

# 定性定量速画超静定结构的弯矩图

王树范<sup>1)</sup> 常伏德

(长春工程学院, 长春 130012)

**摘要** 绘制超静定结构的弯矩图形, 是土木类专业的主要内容. 掌握快速绘制弯矩图的方法, 对于土木工程师进行结构的受力分析、计算、校核和检验以及参加注册工程师的考试, 都有着非常重要的意义. 该文是在多年理论教学与工程实践的基础上, 对传统的速画弯矩图的方法进行了总结, 归纳出一些进一步提高速画弯矩图的方法. 算例表明这些方法简化了超静定结构弯矩图的绘制过程, 将其应用于教学, 有利于学生对超静定结构的深入理解.

**关键词** 超静定结构, 快速, 弯矩图

中图分类号: TU311 文献标识码: A

doi: 10.6052/1000-0879-14-087

## 引言

土建工程结构计算的一个重要目的就是保证建筑物和构筑物的安全性, 其计算的理论基础和依据主要是构件的弯矩分布情况, 因此正确快速画出结构的弯矩图是至关重要的. 文献 [1-6] 讨论了弯矩图的绘制, 文献 [1] 和 [6] 探讨的是静定结构弯矩图绘制的方法, 文献 [2] 从微积分的角度探讨弯矩图的绘制, 文献 [3-5] 讨论的是超静定结构弯矩图的画法, 但不是速画, 而是采用力法、力矩分配法、位移法、反弯点等方法通过较多的计算来绘制弯矩图的. 虽然学生或工程技术人员已掌握了画弯矩图的基本方法, 但对工程实际中的超静定结构来说, 速画弯矩图还是很困难的且很容易出错. 本文结合多年的教学经验和工程实践, 先给出画弯矩图的基本理论, 然后探讨了迅速画超静定结构弯矩图的一些新想法. 这些方法对土建结构计算中以弯曲为主的受力构件定量分析具有很大的帮助.

## 1 画弯矩图的基本理论

### (1) 指定截面上的弯矩计算

2014-03-23 收到第 1 稿, 2014-10-20 收到修改稿.

1) E-mail: wangshufan321@163.com

**引用格式:** 王树范, 常伏德. 定性定量速画超静定结构的弯矩图. 力学与实践, 2015, 37(2): 255-257

Wang Shufan, Chang Fude. Qualitative and quantitative methods for fast determination of the bending moment diagram for statically indeterminate structures. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(2): 255-257

弯矩等于截面一侧所有外力对截面形心力矩的代数和, 画在受拉一侧.

### (2) 载荷、剪力、弯矩三者之间的微分关系

当载荷为常数时, 剪力图为斜直线, 弯矩图为二次曲线; 当载荷为零时, 剪力图为平行线或为零线, 弯矩图为斜直线或为平行线、零线. 由此还可以得出根据载荷图直接判断出弯矩图的“弓箭法”或“积雨法”: 载荷如箭或雨, 弯矩图则形如拉开的弓或接雨碗. 亦即弯矩图的凸向始终与载荷的指向是一致的.

### (3) 区段叠加法

区段叠加法是以一段梁的平衡为依据, 比拟相应跨度简支梁的计算而得到的方法: 以一段梁的两端弯矩值的连线为基线, 叠加该段相应简支梁的弯矩图.

### (4) 刚结点处力矩的分配与杆端弯矩的传递

利用力矩分配法中的结点分配和传递的原理, 计算出结点的分配系数 (一般可心算得出), 将结点的不平衡力矩快速分配和传递给其他杆的近端及远端.

### (5) 剪力分配法的应用

对于在结点水平载荷作用下的排架 (横梁  $EA$  为无穷大)、框架及框排架结构 (横梁  $EI$  为无穷大), 可以根据各个柱子的侧移刚度, 计算出剪力分配系数 (一般可直观判断出), 得到各柱的剪力. 在弯矩为零处作用该柱的剪力, 按悬臂柱即可计算其柱端弯矩.

## 2 画弯矩图的扩展方法

### (1) 利用弹性杆件对刚结点的贡献

载荷在一段杆上作用时, 其他弹性杆件通过刚结点对该杆的转动约束, 达不到固定端的 0 转动,

但又好于铰结点的自由转动. 所以, 可定性的判定杆端弯矩是介于相应固定端处的弯矩与零之间, 弹性杆件对刚结点约束强的杆端弯矩要大于约束弱的一端弯矩. 弹性杆件对刚结点约束的强弱, 可以根据杆端的转动刚度来判定, 多个弹性杆件对同一刚结点的约束可叠加计算.

## (2) 弯矩等代结构的概念

当不改变结点的分配比例关系时, 杆件的几何形状发生变化后, 各段杆件的弯矩图形相对保持不变的结构, 互称为弯矩等代结构.

(3) 已知超静定结构的弯矩形状图, 根据超静定结构的位移计算定量绘制最终弯矩图

当定性分析出超静定结构的弯矩形状图后, 根据超静定结构的位移计算原理, 取其任意静定的基本结构, 利用图乘法进行已知位移的计算, 就可计算出弯矩形状图中的未知弯矩值, 进而绘出最终的弯矩图形来.

## (4) 将支座移动转化为载荷作用

超静定结构由于支座移动所引起的内力计算, 一般采用力法或者位移法. 在建立方程时, 确定其自由项还是常数项的分析过程中, 一直是学习的难点.

对于常见的简单结构, 该问题可以转化为由于载荷作用所引起的位移计算. 该方法是将超静定结构有支座位移的约束去掉, 代以相应的约束力作为载荷, 绘出以约束力为未知量的弯矩形状图. 再根据“已知超静定结构的弯矩形状图, 定量绘制最终弯矩图”的方法, 得出该力与支座位移的关系. 分析过程中, 由于去掉了有支座位移的约束, 因此降低了原结构的超静定次数, 特别是对于一次超静定结构, 可直接转换成静定结构, 所以简化了计算.

## 3 应用实例

**例 1** 速画图 1(a) 所示结构的弯矩图.

**解:** 由微分关系可知, 杆  $BC$  的弯矩图形为凸向下的二次曲线,  $AB$  杆的弯矩图形为直线. 弹性杆  $AB$  对刚结点  $B$  的约束达不到固定端的程度, 所以杆  $BC$  的  $B$  截面的弯矩  $M_B$  值小于  $\frac{ql^2}{8}$  (一端固定一端铰支杆的载常数), 为上侧受拉.  $M_C$  值为零, 固定端  $A$  处的弯矩为  $B$  处弯矩的一半, 为下侧受拉.  $BC$  段的弯矩图形用区段叠加法表示, 由此得该结构的弯矩形状图 (图 1(b)).

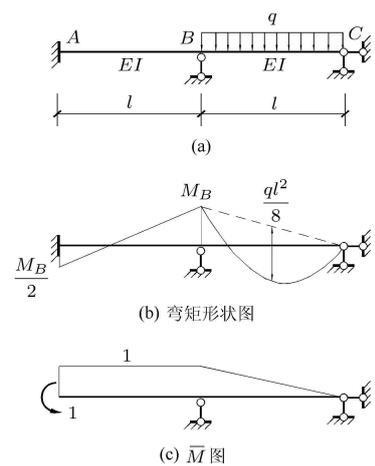


图 1

由力矩分配法可知, 刚结点  $B$  的不平衡力矩  $\frac{ql^2}{8}$  由围绕刚结点  $B$  的  $BA$  杆和  $BC$  杆承担.  $BA$  杆的转动刚度为  $4i$ ,  $BC$  杆的转动刚度为  $3i$ , 因此,  $BA$  杆承担不平衡力矩的  $\frac{4}{4+3}$ , 即  $M_B = \frac{4}{4+3} \times \frac{1}{8} ql^2 = \frac{1}{14} ql^2$  代入弯矩形状图中, 得最终定量的弯矩图形.

本题还可采用“已知超静定结构的弯矩形状图, 定量绘制最终弯矩图”的方法. 利用左端支座转角为 0 的已知条件, 计算该位移. 在去掉左端支座的静定外伸梁上, 绘制单位力图如图所示, 则弯矩形状图与单位力图相乘, 即可求得弯矩形状图中的未知弯矩  $M_B$  值.

根据等代结构的思路, 本题的弯矩等代结构如图 2(a) 所示, 其弯矩图如图 2(b) 所示. 其中, 杆  $AB$  与杆  $BC$  之间的夹角可任意.

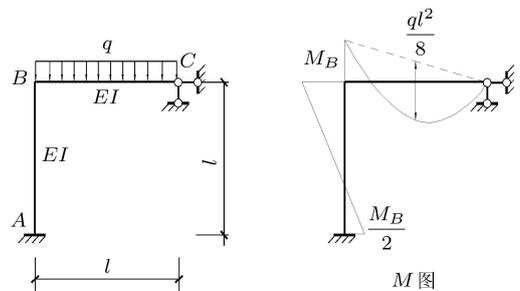


图 2

**例 2** 绘制两端固定梁由于支座  $A$  发生转角  $\varphi$  (图 3(a)) 所引起的弯矩图.

**解:** 首先将超静定结构有支座位移的约束去掉, 代以相应的约束力  $m$ , 并将其视为载荷, 得到

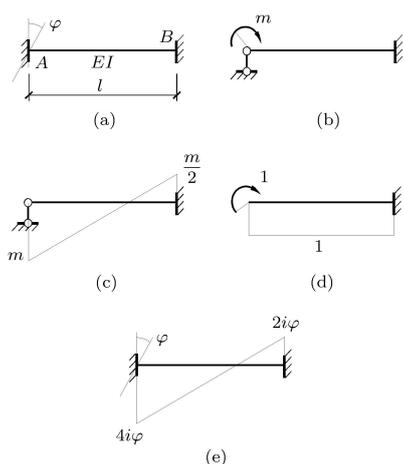


图 3

与支座位移对应的载荷图,如图 3(b)所示. 显然,其弯矩形状图如图 3(c)所示,但是  $m$  值是未知量.

应用已知弯矩形状图,定量绘制最终弯矩图,建立已知位移  $\varphi$  与未知力  $m$  的关系. 先绘制与  $\varphi$  位移对应的悬臂梁单位力图(图 3(d)),再与弯矩形状图相乘,即可得到  $m$  与  $\varphi$  的关系

$$\varphi = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2}lm \times 1 - \frac{1}{2}l \frac{m}{2} \times 1 \right) = \frac{l}{4EI} m$$

于是有

$$m = \frac{4EI}{l} \varphi = 4i\varphi$$

将  $m$  值求出后,即可得到原超静定结构的最终弯矩

图(图 3(e)).

当  $\varphi = 1$  时,则得到该结构的形常数.

#### 4 结论

综上所述,对于超静定结构在载荷作用下弯矩图的绘制,可先运用已学过的力学知识,定性地判断并画出弯矩图的形状,然后利用弹性杆对刚结点的贡献、超静定结构位移计算原理求出具体的数值;对于超静定结构在支座移动(非载荷因素)作用下弯矩图的绘制,可将支座移动转化为人们更熟悉的载荷作用,这样可更快更准确地画出超静定结构的弯矩图. 读者经过复习、理解、加深和学习关于定性定量速画弯矩图的论述并熟练地掌握和应用,将会提高速画弯矩图及对结构受力分析的能力,这对于经常接触结构弯矩图的土木工程师以及相关人士无疑是非常重要的.

#### 参考文献

- 1 刘鸿文. 材料力学(第 2 版). 北京: 高等教育出版社, 2004
- 2 丁怀民, 邓建平, 杨红霞等. 面积法作剪力图和弯矩图在结构设计中的应用. 河南冶金, 2002, 53(6): 15-16
- 3 常伏德. 结构力学实用教程. 北京: 北京大学出版社, 2012
- 4 包世华. 结构力学(上下册). 武汉: 武汉理工大学出版社, 2003
- 5 张灵. 杆系结构弯矩计算的一种直接分配法. 建筑结构, 1995, (6): 41-43
- 6 周臻. 静定刚架弯矩图的叠加法活用与对称性利用. 力学与实践, 2012, 34(4): 74-76

(责任编辑: 胡漫)

## 结构力学虚拟仿真实验教学研究<sup>1)</sup>

任伟杰<sup>2)</sup> 李春林 宋维源

(辽宁工程技术大学力学与工程学院, 辽宁阜新 123000)

**摘要** 基于结构力学实验,应用 Flash 开发系统建立了结构力学实验的虚拟实验环境和虚拟实验物理的模型. 通过将实验对象的数学模型引入到虚拟实验对象状态控制程序的方法,实现了对结构力学虚拟实验对象的实时判断和实际数据库的

动态链接,使虚拟实验系统具有完好的交互性和实验现象、规律、实验结果的准确性. 为加强实践教学环节提供了另一种实验教学的手段,为力学实验教学网络化提供了可视资源.

**关键词** 虚拟仿真, 交互性, 振动特性, 桁架结构

2013-12-10 收到第 1 稿, 2014-05-11 收到修改稿.

1) 2012 年度辽宁省高等教育本科教学改革研究项目资助.

2) E-mail: rwj3000@126.com

**引用格式:** 任伟杰, 李春林, 宋维源. 结构力学虚拟仿真实验教学研究. 力学与实践, 2015, 37(2): 257-262

Ren Weijie, Li Chunlin, Song Weiyuan. The virtual reality experiments in structural mechanics. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(2): 257-262