

三参数 Weibull 分布竞争失效场合 加速寿命试验统计分析

张详坡, 尚建忠, 陈循, 张春华, 汪亚顺
(国防科学技术大学 装备综合保障技术重点实验室, 湖南 长沙 410073)

摘要: 三参数 Weibull 分布 (TPWD) 对于描述具有渐变失效特征的失效模式, 如机械产品磨损、疲劳、腐蚀、老化等的寿命分布具有更加明确的物理意义且具有很强的数据拟合能力, 在产品可靠性分析中得到广泛应用。根据 TPWD 特点和竞争失效加速寿命试验 (ALT) 统计分析的工程实际, 研究了 TPWD 竞争失效恒定应力 ALT 统计分析方法, 建立了参数估计的极大似然估计 (MLE) 模型。实例结果表明, 文中建立的 TPWD 的 ALT 统计分析模型是正确的, 符合产品寿命实际, 具有很好的估计效果。

关键词: 数理统计学; 加速寿命试验; 竞争失效; 三参数 Weibull 分布; 极大似然估计
中图分类号: TB114.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-1093(2013)12-1603-08
DOI: 10.3969/j.issn.1000-1093.2013.12.017

Statistical Inference of Accelerated Life Test with Competing Failures Based on Three-parameter Weibull Distribution

ZHANG Xiang-po, SHANG Jian-zhong, CHEN Xun, ZHANG Chun-hua, WANG Ya-shun
(Laboratory of Science and Technology on Integrated Logistics Support, National University of Defense Technology, Changsha 410073, Hunan, China)

Abstract: Three-parameter Weibull distribution (TPWD) has a higher potential for data fitting and a more reasonable physical meaning for life evaluation to describe the life distribution of products that have the characteristics of progressive failure such as wear, fatigue, corrosion and aging failure. Therefore, it is widely used in reliability analysis of products. Based on the properties of TPWD and practice of accelerated life test (ALT), the statistical inference method of ALT with competing failures when all the failure modes are three-parameter Weibull distribution is studied. The maximum likelihood estimation (MLE) model for parameter estimation is also established. Result of application example proves that the statistical inference method and MLE model are correct. The MLE model fits the practice of product life distribution and can provide very good estimation results.

Key words: mathematical statistics; accelerated life test; competing failure; three-parameter Weibull distribution; maximum likelihood estimation

收稿日期: 2013-05-07

基金项目: 国家自然科学基金项目(51105367, 51205402); 国家高档数控机床与基础制造装备技术重大专项项目(2009ZX04014-014)

作者简介: 张详坡(1985—), 男, 博士研究生。E-mail: zhangxiangpo@nudt.edu.cn;

尚建忠(1966—), 男, 教授, 博士生导师。E-mail: Jianzhongshang@gmail.com

0 引言

三参数 Weibull 分布 (TPWD) 理论是由瑞典物理学家 Weibull 于 1939 年提出^[1]的。根据其概率密度公式^[1]可知,由于 TPWD 中位置参数 γ 的引入,使得其分布形式具有最小寿命特征,因此描述对于具有渐变失效特征的失效模式,如机械产品磨损、疲劳、腐蚀、老化等的寿命分布具有更加明确的物理意义^[1]。同时,因三参数 Weibull 含有 3 个参数,所以与其他较常用寿命分布,如正态分布、对数正态分布、指数分布(只有一个参数)等相比,对于各种类型的试验数据拟合能力更强。正是由于 TPWD 的这些特点,使其在产品可靠性研究中得到广泛应用^[2-8]。

在加速寿命试验 (ALT) 中,竞争失效是产品的一种重要失效形式,其 ALT 的统计分析方法的研究受到很多学者的关注:Nelson^[9]研究了对数正态分布条件下的竞争失效的串联系统模型,基于此模型研究了加速试验统计分析的图分析方法和极大似然分析方法;张志华^[10]研究了产品失效机理的发生时间服从指数分布和 Weibull 分布情况下的竞争失效产品 ALT 数据分析方法;Klein 等^[11-12]研究了指数分布与 Weibull 分布情形下的竞争失效 ALT 统计分析方法;Kim 等^[13]研究了在内在失效和外因失效 2 种竞争失效情形下、恒定应力 ALT 工作应力条件下的寿命分布估计方法,给出了基于 EM 算法的估计流程,针对 Weibull 分布给出了具体的公式;Francis^[14]研究了各失效模式为 Weibull 分布产品竞争失效场合下的 ALT 方案设计问题;Cornel 等^[15-16]针对试验中失效数据较少的情形,极大似然估计 (MLE) 方法难以适用的问题,提出了竞争失效 ALT 统计的 Bayesian 模型等。

关于竞争失效的研究很多,但都针对如对数正态分布、指数分布和两参数 Weibull 分布,而系统针对 TPWD 竞争失效加速寿命统计分析的研究还未见报道。本文将针对 TPWD 的特点,研究产品各失效模式寿命分布为 TPWD 时的竞争失效加速寿命统计分析方法,建立求解其分布参数的 MLE 模型。

1 基本模型

ALT 的进行必须以失效过程满足加速性为基本前提^[17]并结合 ALT 的工程实践,TPWD 竞争失效 ALT 统计分析有寿命分布模型、加速因子模型、加速

模型和竞争失效模型 4 个基本模型。

1.1 寿命分布模型

产品 p 个失效模式下的潜在失效时间在各应力水平下均服从 TPWD,应力水平 S_i 下第 m 个失效模式在时间 t 的失效概率、失效概率密度、可靠度和故障率函数分别记为 $F_{im}(t|\theta_{im})$ 、 $f_{im}(t|\theta_{im})$ 、 $R_{im}(t|\theta_{im})$ 和 $h_{im}(t|\theta_{im})$ ($i=1,2,\dots,k,m=1,2,\dots,p$)。 θ_{im} 为第 m 个失效模式在应力水平 S_i 下的分布参数向量, $\theta_{im} = \{\beta_{im}, \gamma_{im}, \eta_{im}\}$ 。

$$F_{im}(t) = 1 - \exp \left[-\mu_{im} \left(\frac{t - \gamma_{im}}{\eta_{im}} \right)^{\beta_{im}} \right], \quad (1)$$

$$R_{im}(t) = \exp \left[-\mu_{im} \left(\frac{t - \gamma_{im}}{\eta_{im}} \right)^{\beta_{im}} \right], \quad (2)$$

$$f_{im}(t) = \frac{\mu_{im} \beta_{im}}{\eta_{im}} \left(\frac{t - \gamma_{im}}{\eta_{im}} \right)^{\beta_{im}-1} \exp \left[-\mu_{im} \left(\frac{t - \gamma_{im}}{\eta_{im}} \right)^{\beta_{im}} \right], \quad (3)$$

$$h_{im}(t) = \frac{\mu_{im} \beta_{im}}{\eta_{im}} \left(\frac{t - \gamma_{im}}{\eta_{im}} \right)^{\beta_{im}-1}, \quad (4)$$

式中: $\mu_{im} = \begin{cases} 1, & t > \gamma_{im}; \\ 0, & t \leq \gamma_{im}; \end{cases}$ β_{im} 、 γ_{im} 和 η_{im} 分别为应力水平 S_i 下第 m 个失效机理的形状参数、位置参数和尺度参数。

1.2 加速因子模型

在应力水平 S_i ($i=1,2,\dots,k$) 下,产品的每个失效模式的失效机理保持不变。失效机理不变的必要条件为加速因子与工作可靠度无关^[18]。根据加速因子定义^[17],为保持失效机理不变,TPWD 参数在应力水平 S_i, S_j ($j=1,2,\dots,n_i$) 条件下必须满足

$$\begin{cases} \beta_i = \beta_j, \\ \gamma_i = \gamma_j, \\ \eta_i = \eta_j. \end{cases} \quad (5)$$

其加速因子为

$$k_{i,j} = \frac{\eta_j}{\eta_i} = \frac{\gamma_j}{\gamma_i}. \quad (6)$$

由(5)式可得 TPWD 加速试验机理不变时分布参数满足约束:

在应力水平 S_i ($i=1,2,\dots,k$) 下,产品的每个失效机理的形状参数不变,即

$$\beta_{0m} = \beta_{1m} = \dots = \beta_{km} = \beta_m, \quad (7)$$

尺度参数与位置参数之间的比值保持不变,即

$$\frac{\gamma_{im}}{\eta_{im}} = \frac{\gamma_{jm}}{\eta_{jm}}. \quad (8)$$

1.3 加速模型

ALT 中不同应力水平下的可靠性特征量,如平

均寿命、特征寿命、失效率等与加速应力存在固定的函数关系即加速模型,对于 Weibull 分布常假设形状参数与应力水平无关,而用特征寿命作为加速方程的参数^[9-10],即

$$\ln(t_{e^{-1},im}) = a_m + b_m \varphi(S_i), \quad (9)$$

式中: $t_{e^{-1},im}$ 为第 m 个失效模式特征寿命,即可靠度为 e^{-1} 时的寿命; a_m 、 b_m 为第 m 个失效模式加速模型中与应力无关的未知常数; $\varphi(S)$ 为应力水平 S 的已知函数,对于常见的 Arrhenius 模型和逆幂律模型 $\varphi(S)$ 分别为 $\varphi(S) = 1/S$ 和 $\varphi(S) = \ln S$.

由(2)式可知 TPWD 特征寿命 $t_{e^{-1},im} = \eta_{im} + \gamma_{im}$,故产品第 m 个失效模式加速模型为

$$\ln(\eta_{im} + \gamma_{im}) = a_m + b_m \varphi(S_i). \quad (10)$$

设 $\frac{\gamma_{im}}{\eta_{im}} = \frac{\gamma_{jm}}{\eta_{jm}} = \rho_m$,由(8)式加速试验失效机理一致性的分布参数约束条件有

$$\ln \eta_{im} = a_m + b_m \varphi(S_i) - \ln(1 + \rho_m), \quad (11)$$

$$\ln \gamma_{im} = a_m + b_m \varphi(S_i) - \ln(1 + 1/\rho_m). \quad (12)$$

令 $\lambda_m = a_m - \ln(1 + \rho_m)$, $\delta_m = a_m - \ln(1 + 1/\rho_m)$,得到 TPWD 尺度参数和位置参数的加速模型分别为

$$\ln \eta_{im} = \lambda_m + b_m \varphi(S_i), \quad (13)$$

$$\ln \gamma_{im} = \delta_m + b_m \varphi(S_i), \quad (14)$$

式中: λ_m 、 δ_m 、 b_m 均为和应力无关的未知常数。

由此可见,TPWD 的 ALT 和其他寿命分布有很大不同,与加速应力相关的参数有尺度参数和位置参数,且分别具有不同的加速模型参数,故其统计分析相对其他分布要复杂。

1.4 竞争失效模型

产品失效仅由 p 个失效模式之一引起,产品失效时间 t_{ij} 为 p 个失效模式的最小发生时间,即 t_{ij} 为所有失效模式发生的时间及截尾时间之间的最小值, $t_{ij} = \min(t_{ij}^{(1)}, \dots, t_{ij}^{(p)}, t_{ic})$. 其中: $t_{ij}^{(m)}$ ($m = 1, \dots, p$) 为失效模式 m 的潜在失效时间,各失效模式的潜在失效时间相互独立; t_{ic} 为应力水平 S_i 下的定时截尾时间。

在 4 种基本模型下,应力水平为 S_i 、时间为 t 的产品可靠度函数为

$$\begin{aligned} R_i(t) &= P\{T_i > t\} = P\{\min(T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{ip}) > t\} = \\ &= P\{T_{i1} > t \cap T_{i2} > t \cap \dots \cap T_{ip} > t\} = \\ &= P\{T_{i1} > t\} \cdot P\{T_{i2} > t\} \cdots P\{T_{ip} > t\} = \prod_{m=1}^p R_{im}(t), \end{aligned} \quad (15)$$

式中: T_{im} 和 R_{im} 分别为失效模式 m 的潜在失效时间

变量和可靠度函数。由此根据(1)式~(4)式得到产品的可靠度函数和失效分布函数分别为

$$R_i(t) = \prod_{m=1}^p R_{im}(t) = \exp \left[- \sum_{m=1}^p \mu_{im} \left(\frac{t - \gamma_{im}}{\eta_{im}} \right)^{\beta_{im}} \right], \quad (16)$$

$$\begin{aligned} F_i(t) &= 1 - \prod_{m=1}^p R_{im}(t) = \\ &= 1 - \exp \left[- \sum_{m=1}^p \mu_{im} \left(\frac{t - \gamma_{im}}{\eta_{im}} \right)^{\beta_{im}} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

2 统计分析方法

设产品具有 p 个失效模式,记为 $\{1, 2, \dots, p\}$,产品的失效由 p 个失效模式之一产生。现对产品进行恒定应力 ALT,选择 k 个加速应力水平 S_1, S_2, \dots, S_k ,并满足 $S_0 < S_1 < S_2 < \dots < S_k$,其中 S_0 为工作应力水平。随机选择 n_i 个样品在应力水平 S_i 下进行 ALT,在试验截尾时间 t_{ic} 内有 r_i 个样品失效,其试验数据定义为

$$\mathbf{x} = \{x_{ij} | x_{ij} = (t_{ij}, C_{ij}), i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n_i\}, \quad (18)$$

式中: t_{ij} 为应力水平 S_i 下样品 j 在失效或截尾时的观测时间; $C_{ij} = (c_{ij}^{(1)}, \dots, c_{ij}^{(p)})$ 为 t_{ij} 的失效模式标记符,用以标记导致产品失效所对应的失效模式。若 t_{ij} 为失效时间且根据故障诊断发现产品失效由(或可能由)失效模式 m ($m = 1, 2, \dots, p$) 引起,则 $c_{ij}^{(m)} = 1$;若 t_{ij} 为失效时间且不可能由失效模式 m 引起或 t_{ij} 为截尾时间,则 $c_{ij}^{(m)} = 0$.

竞争失效恒定应力 ALT 统计分析的任务为通过对上述试验数据的统计分析得到产品各失效模式分布参数和加速模型参数,估计产品在工作应力下的寿命。

在应力水平 S_i 下,时间 t 内产品失效为失效模式 m 的概率为

$$\begin{aligned} F^{(im)}(t) &= P(T_{i1} > T_{im}, T_{i2} > T_{im}, \dots, T_{i(m-1)} > T_{im}, \\ &= P(T_{im} \leq t, T_{i(m+1)} > T_{im}, \dots, T_{ip} > T_{im}) = \\ &= \int_{T_{im}}^{\infty} \cdots \int_0^t \cdots \int_{T_{im}}^{\infty} \int_{T_{im}}^{\infty} f_i(T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{ip}) dT_{i1} dT_{i2} \cdots dT_{ip}, \end{aligned} \quad (19)$$

式中: T_{im} 为应力水平 S_i 下失效模式 m 的潜在失效时间变量; $f_i(T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{ip})$ 为所有失效模式潜在失效时间变量 $T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{ip}$ 的联合概率密度,对于各失效模式相互独立的情况有^[19]

$$f_i(T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{ip}) = f_{i1}(T_{i1}) \cdot f_{i2}(T_{i2}) \cdots f_{ip}(T_{ip}), \quad (20)$$

式中: $f_{im}(\cdot)$ 为应力水平 S_i 下第 m 个失效模式的失效概率密度函数。将(20)式代入(19)式得

$$F^{(im)}(t) = \int_0^t \cdots \int_0^t \cdots \int_0^t \cdots \int_0^t f_{i1}(T_{i1}) \cdot f_{i2}(T_{i2}) \cdots f_{ip}(T_{ip}) dT_{i1} dT_{i2} \cdots dT_{ip} = \int_0^t \left[\prod_{v=1, v \neq m}^p \int_0^t f_{iv}(T_{iv}) dT_{iv} \right] f_{im}(T_{im}) dT_{im} = \int_0^t \left[\prod_{v=1, v \neq m}^p R_{iv}(T_{im}) \right] f_{im}(T_{im}) dT_{im}, \quad (21)$$

式中: $R_{iv}(\cdot)$ 为应力水平 S_i 下第 v 个失效模式的可靠度函数。

将(21)式对时间 t 求导得到在应力水平 S_i 下、时间 t 内产品失效为失效模式 m 的概率密度

$$f^{(im)}(t) = \frac{dF^{(im)}(t)}{dt} = \frac{d \int_0^t \left[\prod_{v=1, v \neq m}^p R_{iv}(T_{im}) \right] f_{im}(T_{im}) dT_{im}}{dt} = \prod_{v=1, v \neq m}^p R_{iv}(t) f_{im}(t) = h_{im}(t) \prod_{v=1}^p R_{iv}(t), \quad (22)$$

式中: $R_{iv}(t)$ 为应力水平 S_i 下、第 v 个失效模式时间 t 内的可靠度; $h_{im}(t)$ 为时间 t 内第 m 个失效模式的故障率。

由于失效模式不能完全确定, 每个失效数据有可能是几种失效模式中的一种导致的, 故此时每个失效数据的似然函数为

$$L_{ij}(\theta | x_{ij}) = \sum_{m=1}^p \left[c_{ij}^{(m)} h_{im}(t_{ij}) \prod_{v=1}^p R_{iv}(t_{ij}) \right]. \quad (23)$$

应力水平 S_i 下, 截尾数据的似然函数为

$$L_{ij}(t_{ic}) = P(T_{i1} > t_{ic}, T_{i2} > t_{ic}, \cdots, T_{ip} > t_{ic}) = \int_{t_{ic}}^{\infty} \cdots \int_{t_{ic}}^{\infty} f_{i1}(T_{i1}) f_{i2}(T_{i2}) \cdots f_{ip}(T_{ip}) dT_{i1} dT_{i2} \cdots dT_{ip} = \prod_{m=1}^p R_{im}(t_{ic}), \quad (24)$$

式中: t_{ic} 为应力水平 S_i 下的定时截尾时间, 对于定数截尾 $t_{ic} = t_{ir_i}$ 。由此应力水平 S_i 下试验数据(包括截尾数据)的似然函数为

$$L_i = \prod_{j=1}^{r_i} L_{ij}(x_{ij}) \prod_{j=r_i+1}^{n_i} \left[\prod_{m=1}^p R_{im}(t_{ic}) \right] = \prod_{j=1}^{r_i} \left\{ \sum_{m=1}^p \left[c_{ij}^{(m)} h_m(t_j) \cdot \prod_{v=1}^p R_{iv}(t_j) \right] \right\} \cdot \left[\prod_{m=1}^p R_{im}(t_{ic}) \right]^{(n_i - r_i)}. \quad (25)$$

所有试验数据的似然函数为

$$L = \prod_{i=1}^k L_i =$$

$$\prod_{i=1}^k \left\{ \prod_{j=1}^{r_i} \left\{ \prod_{v=1}^p R_{iv}(t_{ij}) \cdot \sum_{m=1}^p \left[c_{ij}^{(m)} h_{im}(t_{ij}) \right] \right\} \cdot \left[\prod_{m=1}^p R_{im}(t_{ic}) \right]^{n_i - r_i} \right\}. \quad (26)$$

对数似然函数为

$$\ln L = \sum_{i=1}^k \left\{ \sum_{j=1}^{r_i} \left\{ \sum_{v=1}^p \ln [R_{iv}(t_{ij})] + \ln \sum_{m=1}^p \left[c_{ij}^{(m)} h_{im}(t_{ij}) \right] \right\} + (n_i - r_i) \sum_{m=1}^p \ln [R_{im}(t_{ic})] \right\}. \quad (27)$$

将 TPWD 相关函数(1)式~(4)式代入(27)式得

$$\ln L = \sum_{i=1}^k \left\{ \sum_{j=1}^{r_i} \left\{ \sum_{m=1}^p \left[- \left(\frac{t_{ij} - \gamma_{im}}{\eta_{im}} \right)^{\beta_{im}} \right] + n \sum_{m=1}^p \left[\frac{c_{ij}^{(m)} \beta_{im}}{\eta_{im}} \left(\frac{t_{ij} - \gamma_{im}}{\eta_{im}} \right)^{\beta_{im} - 1} \right] \right\} + (n_i - r_i) \sum_{m=1}^p \left[- \left(\frac{t_{ic} - \gamma_{im}}{\eta_{im}} \right)^{\beta_{im}} \right] \right\}. \quad (28)$$

将(7)式、(13)式和(14)式代入(28)式得求解各分布参数和加速模型参数的 MLE 模型为

$$\ln L = \sum_{i=1}^k \left\{ \sum_{j=1}^{r_i} \left\{ \sum_{m=1}^p \left[- \left(\frac{t_{ij} - \exp(\delta_m + b_m \varphi(S_i))}{\exp(\lambda_m + b_m \varphi(S_i))} \right)^{\beta_m} \right] + \ln \sum_{m=1}^p \left[\frac{c_{ij}^{(m)} \beta_m}{\exp(\lambda_m + b_m \varphi(S_i))} \cdot \left[\frac{t_{ij} - \exp(\delta_m + b_m \varphi(S_i))}{\exp(\lambda_m + b_m \varphi(S_i))} \right]^{\beta_m - 1} \right] \right\} + (n_i - r_i) \sum_{m=1}^p \left[- \left(\frac{t_{ic} - \exp(\delta_m + b_m \varphi(S_i))}{\exp(\lambda_m + b_m \varphi(S_i))} \right)^{\beta_m} \right] \right\}, \quad (29)$$

式中: $\varphi(S_i)$ 为应力水平 S_i 的已知函数。若采用温度作为产品加速试验的加速应力时, 常选用 Arrhenius 模型作为加速模型, 此时 $\varphi(S_i) = 1/S_i$; 若采用机械应力或电应力作为加速应力对产品实施加速试验时, 一般选用逆幂率模型作为加速模型, 则 $\varphi(S_i) = \ln S_i$ 。

(29)式即为 TPWD 竞争失效恒定应力 ALT 的 MLE 模型。根据极大似然函数估计原理, 求使(29)式取得最大值对应的各个参数 $\hat{\lambda}_m$ 、 \hat{b}_m 、 $\hat{\delta}_m$ 、 $\hat{\beta}_m$, 即为各分布参数和加速模型参数的 MLE 值。求取(29)式最大值方法很多, 由于变量较多, 一般采用最优化方法实现, 常用的如遗传算法、粒子群算法、人工鱼群

算法等。得到各参数的估计值后,通过加速方程可得到工作应力 S_0 下的寿命分布参数

$$\begin{cases} \hat{\beta}_{0m} = \hat{\beta}_{1m} = \dots = \hat{\beta}_{km} = \hat{\beta}_m, \\ \hat{\eta}_{0m} = \exp(\hat{\lambda}_m + \hat{b}_m \varphi(S_0)), \\ \hat{\gamma}_{0m} = \exp(\hat{\delta}_m + \hat{b}_m \varphi(S_0)). \end{cases} \quad (30)$$

由(16)式和(17)式得到各失效模式 TPWD 条件下产品工作应力下的寿命分布函数。

3 实例

应用实例^[9]:某 H 类电动机绝缘部件进行以温

度为加速应力的恒定应力加速试验,该部件有匝间失效(T)、相间失效(P)和槽间失效(G)3种失效模式。4个加速温度水平 $S_1 = 190\text{ }^\circ\text{C} = 463.16\text{ K}$ 、 $S_2 = 220\text{ }^\circ\text{C} = 493.16\text{ K}$ 、 $S_3 = 240\text{ }^\circ\text{C} = 513.16\text{ K}$ 、 $S_4 = 260\text{ }^\circ\text{C} = 533.16\text{ K}$ 。每个应力水平下有 10 只电机进行试验,试验中每个失效发生在绝缘系统单独部分,每个失效的部分被电隔离而不再发生失效,而电机保持运转直到观测到下一个失效,通过这种方式得到每个失效模式的失效时间,各应力水平下失效时间如表 1 所示。

表 1 各失效模式试验数据^[9]

Tab.1 Experimental data of failure modes^[9]

190 °C			220 °C			240 °C			260 °C		
T	P	G	T	P	G	T	P	G	T	P	G
7 228	10 511	10 511 +	1 764	2 436	2 436	1 175	1 175 +	1 175	1 632 +	1 632 +	600
7 228	11 855	11 855 +	2 436	2 436	2 490	1 881 +	1 881 +	1 175	1 632 +	1 632 +	744
7 228	11 855	11 855 +	2 436	2 436	2 436	1 521	1 881 +	1 881 +	1 632 +	1 632 +	744
8 448	11 855	11 855 +	2 436	2 772 +	2 772	1 569	1 761	1 761 +	1 632 +	1 632 +	744
9 167	12 191 +	12 191 +	2 436	2 436 +	2 436	1 617	1 881 +	1 881 +	1 632 +	1 632 +	912
9 167	12 191 +	12 191 +	2 436	4 116 +	4 116 +	1 665	1 881 +	1 881 +	1 128	1 128 +	1 128
9 167	12 191 +	12 191 +	3 108	4 116 +	4 116 +	1 665	1 881 +	1 881 +	1 512	1 512 +	1 320
9 167	12 191 +	12 191 +	3 108	4 116 +	4 116 +	1 713	1 881 +	1 881 +	1 464	1 632 +	1 632 +
10 511	12 191 +	12 191 +	3 108	3 108	3 108 +	1 761	1 881 +	1 881 +	1 608	1 608 +	1 608
10 511	12 191 +	12 191 +	3 108	4 116 +	4 116 +	1 953	1 953 +	1 953 +	1 896	1 896	1 896

注:带“+”表示截尾数据,带框的表示最小失效时间,即产品竞争失效时的时间

实际应用中,最先发生的失效就将导致电机的失效,即竞争失效模式,故每个电机绝缘系统的失效时间为 3 个失效模式中的最小时间。如表 2 所示竞

争失效试验数据, t_{ij} 、 C 、 C_{ij} 分别为失效时间、失效原因和失效模式标记(见(18)式)。对上述数据统计分析来预测该绝缘系统在 $S_0 = 180\text{ }^\circ\text{C} = 453.16\text{ K}$ 下

表 2 竞争失效试验数据

Tab.2 Experimental data of competing failures

190 °C			220 °C			240 °C			260 °C		
t_{ij}/h	C	C_{ij}	t_{2j}/h	C	C_{2j}	t_{3j}/h	C	C_{3j}	t_{4j}/h	C	C_{4j}
7 228	T	(1, 0, 0)	1 764	T	(1, 0, 0)	1 175	T, G	(1, 0, 1)	600	G	(0, 0, 1)
7 228	T	(1, 0, 0)	2 436	T, P	(1, 1, 0)	1 175	G	(0, 0, 1)	744	G	(0, 0, 1)
7 228	T	(1, 0, 0)	2 436	T, P, G	(1, 1, 1)	1 521	T	(1, 0, 0)	744	G	(0, 0, 1)
8 448	T	(1, 0, 0)	3 780	T, G	(1, 0, 1)	1 569	T	(1, 0, 0)	744	G	(0, 0, 1)
9 167	T	(1, 0, 0)	2 436	T	(1, 0, 0)	1 617	T	(1, 0, 0)	912	G	(0, 0, 1)
9 167	T	(1, 0, 0)	2 436	T, G	(1, 0, 1)	1 665	T	(1, 0, 0)	1 128	T, G	(1, 0, 1)
9 167	T	(1, 0, 0)	2 436	T	(1, 0, 0)	1 665	T	(1, 0, 0)	1 320	G	(0, 0, 1)
9 167	T	(1, 0, 0)	3 108	T	(1, 0, 0)	1 713	T	(1, 0, 0)	1 464	T	(1, 0, 0)
10 511	T	(1, 0, 0)	3 108	T, P	(1, 1, 0)	1 761	T	(1, 0, 0)	1 608	T, G	(1, 0, 1)
10 511	T	(1, 0, 0)	3 108	T	(1, 0, 0)	1 953	T	(1, 0, 0)	1 896	T, P, G	(1, 1, 1)

的寿命分布。

确定各失效模式的失效分布,文献认为各失效模式属于对数正态分布,由于 TPWD 具有良好的数据拟合性能,假定各失效模式服从 TPWD. 设在应力水平 S_i 下各失效模式可靠度函数如(2)式所示,失效模式 m 、尺度参数 η_{im} 、位置参数 γ_{im} 分别满足

$$\text{Arrhenius 加速模型: } \begin{cases} \ln \eta_{im} = \lambda_m + 1\,000b_m/S_i, \\ \ln \gamma_{im} = \delta_m + 1\,000b_m/S_i. \end{cases}$$

采用人工鱼群算法^[20]求取使(29)式取最大值对应的参数,即为要求的产品的 ALT 参数,结果如表 3 所示。

表 3 估计结果

Tab.3 Estimated results

λ_1	b_1	δ_1	β_1	λ_2	b_2	δ_2	β_2	λ_3	b_3	δ_3	β_3	$\max(\ln L)$
-5.745 1	6.586 5	-6.012 8	2.271 7	-7.482 5	6.654 4	-4.971 8	5.060 7	-8.443 1	8.652 6	-9.831 9	0.630 9	-320.075 4

由此可得各应力水平 $S_0 \sim S_4$ 下各失效模式的失效分布参数,如表 4 所示。

表 4 各失效模式分布在不同应力水平下的参数

Tab.4 The parameters of failure modes under different stresses

应力	η_{i1}	β_1	γ_{i1}	η_{i2}	β_2	γ_{i2}	η_{i3}	β_3	γ_{i3}
180	6 565.580 8	2.271 7	5 023.694 0	1 341.990 3	5.060 7	16 524.537 3	42 223.760 0	0.630 9	10 529.515 6
190	4 797.166 6	2.271 7	3 670.581 1	977.366 2	5.060 7	12 034.754 5	27 958.781 8	0.630 9	6 972.198 3
220	2 019.680 3	2.271 7	1 545.370 6	407.836 0	5.060 7	5 021.869 9	8 973.616 7	0.630 9	2 237.788 3
240	1 200.104 3	2.271 7	918.267 1	241.042 4	5.060 7	2 968.065 3	4 528.905 6	0.630 9	1 129.392 1
260	741.507 7	2.271 7	567.369 1	148.196 0	5.060 7	1 824.804 8	2 406.020 6	0.630 9	599.999 4

将表 4 参数代入(1)式、(17)式可得产品各失效模式失效分布及产品在个失效模式联合作用下各应力水平下的失效分布,其累积失效分布曲线分别如图 1 和图 2 所示。

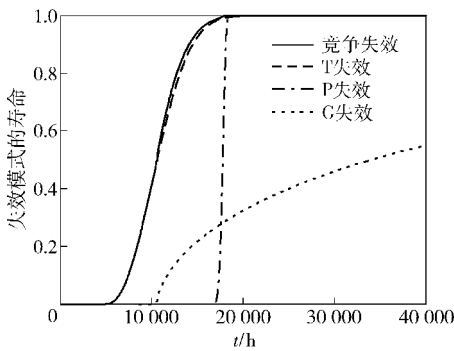


图 1 180 °C 下产品各失效模式寿命分布

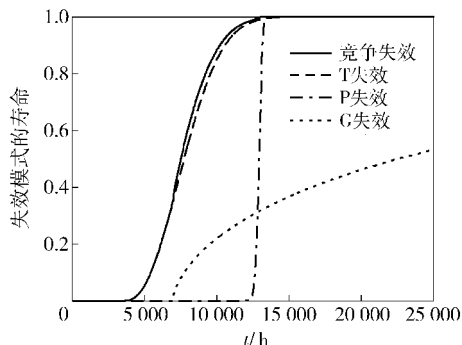
Fig.1 Life distributions of failure modes at 180 °C

根据上述结果可得结论:

1) 由于采用了 TPWD 描述各失效模式的寿命分布,故各失效模式存在最小寿命。在竞争失效情况下,产品的失效分布分为 4 个不同区间。以 180 °C 下的产品竞争失效分布时为例(见图 1),当 $t \in [0, 5\,023.694\,0]$ 时,产品各失效模式潜在失效概率恒为 0,此时产品竞争失效概率为 0;当 $t \in$

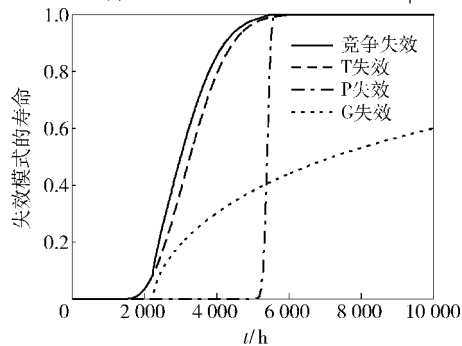
(5 023.694 0, 10 529.515 6] 时,产品寿命分布为 T 失效的寿命分布;当 $t \in (10\,529.515\,6, 16\,524.537\,3]$ 时,产品寿命分布为 T 失效与 P 失效寿命分布的综合;当 $t \in (16\,524.537\,3, \infty]$ 时,产品寿命分布为 T 失效、P 失效和 G 失效寿命分布的综合。由此可知,产品 180 °C 竞争失效情况下的最小寿命为 5 023.694 0 h. 其他应力水平下,产品的寿命分布也是如此,只是各失效模式的最小寿命不同。

2) 利用估计结果和各失效模式最小寿命的特征、产品竞争失效寿命分布特点,可解释表 1 和表 2 的数据特点。由表 2 可看出:在产品竞争失效条件下,前 3 个加速应力水平下的失效数据几乎均为 T 失效数据,而 P 失效的完整数据没有,只有几个可能的非确定数据,第 4 个加速应力下产品的失效以 G 失效数据为主。这些特点可从图 2 说明,在前 3 个加速应力水平下,在产品竞争失效时间点,即 $t_{1l}, t_{2l}, t_{3l} (l=1, 2, \dots, 10)$, T 失效的失效概率相对其他失效模式相对要大(见图 2(a) ~ 图 2(c)),因此产品竞争失效以 T 失效为主;而在加速应力水平 S_4 下、在 1 000 h 内, G 失效较 T 失效和 P 失效的失效概率都大(见图 2(d)),故该段时间内,产品以 G 失效较多。而在各个加速应力水平下, P 失效的最



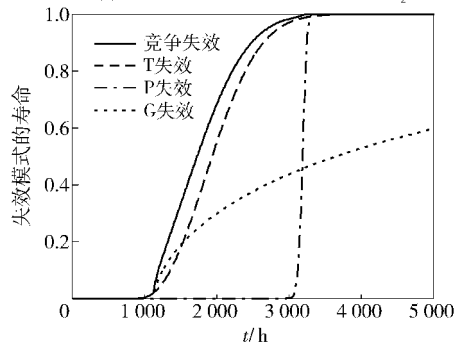
(a) 应力水平 S_1 下失效分布

(a) Failure distributions under stress S_1



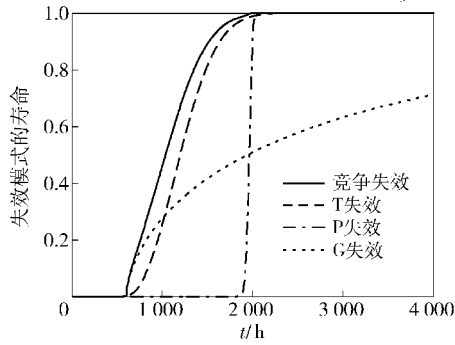
(b) 应力水平 S_2 下失效分布

(b) Failure distributions under stress S_2



(c) 应力水平 S_3 下失效分布

(c) Failure distributions under stress S_3



(d) 应力水平 S_4 下失效分布

(d) Failure distributions under stress S_4

图 2 加速应力下产品各失效模式寿命分布
Fig. 2 Life distributions of failure modes under accelerated stress

中属于 P 失效的很少,正因为 P 失效数据少,只有几个不确定的失效数据,所以估计结果中 P 失效模式各应力水平下的累积失效分布很窄,类似阶跃函数(见图 1 和图 2)。

3) 根据表 3 的估计参数结果和(17)式可得该产品竞争失效及各单独失效模式寿命与温度应力之间的关系。如图 3 和图 4 所示分别为产品竞争失效任务可靠度下的寿命与温度的关系和各失效模式平均寿命与温度之间的关系。

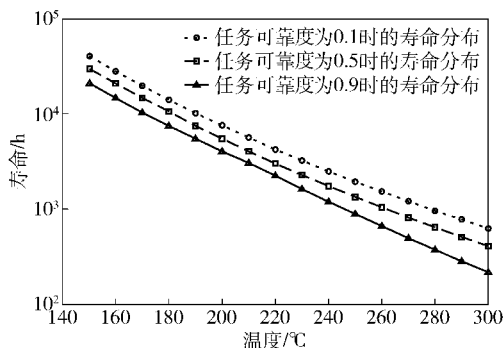


图 3 产品竞争失效任务可靠度下的寿命与温度的关系

Fig. 3 Relation between lifetime and temperature for mission reliability of competing failure

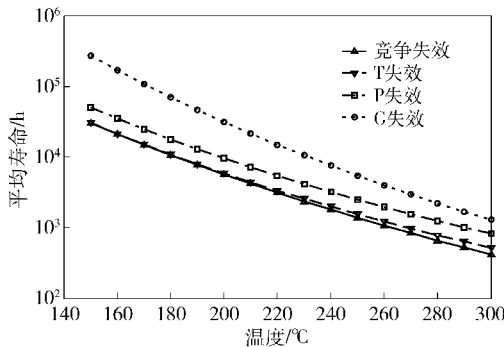


图 4 各失效模式平均寿命与温度之间的关系

Fig. 4 Relation between average lifetime of failure modes and temperature

由图 3 和图 4 可知,产品竞争失效时 180 °C 下的中位寿命和平均寿命分别为 10 567. 984 h、10 679. 611 h, 各失效模式 180 °C 下的平均寿命分别为 10 839. 495 h、17 757. 571 h、70 222. 641 h. 对比文献[9]中的估计结果,产品竞争失效时的中位(平均)寿命为 11 600 h,本文估计结果和文献[9]结果基本一致。

4 结论

本文从 ALT 满足加速性的要求出发,得出了竞

小寿命都很大,当时间达到 P 失效的最小寿命时,T 失效和 G 失效的失效概率已经很大,产品失效原因

争失效 ALT 的 TPWD 参数约束,除形状参数不随加速应力改变外,还需满足位置参数与尺度参数之比与加速应力无关的约束。同时得到 TPWD 的 ALT 中尺度参数与位置参数的加速方程。在加速寿命基本模型的基础上,研究了 TPWD 竞争失效恒定应力 ALT 统计分析方法,建立了参数估计的极大似然模型,并将研究结果应用于实际产品的可靠性分析中。应用实例结果表明,本文建立的 TPWD 的 ALT 统计分析方法和模型符合产品寿命实际,具有很好的估计效果。

参考文献 (References)

- [1] Hallinan A J. A review of the Weibull distribution[J]. Journal of Quality Technology,1993, 25(2):85-93.
- [2] Han Z, Tang L C, Xu J, et al. A three-parameter Weibull statistical analysis of the strength variation of bulk metallic glasses [J]. Scripta Materialia, 2009, 61(9): 923-926.
- [3] Przybilla C, Fernández-Canteli A, Castillo E. An iterative method to obtain the specimen-independent three-parameter Weibull distribution of strength from bending tests [J]. Procedia Engineering, 2011, 10: 1414-1419.
- [4] 方华元, 胡昌华, 李琰. 基于遗传算法的 Weibull 分布的参数估计及 Matlab 实现[J]. 战术导弹控制技术, 2007, 15(1): 100-103.
FANG Hua-yuan, HU Chang-hua, LI Ying. Using Matlab to realize parameters estimation of Weibull distribution based on genetic algorithm [J]. Control Technology of Tactical Missile, 2007, 15(1): 100-103. (in Chinese)
- [5] 方华元, 胡昌华, 曹小平, 等. 含约束条件遗传算法在三参数 Weibull 分布参数估计中的应用[J]. 战术导弹技术, 2006, 14(6):32-35, 44.
FANG Hua-yuan, HU Chang-hua, CAO Xiao-ping, et al. Optimal estimation of three parameters Weibull distribution based on genetic algorithm[J]. Tactical Missile Technology, 2006, 14(6): 32-35, 44. (in Chinese)
- [6] 胡恩平, 罗兴柏, 艾志利. 三参数 Weibull 分布条件下的无线电引信步进应力加速寿命试验与数据处理[J]. 探测与控制学报, 2000, 22(2): 37-40.
HU En-ping, LUO Xing-bai, AI Zhi-li. The step stress ALT and data processing of the radio fuze under the condition of three-parameter Weibull distribution [J]. Journal of Defection & Control, 2000, 22(2): 37-40. (in Chinese)
- [7] 李书明, 董成利, 黄燕晓. 基于 Weibull 的发动机涡轮叶片寿命可靠性评估[J]. 中国民航大学学报, 2008, 26(4): 14-17.
LI Shu-ming, DONG Cheng-li, HUANG Yan-xiao. Evaluate reliableness of aero-engine turbine blades based on Weibull distribution[J]. Journal of Civil Aviation University of China, 2008, 26(4): 14-17. (in Chinese)
- [8] 于捷, 申桂香, 贾亚洲. 基于三参数 Weibull 分布的数控机床可靠性评价[J]. 现代制造工程, 2007, (5):18-20.
YU Jie, SHEN Gui-xiang, JIA Ya-zhou. Reliability evaluation on CNC lathes based on three Weibull distribution [J]. Modern Manufacture Engineering, 2007, (5):18-20. (in Chinese)
- [9] Nelson W B. Accelerated testing: statistical models, test plans, and data analysis[M]. New York:Wiley, 2009:377-417.
- [10] 张志华. 加速寿命试验及其统计分析[M]. 北京:北京工业大学出版社, 2002.
ZHANG Zhi-hua. Accelerated life test and its statistical analysis [M]. Beijing:Beijing University of Technology Press, 2002. (in Chinese)
- [11] Klein J P, Basu A P. Weibull accelerated life tests when there are competing causes of failure[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 1981, 10(20): 2073-2100.
- [12] Klein J P, Basu A P. Accelerated life testing under competing exponential failure distributions, TR-108 [R]. Columbia: Missouri Univ-Columbia Department of Statistics, 1981.
- [13] Kim C M, Bai D S. Analyses of accelerated life test data under two failure models [J]. International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, 2002, 9(2): 111-125.
- [14] Francis P. Accelerated life test planning with independent Weibull competing risks[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2008, 57(3): 435-444
- [15] Bunea C, Mazzuchi T A. Bayesian accelerated life testing under competing failure modes [C] // Reliability and Maintainability Symposium. US:IEEE Conference Publication, 2005:152-157.
- [16] Bunea C, Mazzuchi T A. Competing failure modes in accelerated life testing[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2006, 136(5): 1608-1620.
- [17] 张春华. 步降应力加速寿命试验的理论与方法[D]. 长沙:国防科学技术大学, 2002.
ZHANG Chun-hua. Theory and method of step-down stress accelerated life test [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2002. (in Chinese)
- [18] 张春华, 陈循, 杨拥民. 常见寿命分布下环境因子的研究[J]. 强度与环境, 2001, (4): 7-12.
ZHANG Chun-hua, CHEN Xun, YANG Yong-min. Research on environmental factors under common life distributions [J]. Structure & Environment Engineering, 2001, (4): 7-12. (in Chinese)
- [19] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 第 3 版. 北京:高等教育出版社, 2001.
SHENG Zhou, XIE Shi-qian, PAN Cheng-yi. Probability and mathematical statistics[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2001. (in Chinese)
- [20] 李晓磊. 一种新型的智能优化方法—人工鱼群算法[D]. 杭州:浙江大学, 2003.
LI Xiao-lei. A new intelligent optimization algorithm: artificial fish-swarm algorithm[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2003. (in Chinese)