Topological bifurcation theory : old and new

Jean Mawhin

Université Catholique de Louvain

Cordially dedicated to Paul Rabinowitz,
to remind that he has not always been variational
during 70 years

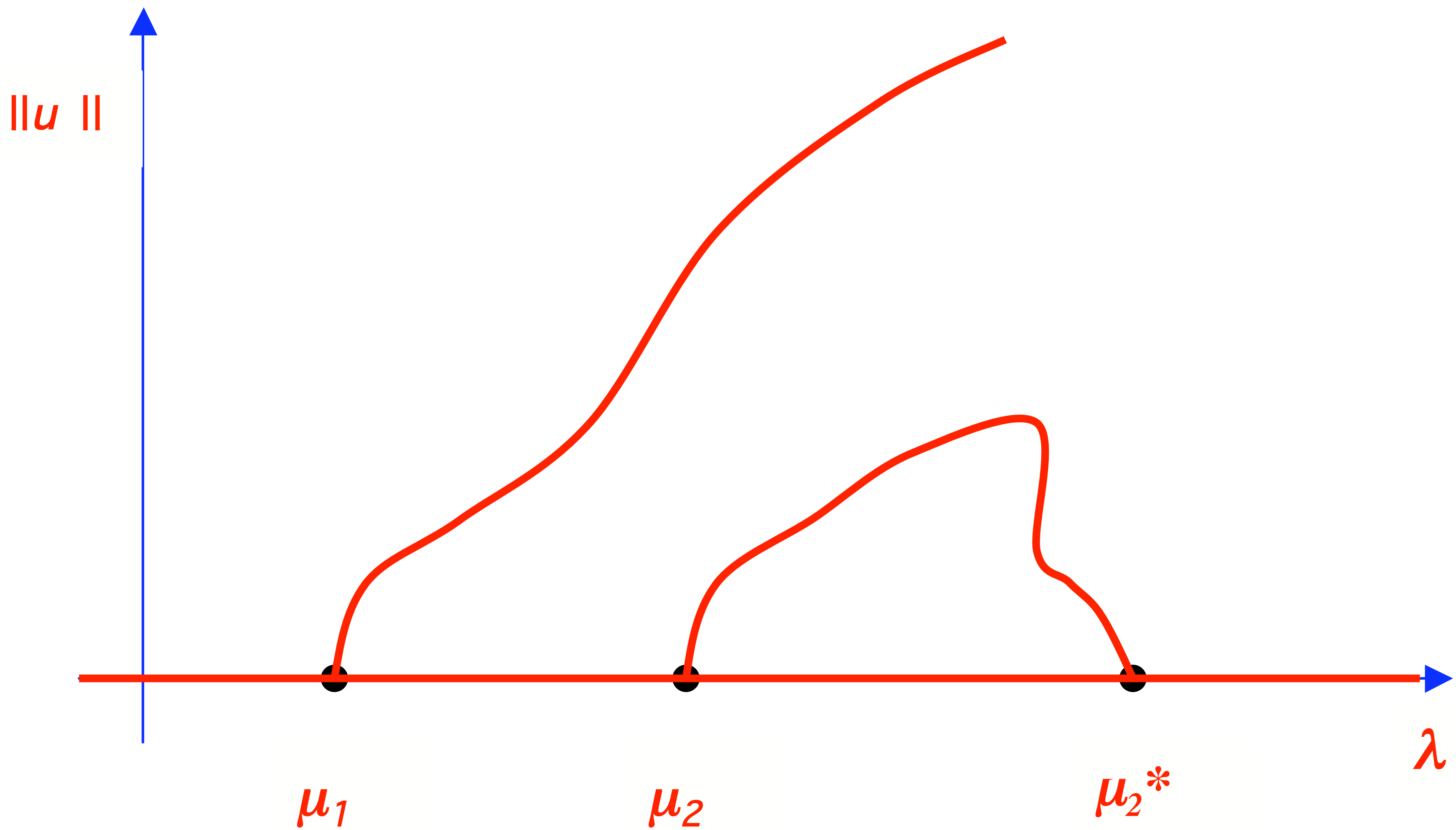
Global bifurcation theorem

- P. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems, J. Functional Anal.* **7** *(1971), 487-513*
- X Banach space, $L : X \to X$ linear, compact, $R : \mathbb{R} \times X \to X$ completely continuous, $R(\lambda, u) = o(\|u\|)$ near 0 unif. on bounded λ-sets
- Thm. *If* μ *is a real characteristic value of* L *with odd multiplicity,* $\mathcal{S} := \overline{\{(\lambda, u) : u \neq 0,\ u = \lambda L u + R(\lambda, u)\}}$ *possesses a maximum subcontinuum* $\mathcal{C}_\mu \ni (\mu, 0)$ *which either*

  (i) meets infinity in $\mathbb{R} \times X$, *or*

  (ii) meets $(\mu^*, 0),\ \mu^* \neq \mu,$ *characteristic value of* L
- *Assumption* $\Leftrightarrow$ $i_{LS}[I - (\mu - \varepsilon)L - R(-\varepsilon, \cdot), 0]$ $\neq i_{LS}[I - (\mu + \varepsilon)L - R(\varepsilon, \cdot), 0]$ *for all small* $\varepsilon > 0$

Global bifurcation picture



Poincaré's *Figures d'équilibre*

SUR

L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE ANIMÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION (1)

Acta Mathematica, t. 7, p. 259-380 (16 septembre 1885).

TABLE DES MATIÈRES.

(1) Manuscrit remis le 16 juillet 1885.

Poincaré’s topological bifurcation

ou en d’autres termes, de couper les surfaces S et S′ par un plan quelconque parallèle à l’axe des x.

On arriverait évidemment à un résultat analogue dans le cas où l’on aurait p paramètres $y_1, y_2, \ldots, y_p$.

Supposons maintenant $n = 2$; de telle façon que nous ayons deux variables x_1 et x_2 définissant la position du système, et un seul paramètre y. Je regarderai alors x_1, x_2 et y comme les coordonnées d’un point dans l’espace. Les équations d’équilibre :

$$\frac{dF}{dx_1} = 0, \qquad \frac{dF}{dx_2} = 0$$

représenteront alors deux surfaces S_1 et S_2 dont l’intersection sera une courbe gauche C. Soient

$$x_1 = \varphi_1(y), \qquad x_2 = \varphi_2(y) \tag{4}$$

deux fonctions finies, continues et réelles de y et supposons que ces équations (4) représentent une branche B de la courbe C. Soit M un point de cette branche B; supposons que si l’on suit la branche B dans le sens des y croissants, on voie Δ changer de signe au moment où l’on franchit le point M. Soient P et Q deux points de B ayant pour ordonnées $y = \beta - \varepsilon$, $y = \beta + \varepsilon$; (l’ordonnée du point M étant $y = \beta$). Au point P, Δ sera par exemple positif, et négatif au point Q.

S’il en est ainsi, je dis qu’il passera par le point M une seconde branche de la courbe C.

En effet, par les divers points de l’arc de courbe PQ faisons passer des plans parallèles au plan des x_1x_2 et dans chacun de ces plans décrivons une circonférence de rayon r ayant son centre au point correspondant de l’arc PQ. Ces diverses circonférences engendreront une certaine surface Σ qui sera doublement connexe et limitée par les deux circonférences K et K′ qui ont pour centres les points P et Q. De plus, d’après ce mode de génération aucun point de la branche B ne peut se trouver sur la surface Σ.

Pour trouver le nombre des points d’intersection de cette surface Σ avec la courbe C, il faut maintenant chercher ce que M. Kronecker appelle (*Berliner Monatsberichte*, mars 1869) la *caractéristique* du système des surfaces Σ, S et S_1. Le nombre des points d’intersection de ces trois surfaces (ou si l’on veut de la surface Σ et de la courbe C) qui satisfont à certaines conditions, diminué du nombre des points d’intersection qui ne satisfont pas à ces mêmes conditions, est égal d’après le Mémoire cité de M. Kronecker à une certaine

intégrale. Cette intégrale est prise le long des limites du domaine Σ, c’est-à-dire le long des deux circonférences K et K′.

L’espace pourra être regardé comme partagé en quatre régions a, b, c, d suivant le signe des deux fonctions $\frac{dF}{dx_1}$ et $\frac{dF}{dx_2}$. Dans la région a, par exemple, les deux fonctions seront positives; dans la région b, $\frac{dF}{dx_1}$ sera positif et $\frac{dF}{dx_2}$ négatif, etc. Δ étant positif au point P, on rencontrera en suivant la circonférence K les quatre régions dans l’ordre circulaire $abcd$, pourvu toutefois que r soit suffisamment petit. Nous supposons qu’on ait parcouru K de façon à laisser à sa gauche le domaine Σ. L’intégrale de M. Kronecker le long de K est alors égale à 1. Δ étant négatif au point Q, on rencontrera en suivant K′ les quatre régions dans l’ordre circulaire $adcb$, si l’on décrit cette circonférence dans le même sens que K. Mais si l’on veut laisser le domaine Σ à sa gauche, il faut décrire K′ en sens contraire et alors les quatre régions se succèdent dans l’ordre $abcd$. L’intégrale est donc encore égale à 1 et l’intégrale totale est égale à 2.

Le nombre des points d’intersection de Σ et de C est donc au moins égal à 2; et aucun de ces points ne peut appartenir à B. Il faut donc que par le point M passe une seconde branche de la courbe C. C. Q. F. D.

(Dans le cas où le théorème de M. Kronecker s’applique à une multiplicité à deux dimensions et à deux fonctions X et Y, et où par conséquent son intégrale doit être prise le long d’une courbe fermée, on voit aisément que cette intégrale est égale à la demi-différence du nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ saute de $-\infty$ à $+\infty$ et du nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ saute de $+\infty$ à $-\infty$.)

Le résultat s’étendrait sans peine au cas où nous aurions un plus grand nombre de variables. Le théorème de M. Kronecker serait en effet encore applicable.

Résumons les résultats de ce paragraphe.

Les formes d’équilibre du système considéré sont données par les n équations

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0.$$

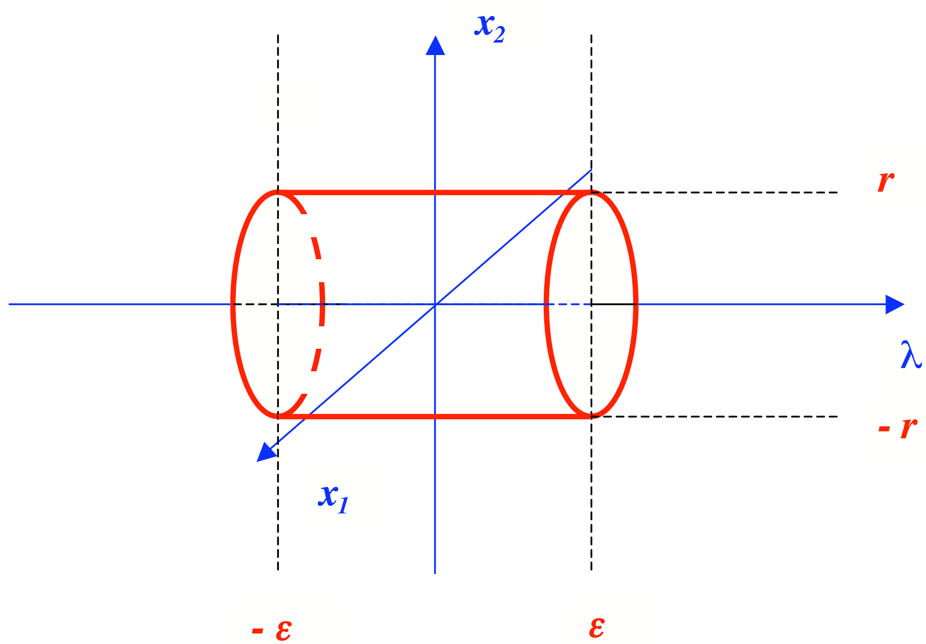
Ces n équations auront un certain nombre de solutions réelles et quand y variera d’une façon continue, ces solutions varieront elles-mêmes d’une façon continue de manière à former diverses *séries linéaires de formes d’équilibre*.

Poincaré's local bifurcation result

- H. POINCARÉ, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, Acta Math.* **7** *(1885), 259-380*
- $f_j \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} : f_j(\lambda, 0, 0) = 0 \quad (j = 1, 2)$
- Thm. *If* $J_{x,y}(f_1, f_2)(\lambda, 0, 0)$ *changes sign at* $\lambda = 0$, *then* $(0, 0, 0)$ *is a bifurcation point of* $f_1(\lambda, x, y) = 0,\ f_2(\lambda, x, y) = 0$
- bifurcation point : belongs to two branches of solutions
- what Poincaré's method proves in our language is
  Thm. *Consider* $f_1(\lambda, x, y) = 0, \quad f_2(\lambda, x, y) = 0$,
  $f_j \in C^0$, $\quad f_j(\lambda, 0, 0) \equiv 0 \quad (j = 1, 2)$.
  If $\forall\, 0 < \varepsilon \ll 1, \quad i_B[f(-\varepsilon; \cdot, \cdot), 0] \neq i_B[f(+\varepsilon; \cdot, \cdot), 0]$,
  then $(0, 0, 0)$ *is a bifurcation point of* (f_1, f_2)
- Poincaré's proof is valid for $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Poincaré's topological proof – 1

- $\varepsilon > 0, r > 0$ small
- $F_0(\lambda, x, y) := f_1(\lambda, x, y),\ F_1(\lambda, x, y) := f_2(\lambda, x, y)$
  $F_2(\lambda, x, y) := x^2 + y^2 - r^2,\ F_3(\lambda, x, y) := x^2 + y^2 + \lambda^2 - r^2 - \varepsilon^2$



- $F_2^{-1}(0) = \textit{ cylinder radius } r,\ F_3^{-1}(0) =$
  $\textit{sphere radius } \sqrt{r^2 + \varepsilon^2},\ F_2^{-1}(0) \cap F_3^{-1}(0) = \textit{ 2 circles}$

Poincaré's topological proof – 2

- L. KRONECKER, *Monatsber. Akad. Wiss. Berlin (1869), 159-193, 688-698*
- Kronecker's characteristic = 'algebraic' number of intersections of $F_0^{-1}(0) \cap F_1^{-1}(0)$ with $F_2^{-1}(0)$ in $F_3^{-1}[(-\infty, 0)]$ = 2 $\times$ Kronecker's integral $\chi(F_0, F_1, F_2, F_3) := 2 \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_3^{-1}(0)} (F_0^2 + F_1^2 + F_2^2)^{-3/2}$ $[F_0\, dF_1 \wedge dF_2 - F_1\, dF_0 \wedge dF_2 + F_2\, dF_0 \wedge dF_2]$
- $w(\phi, \gamma)$:= winding number of vector field ϕ along curve γ
- $\chi(F_0, F_1, F_2, F_3) = w[(F_0, F_1), F_2^{-1}(0) \cap F_3^{-1}(0)] = 2w[(f_1, f_2), \partial B(r)] = 2$
- $\forall\ 0 < r \ll 1$ $f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0) \cap F_2^{-1}(0) \cap F_3^{-1}[(-\infty, 0)] \neq \emptyset$

Modern version of Poincaré

- Thm. *If*
  - $0 \in U \subset \mathbb{R}, \quad 0 \in V \subset \mathbb{R}^n, \quad U, V \quad open$
  - $f \in C(U \times V, \mathbb{R}^n), \quad \forall\, \lambda \in V : f(\lambda, 0) = 0$
  - $\exists\, \varepsilon > 0,\ \exists\, R > 0 : \quad \overline{B}(\sqrt{\varepsilon^2 + R^2}) \subset U \times V$
    $\forall\, x \in \overline{B}(R) \setminus \{0\} : \quad f(\pm\varepsilon, x) \neq 0$
  - $i_B[f(-\varepsilon, \cdot), 0] \neq i_B[f(+\varepsilon, \cdot), 0]$

  then f *has a bifurcation point in* $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\}$
- Proof : *(argument of* J. Ize, *Memoirs AMS* **174** *(1976))*
  - $\forall \quad r \in (0, R] : \quad F_r \in C(U \times V, \mathbb{R}^{n+1}),\ F_r(\lambda, x) := [\|x\|^2 - r^2, f(\lambda, x)], \quad \rho_r = \sqrt{\varepsilon^2 + r^2}$
  - $Theorem \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, r \in (0, R] : \quad d_B[F_r, B(\rho_r)] = d_B[f(\cdot, -\varepsilon), B(r)] - d_B[f(\cdot, \varepsilon), B(r)]$

Proof of degree's equality

- homotopy $\quad (t \in [0,1])$
  $\mathcal{F}_r(\lambda, x, t) := [t(\|x\|^2 - r^2) + (1-t)(\varepsilon^2 - \lambda^2), f(\lambda, x)]$
  $\Rightarrow \; d_B[F_r, B(\rho_r)] = d_B[(\varepsilon^2 - \lambda^2, f), B(\rho_r)]$
- excision and additivity $\quad \Rightarrow \; d_B[(\varepsilon^2 - \lambda^2, f), B(\rho_r)] =$
  $d_B[(\varepsilon^2 - \lambda^2, f), C_\eta^-] + d_B[(\varepsilon^2 - \lambda^2, f), C_\eta^+] \quad where$
  $C_\eta^\pm := (\pm\varepsilon - \eta, \pm\varepsilon + \eta) \times B(\eta), \quad \eta \in (0, \min\{\varepsilon/2, r/2\}$
- homotopies $\quad (t, \in [0,1])$
  $\mathcal{G}^\pm(x, \lambda, t) := [t(\varepsilon^2 - \lambda^2) \pm 2(1-t)\varepsilon(\lambda - \varepsilon), f(x, t\lambda \pm (1-t)\varepsilon)]$
  $\Rightarrow \; d_B[(\varepsilon^2 - \lambda^2, f), C_\eta^\pm] = d_B[[\pm 2\varepsilon(\pm\epsilon - \lambda), f(\cdot, \pm\varepsilon)], C_\eta^\pm]$
- product formula $\quad \Rightarrow \quad d_B[[\pm 2\varepsilon(\pm\epsilon - \lambda), f(\cdot, \pm\varepsilon)], C_\eta^\pm]$
  $= d_B[\pm 2\varepsilon(\pm\epsilon - \lambda), (\pm\varepsilon - \eta, \pm\varepsilon + \eta)] \cdot d_B[f(\cdot, \pm\varepsilon), B(\eta)]$
  $= \mp d_B[f(\cdot, \pm\varepsilon, B(\eta)] = \mp d_B[f(\cdot, \pm\varepsilon, B(r)]$ (excision)

Special case

- Corollary. *If*
  - $0 \in U \subset \mathbb{R}, \quad 0 \in V \subset \mathbb{R}^n, \quad U, V \quad open$
  - $f \in C(U \times V, \mathbb{R}^n), \quad f(\lambda, x) = A(\lambda)x + r(\lambda, x)$
    $with \quad r(\lambda, x) = o(\|x\|)$
    $uniformly\ on\ bounded \quad \lambda - intervals$
  - $\exists\, \varepsilon > 0 : \quad [-\varepsilon, \varepsilon] \subset U, \quad \det A(-\varepsilon) \cdot \det A(+\varepsilon) < 0$

  then $\quad f \quad$ *has a bifurcation point in* $\quad \{0\} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$
- proof :
  - $\exists\, R > 0,\ \forall\, x \in \overline{B}(R) \setminus \{0\} : \quad f(\pm\varepsilon, x) \neq 0$
  - $i_B(f(\pm\varepsilon, \cdot), 0] = sgn\ \det A(\pm\varepsilon)$

Leray-Schauder's memoir – 1

J. LERAY, J. SCHAUDER, *Topologie et équations fonctionnelles, Ann. Ecole Norm. Sup.* **51** *(1934), 45-78*

Leray-Schauder's memoir – 2

TOPOLOGIE ET ÉQUATIONS FONCTIONNELLES[1]

Par MM. Jean LERAY et Jules SCHAUDER

Introduction.

1. Considérons l'équation très simple $P(x) = k$, où k est un paramètre, P un polynome de la variable réelle x; lorsque k varie, le nombre des solutions peut varier, mais sa parité reste constante; cette parité est un invariant de l'ensemble des solutions. Un résultat analogue vaut pour toutes les équations intégrales relevant de la méthode d'Arzelà-Schmidt [2]. Nous établirons au cours de ce travail qu'on peut de même attacher à l'ensemble des solutions de certaines équations fonctionnelles *non linéaires* un entier positif, négatif ou nul, *l'indice total*, qui reste *invariant* quand l'équation varie continûment et que les solutions restent bornées dans leur ensemble; les équations en question sont du type

$$x - \mathcal{F}(x) = 0, \qquad (1)$$

où $\mathcal{F}(x)$ est *complètement continue* (vollstetig); x et $\mathcal{F}$ appartiennent à un ensemble abstrait, linéaire, normé et complet (au sens de M. Banach).

D'où résulte un procédé très général permettant *d'obtenir des théorèmes d'existence :* soit une équation du type (1). Supposons qu'on la modifie continûment sans qu'elle cesse d'appartenir au type (1) et de telle sorte que l'ensemble de ses solutions reste borné (on effectuera

(1) Ce travail a été résumé dans une Note parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 197, 1933, p. 115.

(2) Voir *Journal de Mathématiques*, t. 12, 1933, p. 1 à 7.

vant que la fonction déterminante de Fredholm, $D(\lambda)$, *est positive ou négative pour* $\lambda = 1$.

III. — Théorie de certaines équations fonctionnelles.

12. Nous nous proposons d'étudier l'équation

$$x - \mathcal{F}(x, k) = 0, \qquad (1)$$

les hypothèses suivantes étant réalisées :

(H)

L'inconnue x et toutes les valeurs de $\mathcal{F}$ appartiennent à un espace linéaire, normé et complet, $\mathcal{E}$.

L'ensemble des valeurs du paramètre k constitue un segment [19] K de l'axe des nombres réels [20].

Nous désignerons par $[\mathcal{E} \times K]$ l'espace abstrait qu'engendrent les couples d'éléments (x, k); nous nommerons distance de deux éléments (x, k) et (x', k') de $[\mathcal{E} \times k]$ la quantité $\|x - x'\| + |k - k'|$.

$\mathcal{F}(x, k)$ est supposée définie sur l'ensemble de fermeture $\overline{\Omega}$ d'un ensemble ouvert [21] et borné de $[\mathcal{E} \times K] : \Omega$.

$\mathcal{F}(x, k)$ doit être *complètement continue* [22] sur $\overline{\Omega}$ et de plus *uniformément continue* [23] *en* k.

Nous supposons enfin que *la frontière* Ω' *de* Ω *ne contient aucune solution* (x, k) *de l'équation* (1).

Étant donnée une valeur k du paramètre, $\omega(k)$ désignera l'ensemble des points x tels que (x, k) soit intérieur à Ω. $\omega(k)$ ou bien est vide, ou bien est un ensemble ouvert et borné de l'espace $\mathcal{E}$. Sa fron-

(19) Un segment se compose d'un intervalle et de ses deux extrémités.

(20) Moyennant quelques légères complications de l'énoncé et du raisonnement, nous pourrions supposer que k est un point d'un espace abstrait K vérifiant les deux conditions suivantes : la distance de deux éléments de K est définie; K est un continu. Mais de telles considérations nous paraissent sans grand intérêt.

(21) Un ensemble ouvert de $[\mathcal{E} \times K]$ est un ensemble dont chaque point possède un voisinage ne contenant aucun point de $[\mathcal{E} \times K]$ étranger à cet ensemble. Par exemple, l'inégalité $\|x\| < 1$ définit un domaine de $[\mathcal{E} \times K]$ dont la frontière se compose des points de $[\mathcal{E} \times K]$ tels que $\|x\| = 1$.

(22) Ceci signifie que $\mathcal{F}(x, k)$ est continue en chaque point de $\overline{\Omega}$ et que l'ensemble des valeurs prises par $\mathcal{F}$ sur $\overline{\Omega}$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{E}$.

(23) *Cf.* § 7, p. 54.

Leray-Schauder's memoir – 3

n'est vide en aucun point de K.] Nous allons compléter ce théorème d'existence par des renseignements concernant *la continuité des solutions :* le résultat obtenu constituera notre théorème fondamental.

A cet effet supposons encore vérifiées les hypothèses (H) et (H'). Considérons dans l'espace $[\mathcal{E} \times K]$ le plus grand continu de solutions [25] contenant a_1, le plus grand continu de solutions contenant a_2, ... Soient $c_1, c_2, \ldots c_\nu$ les continus distincts que nous obtenons ainsi ($\nu \leq \mu$). Il existe un nombre δ tel qu'il est impossible de trouver dans $[\mathcal{E} \times k]$ une suite finie de solutions (x_1, k_1), (x_2, k_2), ..., qui possèdent les deux propriétés suivantes :

Les deux solutions extrêmes de cette suite appartiennent à deux continus c_l et c_m distincts; la distance de deux solutions consécutives de cette suite reste inférieure à δ.

Soit λ une grandeur positive quelconque inférieure à δ et inférieure à la plus courte distance de Ω' à l'ensemble de toutes les solutions que contient Ω. Considérons l'ensemble des points de $[\mathcal{E} \times K]$ qui sont situés à une distance moindre que λ de l'une au moins des solutions de (1) : c'est un ensemble ouvert qui se compose de domaines. Soit ω_l celui de ces domaines qui contient le continu $c_l (l = 1, 2, \ldots, \nu)$; les domaines ω_l sont distincts; ils sont deux à deux sans point commun; ils sont intérieurs à Ω; quand λ tend vers zéro chacun d'eux se réduit au continu c_l qui lui correspond. *Nous avons le droit d'appliquer les lemmes* 1, 2, 3 *en substituant* ω_l à Ω : l'indice total des solutions contenues dans ω_l est le même en tous les points de K; il est égal à la somme des indices des points (a_p, k_*) qui font partie de c_l; c'est donc un nombre indépendant de λ. Nous le nommerons l'indice i_l du continu c_l. Il a deux propriétés essentielles :

1° Si (comme vraisemblablement cela a lieu « en général ») les points de c_p correspondant au point k de K sont en nombre fini, alors la somme de leurs indices est l'indice i_p de c_p;

2° Si l'indice i_p de c_p diffère de zéro, à tout point de K correspond au moins un point de c_p.

[25] Une solution est l'ensemble d'un point x de $\mathcal{E}$ et d'un point k de K qui vérifient (1).

16. (H') a pour conséquence que l'un au moins des indices i_1, $i_2, \ldots, i_\nu$ diffère de zéro. D'où :

Théorème fondamental. — *Soit l'équation :*

$$x - \mathcal{F}(x, k) = 0. \tag{1}$$

Supposons vérifiées les hypothèses H (§ 12, p. 59) *et* H' (§ 15, p. 61). *Alors* IL EXISTE SUREMENT *dans l'espace* $[\mathcal{E} \times K]$ *un continu de solutions le long duquel* k *prend toutes les valeurs* [26] *de* K.

N. B. — Ce théorème fondamental n'exprime pas toutes les conséquences qu'entrainent les deux propriétés des indices i_p. Citons par exemple la conséquence suivante : la solution (a_1, k_0), si son indice diffère de zéro, ou bien [27] appartient à un continu de solutions contenant l'une des autres solutions $(a_2, k_0), \ldots, (a_\mu, k_0)$; ou bien [27] appartient à un continu de solutions le long duquel k prend toutes les valeurs de K.

Remarques concernant les hypothèses (H'). — Signalons un cas fréquent et particulièrement simple où les conditions (H') sont satisfaites : celui où, en un point k_0 de K, $\mathcal{F}(x, k_0)$ est identiquement nulle [28].

Un autre cas important est le suivant : on connait un point k_0 de K où l'équation (1) admet *un nombre impair de solutions*, au voisinage desquelles *la transformation* (2) *est biunivoque*.

IV. — Applications.

Signalons en premier lieu que les théorèmes d'existence établis par la méthode d'Arzelà-Schmidt [2] sont tous des cas particuliers du théorème fondamental énoncé ci-dessus.

17. Le présent chapitre est consacré à l'application d'un corollaire du théorème fondamental; ce corollaire s'obtient en supposant Ω

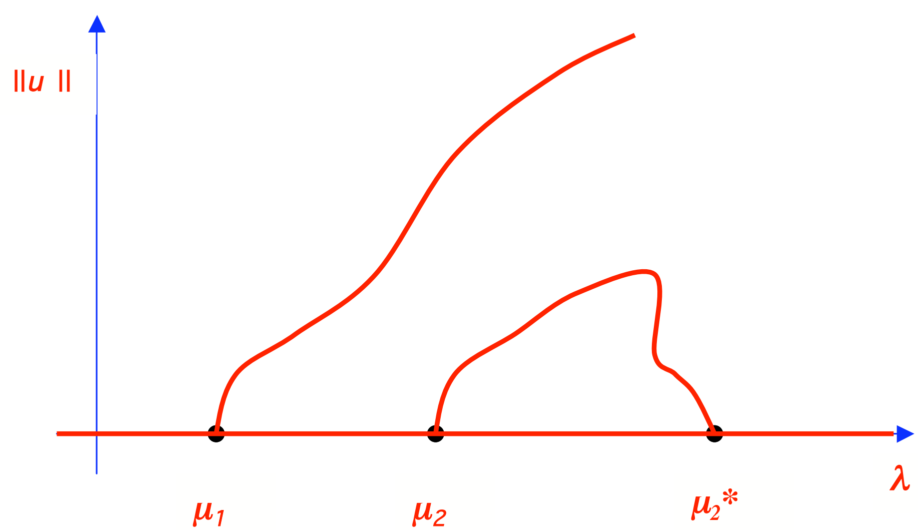
[26] Une même valeur de K peut être prise plusieurs fois.
[27] Rien n'empêche ces deux éventualités de se présenter simultanément.
[28] *Cf.* § 8, p. 55, « Remarque importante ».

Leray-Schauder continuation thm

- $X \quad Banach\ space, \quad \Omega \subset [0,1] \times X$ *open bounded*
  $F : \overline{\Omega} \to X \quad compact$
- $\Sigma := \{(\lambda, u) \in \overline{\Omega} : u = F(\lambda, u)\}$
- Thm. *If*
  - $\Sigma \cap \partial\Omega = \emptyset$
  - $\Sigma_0 \quad = \quad finite\ nonempty\ set \quad \{a_1, \ldots, a_m\}$
  - $ind_{LS}[I - F(0, \cdot), a_1] \neq 0$

  then $\quad (0, a_1) \quad$ *belongs to a continuum* $\quad \mathcal{C} \subset \Sigma$
  such that
  - *either* $\quad \mathcal{C} \quad$ *contains one of the points* $\quad (0, a_2)$, $\ldots, (0, a_m)$
  - *or* $\quad \lambda \quad$ *along* $\quad \mathcal{C} \quad$ *takes all the values in* $\quad [0, 1]$

Pictures : LS vs Rabinowitz



Idea of the proof

- LS-degree $\Rightarrow$ a solution exists $\forall\, \lambda \in [0,1]$
- $K \subset X$ *compact is a continuum* $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, a \in K,\ \forall\, b \in K,$ *one can find a finite number of points* $p_0 = a,\, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n = b$ *of* K *such that* $\|p_i - p_{i+1}\| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n)$
- largest continuum of solutions (λ, u) containing $(0, a_k)$ gives $p \leq m$ distinct continua $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_p$
- $\exists\, \delta > 0$ one cannot $(\lambda_1, u_1), \ldots, (\lambda_q, u_q)$ in $[0,1] \times X$ with $(\lambda_1, u_1) \in \mathcal{C}_i,\ (\lambda_q, u_q) \in \mathcal{C}_j,\ i \neq j,$ and $\|(\lambda_k, u_k) - (\lambda_{k+1}, u_{k+1})\| < \delta$
- $d_{LS}[I - F(\lambda, \cdot), (\Omega_j)_\lambda]$ constant on η-open neighborhoods Ω_j of the $\mathcal{C}_j$ with $\eta < \min\{\delta, dist(\mathcal{S}, \partial\Omega)\}$

Bifurcation

- M.A. KRANOSEL'SKII, *On a topological method in the problem of eigenfunctions of nonlinear operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR* **74** *(1950), 5-7*
- $u = F(\lambda, u), \quad F : \mathbb{R} \times X \to X$ completely continuous, $F(\lambda, 0) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- Definition : $(0, \lambda^*)$ *is a* **bifurcation point** *if* $\exists\, (\lambda_k, x_k)$ in $\mathbb{R} \times (X \setminus \{0\})$ *converging to* $(\lambda^*, 0)$

Krasnosel'skii's local bifurcation thm

- Thm. *If* $L : X \to X$ *is linear compact,* $R : \mathbb{R} \times X \to X$ *completely continuous and* $R(\lambda, x) = o(\|x\|)$ *near* 0 *uniformly on bounded* λ*-sets, then*
  - $(\lambda^*, 0)$ *bifurcation point of* $x = \lambda L x + R(x, \lambda)$ $\Rightarrow$ λ^* *is a real characteristic value of* L
  - λ^* *real characteristic value of* L *with odd multiplicity* $\Rightarrow$ $(\lambda^*, 0)$ *is a bifurcation point of* $x = \lambda L x + R(x, \lambda)$
- Proof : variation of degree around λ^* $\Rightarrow$ bifurcation $+$ Leray-Schauder formula $i_{LS}[I - A, 0] = (-1)^{\sigma}$, $A : X \to X$ linear, compact, $I - A$ invertible, σ sum of the multiplicities of the real characteristic values of A in (0,1)

Extensions of Rabinowitz thm – 1

- *to generalized multiplicities or eigenvalues* : ALIEV, BARI, DAVIDSON, ESQUINAS, IZE, KIELHÖFER, LALOUX, LOPEZ-GOMEZ, MAKHMUDOV, MAGNUS, MORA-CORRAL, PRZYBYCIN, RABIER, RYNNE, SARREITHER, SCHMITT, SMITH, WEISTREICH, WELSH ...
- *to more general nonlinear operators* : ALEXANDER, BENEVIERI, BERESTYCKI, BERKOVITS, BODEA, CALAMAI, CANTRELL, CORTESANI, DANCER, DOMACHOWSKI, EISNER, FITZPATRICK, FURI, GEBA, GORNIEWICZ, GULKOWSKI, HETZER, HUANG WENZAO, KIELHÖFER, KIM INSOOK, KIM YUNHO, KWON SUNGUI, KUCERA, IZE, LALOUX, LE VIKHOI, MA RUYUN, MAGNUS, MAWHIN, MACBAIN, NITKURA, NUSSBAUM, PEITGEN, PEJSACHOWICZ, PETRYSHYN, PRÜFER, RABIER, RATINER, RECKE, SACCON, STALLBOHM, SCHMIDT, SCHMITT, STUART, THOMPSON, TOLAND, WEISTREICH, VÄTH, WELSH, WEBB, ZHAN HANSHENG, ZVYAGIN ...

Extensions of Rabinowitz them – 2

- *to nonlinear operators on cones or convex sets* : AMANN, DANCER, LI DONGSHEN, LI KATAI, MA TIAN, NUSSBAUM, STUART, TURNER, YU QINGYU ...
- *to several parameters* : ALEXANDER, ALTMAN, BARTSCH, CANTRELL, FITZPATRICK, IZE, LOPEZ-GOMEZ, MASSABO, PEJSACHOWICZ, RATINER, SHI JUNPING, VIGNOLI, WELSH, YORKE, ZVYAGIN ...
- *to equivariant bifurcation* : BALANOV, BARTSCH, DANCER, GEBA, KRAWCEWICZ, KUSHKULEY, IZYDOREK, IZE, RYBICKI, STEINLEIN, VIGNOLI, VIVI, WERNER, WU ...

An invariant integral

- $E \subset \mathbb{R}^m \quad open, \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad open, \quad a < b$
- Lemma. $G \in C^2([a,b] \times E, D), \quad w \in C^1(D, \mathbb{R}),$
  $\mu = w\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \quad \Rightarrow \quad \partial_\lambda [G(\lambda,\cdot)^* \mu] = d[\nu_{G,w}(\lambda)]$
  where $\nu_{G,w}(\lambda) = [w \circ G(\lambda,\cdot)] \left[\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \partial_\lambda G_i(t,\cdot) \right.$
  $\left. dG_1(t,\cdot) \wedge \ldots \wedge \widehat{dG_i(\lambda,\cdot)} \wedge \ldots \wedge dG_n(\lambda,\cdot) \right]$
- simple proof : M., *Topol. Meth. Nonlin. Anal. 26 (2005), 17-33*
- Corollary. *If* $m = n$ *and*
  $\forall\, \lambda \in [a,b] : \; supp\, w \cap G(\lambda,\cdot)(\partial E) = \emptyset,$ *then*
  $\int_E G(\lambda,\cdot)^* \mu = \int_E w[G(\lambda,y)]\, J_y\, G(\lambda,y)\, dy$ *is*
  independent of λ *on* $[a,b]$

Topological bifurcation without degree

- Thm. $A \in C([a,b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)), \quad R \in C([a,b] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$: $R(\lambda, x) = o(\|x\|)$ *uniformly on* $[a,b]$. *If* $\det A(a) \cdot \det A(b) < 0,$ *then* $A(\lambda)x + R(\lambda, x) = 0$ *has a bifurcation point in* $[a,b] \times \{0\}$
- proof (by contradiction) : no bifurcation point $\Rightarrow$
  - $\exists\, \alpha_1 > 0,\ \exists\, r > 0 : \ \|A(c)x + \mu R(c,x)\| \geq \alpha_1$ *on* $[0,1] \times \partial B(r)\ (c = a, b)$
  - $\exists\, \alpha_2 > 0 : \ \|A(\lambda)x + R(\lambda, x)\| \geq \alpha_2$ *on* $[a,b] \times \partial B(r)$
- take $B \in C^2, \quad S \in C^2 : \quad \|B(\lambda)x - A(\lambda)x\|$ *and* $\|S(\lambda,x) - R(\lambda,x)\| \leq \min\{\alpha_1/3, \alpha_2/3\}$ *on* $[a,b] \times \overline{B}(r)$:
  $\|g_c(\mu,x)\| := \|B(c)x + \mu S(c,x)\| \geq \alpha_1/3$ *on* $[0,1] \times \partial B(r)$
  $\|h(\lambda,x)\| := \|B(\lambda)x + S(\lambda,x)\| \geq \alpha_2/3$ *on* $[a,b] \times \partial B(r)$
  $(c = a, b)$

End of the proof

- take $\alpha_3 := \min\{\alpha_1/3, \alpha_2/3\}$,
  $w \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+) : supp\ w \subset B(\alpha_3), \quad \int_{\mathbb{R}^n} w(x)\,dx = 1$
- apply Corollary to $h(\lambda, \cdot) \quad (\lambda \in [a, b]) \quad \Rightarrow$
  $\int_{B(r)} w[(a, y)]\, J_y h(a, y)\,dy = \int_{B(r)} w[h(b, y)]\, J_y h(b, y)\,dy$
- apply Corollary to $g_a(\mu, \cdot),\ g_b(\mu, \cdot)$
  $(\mu \in [0, 1]) \quad \Rightarrow \quad \int_{B(r)} w[h(a, y)]\, J_y h(a, y)\,dy =$
  $\int_{B(r)} w[g_a(1, y)]\, J_y g_a(1, y)\,dy =$
  $\int_{B(r)} w[g_a(0, y)]\, J_y g_a(0, y)\,dy = sgn\ det\ A(a)$
  $\int_{B(r)} w[h(b, y)]\, J_y h(b, y)\,dy =$
  $\int_{B(r)} w[g_b(1, y)]\, J_y g_b(1, y)\,dy =$
  $\int_{B(r)} w[g_b(0, y)]\, J_y g_b(0, y)\,dy = sgn\ det\ A(b)$

Many more years to Paul Rabinowitz,
to give us other inspired, beautiful and fruitful results like
the global bifurcation theorem ...

and many thanks to Yiming Long and his colleagues
for the superb organization !