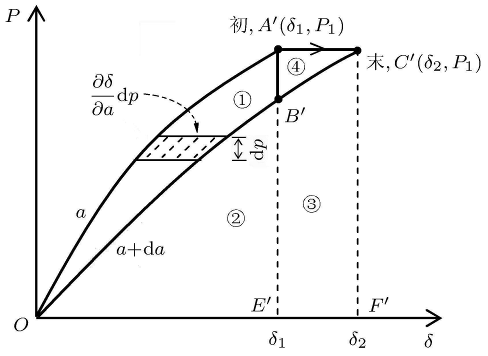

图 5 非线性材料固定载荷加载 ($A' \to C'$)

从而

$$G = \frac{\partial\,(W-U)}{\partial a} = \int_0^{p_1} \frac{\partial \delta}{\partial a}\mathrm{d}p \tag{6}$$

其中 δ 即为 $\delta(a,p)$ 函数.

2.3 任意加载 ($A' \to D'$，位移和载荷都随 da 改变)

如图 6 所示，任意加载途径下，位移、载荷都将随裂纹长度改变，此时

$$\Delta W = ③+④$$

$$\Delta U = (②+③)–(①+②)$$

则 $\Delta W - \Delta U$=③+④–[(②+③)–(①+②)] =①+④

即 $\Delta W - \Delta U$ 是计算能量曲边三角形 $OA'D'$=①+④ 的面积，可有两种算法如下

$OA'D' = OA'B' + A'B'D'$ (算法 1)

$OA'D' = OA'C' - A'C'D'$ (算法 2)

相应的能量释放率也有两种算法，即:

(1) 算法 1

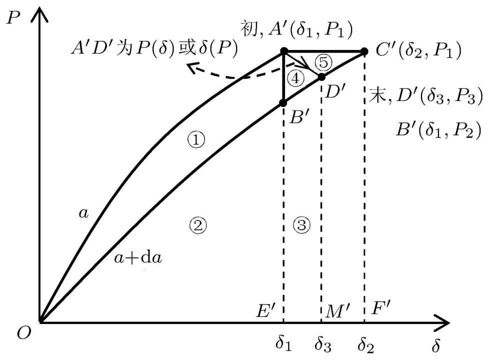

图 6 非线性材料任意加载路径 ($A' \to D'$)

$$\Delta W-\Delta U=OA'B'+A'B'D'=$$
$$\int_0^{\delta_1}P\left(a,\delta\right)\mathrm{d}\delta-\int_0^{\delta_1}P\left(a+\mathrm{d}a,\delta\right)\mathrm{d}\delta+$$
$$\int_{\delta_1}^{\delta_3}\left[P\left(\delta\right)-P\left(a+\mathrm{d}a\right)\right]\mathrm{d}\delta=$$
$$-\int_0^{\delta_1}\frac{\partial P}{\partial a}\mathrm{d}a\mathrm{d}\delta+\int_{\delta_1}^{\delta_3}\left[P\left(\delta\right)-P\left(a+\mathrm{d}a\right)\right]\cdot\mathrm{d}\delta$$
$$G=\frac{\partial\left(W-U\right)}{\partial a}=$$
$$-\int_0^{\delta_1}\frac{\partial P}{\partial a}\mathrm{d}\delta+\frac{\partial}{\partial a}\int_{\delta_1}^{\delta_3}\left[P\left(\delta\right)-P\left(a+\mathrm{d}a\right)\right]\mathrm{d}\delta \tag{7a}$$

其中 $P(\delta)$ 是加载路径.

(2) 算法 2

$$\Delta W-\Delta U=$$
$$\int_0^{P_1}\delta\left(a+\mathrm{d}a,P\right)\mathrm{d}p-\int_0^{P_1}\delta\left(a,P\right)\mathrm{d}p-$$
$$\int_{P_3}^{P_1}\left[\delta\left(a+\mathrm{d}a,P\right)-\delta\left(P\right)\right]\mathrm{d}p=$$
$$\int_0^{P_1}\frac{\partial\delta}{\partial a}\mathrm{d}a\mathrm{d}p-\int_{P_3}^{P_1}\left[\delta\left(a+\mathrm{d}a,P\right)-\delta\left(P\right)\right]\mathrm{d}p$$
$$G=\frac{\partial\left(W-U\right)}{\partial a}=$$
$$\int_0^{P_1}\frac{\partial\delta}{\partial a}\mathrm{d}p-\frac{\partial}{\partial a}\int_{P_3}^{P_1}\left[\delta\left(a+\mathrm{d}a,P\right)-\delta\left(P\right)\right]\mathrm{d}p \tag{7b}$$

其中 $\delta(p)$ 是加载路径.

分别对 (7a) 和 (7b) 用积分中值定理有：

(1) 算法 1

$$G=-\left.\frac{\partial P}{\partial a}\right|_{P_0}\delta_1+\left.\frac{\partial P'}{\partial a}\right|_{P_0'}\left(\delta_3-\delta_1\right) \tag{8a}$$

其中 $P'=\left[p\left(\delta\right)-p\left(a+da,\delta\right)\right]$，$P_0$ 是位于 P_1 和 P_2 之间的某一个值，P_0' 是位于 P_1 和 P_3 之间的某一个值，易知他们都是有限值.

(2) 算法 2

$$G=\left.\frac{\partial\delta}{\partial a}\right|_{\delta_0}P_1-\left.\frac{\partial\delta'}{\partial a}\right|_{\delta_0'}\left(P_1-P_3\right) \tag{8b}$$

其中，$\delta'=\left[\delta\left(a+da,p\right)-\delta\left(p\right)\right]$, δ_0 是位于 δ_1 和 δ_2 之间的某一个值，δ_0' 是位于 δ_1 和 δ_3 之间的某一个值，易知它们都是有限值.

从图 6 可以看出，由于 $(\delta_3-\delta_1)\ll\delta_1$，式 (8a) 中的第 2 项要比第 1 项小得多；同理由于 $(p_1-p_3)\ll p_1$，式 (8b) 中的第 2 项也要比第 1 项小得多. 因此，若略去高阶小量，则式 (8a) 与式 (5) 的计算值相等. 而式 (8b) 与式 (6) 的计算值相等. 事实上，当 $\mathrm{d}a\to 0$ 时，相对于三角形 $OA'B'$ 而言，三角形 $A'B'D',A'C'D'$ 以及 $A'B'C'$ 都是高阶小量. 因此，对于任意加载路径 (图 6 中的 $A'\to D'$)，由于起始点 $A'(\delta_1,P_1)$ 是相同的，无论用式 (5) 或式 (6) 或式 (7) 算出的 G 都是一样的，只要知道 $P(a)$–$\delta(a)$，也即 $P(a,\delta)$ 或 $\delta(a,p)$ 曲线关系即可计算出 G.

2.4 退化到 Irwin–Kies 公式

Irwin 的重要贡献之一就是推出 Irwin–Kies 公式，即 G 与柔度 C 对裂纹长度的导数有关

$$G=\frac{P^2\partial C}{2\partial a}\quad(\text{厚度 }B=1) \tag{9}$$

可以证明，对线弹性材料，分别利用式 (5) 和式 (6)，以及 $P=\dfrac{\delta}{C}$，$\delta=PC$ (其中 $C(a)$ 只与 a 有关) 就可以推出式 (9)，由于式 (9) 对任意加载路径都适用，这也表明 G 的计算与加载路径无关.

3 结 论

(1) 从能量释放率 G 的定义式 (1) 出发，用图解法，即能量图形面积法，推导出能量释放率 G 的计算公式. 用于裂纹扩展的能量就是某一个三角形的面积，此三角形的两边分别是裂纹长度为 a 和 a+da 的载荷 – 位移曲线，第 3 边则是加载路径. 线性弹性材料不同于非线性弹性材料之处仅在于，与 a 和 $a+\mathrm{d}a$ 对应的那两边是直线，而非线性弹性材料对应 a 和 a+da 的两边是曲线. 见图 1 ~ 图 3 和式 (2) ~ 式 (4).

(2) 对非线性弹性材料，$P(a)$–$\delta(a)$ 曲线下的面积是非线性弹性应变能，它是能量状态函数，在恒位移或恒载荷条件下，求出它关于裂纹长度 a 的导数就可以求出 G.

(3) 对非线性弹性材料在恒位移、恒载荷和任意加载的能量释放率公式分别是 (5)~(7)，经证明得出，在极限求导时 (d$a\to$0) 三个公式的计算值相等.

(4) 当式 (5) 和式 (6) 退化到线弹性材料时，就得到式 (9)，这就是著名的 Irwin–Kies 公式，只要对裂纹体的柔度求导即可得到 G，它可以对任意加载路径适用 [1-4].

(下转第 244 页)

其中 D 和 E 为积分常数，可用式 (4) 中给出的初始条件求得为

$$\left.\begin{aligned} &D=\dot{y}_0\cos^2\varphi+\dot{z}_0\sin\varphi\cos\varphi \\ &E=y_0-\frac{\dot{x}_0}{2\omega}\sin\varphi+\frac{g}{4\omega^2}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

再将式 (8) 代入式 (2) 并积分两次，得到

$$z(t)=-\frac{1}{2}gt^2\sin^2\varphi+ \cos\varphi\left[-B\cos(2\omega t)+C\sin(2\omega t)\right]+Ft+G \tag{11}$$

其中积分常数 F 和 G 为可由式 (4) 中给出的初始条件确定为

$$\left.\begin{aligned} &F=\dot{z}_0+(\dot{y}_0\sin\varphi-\dot{z}_0\cos\varphi)\cos\varphi \\ &G=z_0+\frac{\dot{x}_0\cos\varphi}{2\omega}-\frac{g\cos^2\varphi}{4\omega^2} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

2 落体偏东

考虑从高度 h 处自由下落的质点，则相应的初始条件为

$$\left.\begin{aligned} &x_0=0,\ y_0=0,\ z_0=h \\ &\dot{x}_0=0,\ \dot{y}_0=0,\ \dot{z}_0=0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

由式 (8)，式 (10) 和式 (12) 可得到

$$\left.\begin{aligned} &A=0,\ B=-\frac{g}{4\omega^2}\cos\varphi,\ C=0 \\ &D=0,\ E=\frac{g}{4\omega^2}\sin\varphi,\ F=0, \\ &G=h-\frac{g\cos^2\varphi}{4\omega^2} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

代入式 (6) 得到向东的坐标为

$$x(t)=\frac{gt}{2\omega}\cos\varphi\left[1-\frac{\sin(2\omega t)}{2\omega t}\right] \tag{15}$$

注意到对于任意正数 α 有 $\alpha>\sin\alpha$，取 $\alpha=2\omega t$，由式 (14) 可知，$x(t)>0$，即下落过程中向东偏.

当 ω 充分小时，式 (14) 可以导出以往教材中一次近似的结果 [1-4]. 事实上，对于地球附近下落的物体，t 较小，因此可以认为 $2\omega t$ 为小量. 从而有

$$\sin(2\omega t)=2\omega t-\frac{1}{3!}(2\omega t)^3+\frac{1}{5!}(2\omega t)^5+O\left[(2\omega t)^7\right] \tag{16}$$

将式 (15) 代入式 (14)，整理并略去 2 次以上的小量，得到

$$x(t)=\frac{1}{3}g\omega t^3\cos\varphi \tag{17}$$

这就是用一次近似的结果 [1-4]. 若略去 4 次以上的小量，可以得到 3 次近似的结果

$$x(t)=\frac{1}{3}g\omega t^3\left(1-\frac{1}{5}\omega^2t^2\right)\cos\varphi \tag{18}$$

参 考 文 献

1 朱照宣, 周起钊, 殷金生. 理论力学 (下). 北京: 北京大学出版社, 1982. 176-181

2 贾书惠, 李万琼. 理论力学. 北京: 高等教育出版社, 2002. 187-188

3 李俊峰, 张雄. 理论力学 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2010. 199-201

4 梅凤翔, 尚玫. 理论力学 I—- 基本教程. 北京: 高等教育出版社, 2012. 221-223

5 陈立群, 戈新生, 徐凯宇等. 理论力学. 北京: 清华大学出版社, 2006. 138-139

6 谢传峰, 王琪. 理论力学. 北京: 高等教育出版社, 2009. 189-190

(责任编辑: 胡 漫)

(上接第 248 页)

参 考 文 献

1 Broek D. 工程断裂力学基础. 王克仁等译. 北京：科学出版社，1980

2 沈成康. 断裂力学. 上海：同济大学出版社，1996

3 程靳，赵树山. 断裂力学. 北京：科学出版社，2006

4 Lawn B. 脆性固体力学 (第 2 版). 龚江宏译. 北京：高等教育出版社，2010

5 张作启，刘彬. 任意加载模式下含裂纹超弹性体的能量释放率. 力学学报，2013，45(1)：129-133

6 Zehnder AT. Fracture Mechanics (2nd edn). London: Springer, 2012

(责任编辑: 胡 漫)