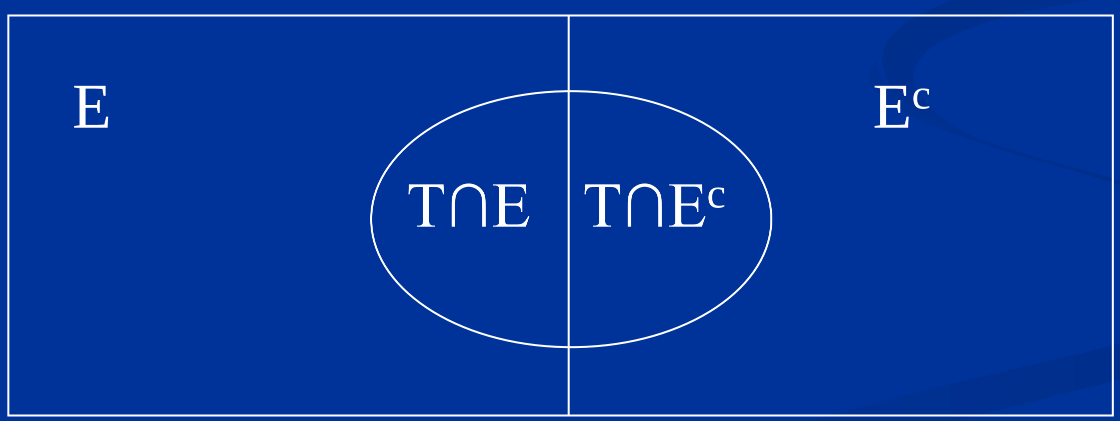
第三章 测度理论

第二节 可测集合

一. 可测集的定义

若$\forall T \subset R^n$, 有$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$

（Caratheodory条件），则称E为Lebesgue可测集，此时E的外测度称为E的测度，记作mE，可测集的全体记作 μ



注1：*Lebesgue*测度就是外测度在可测集上的限制，即测度只是对可测集而言的.

注2：$E\in\mu\Leftrightarrow\forall T\subset R^n$，都有

$$m^*T\geq m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c).$$

因为$\forall T\subset R^n$，有

$$T=(T\cap E)\cup(T\cap E^c),$$

所以 $m^*T\leq m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$恒成立.

例：零集E必为可测集

证明:$\forall T \subset R^n$

有$m^*T \le m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$

$$\le m^*(E) + m^*(T) \le m^*(T)$$

从而$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$

即E为可测集。

二 .Lebesgue可测集的性质

定理1：集合E可测（即$\forall T\subset R^n$,有$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$）

$$\Leftrightarrow \forall A\subset E, B\subset E^c,\text{有}\, m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B)$$

证明：(充分性） $\forall T\subset R^n$

令$A=T\cap E, B=T\cap E^c$即可

(必要性)令 $T=A\cup B$

定理2: (1) 若$A, B, A_i (i=1,2,\cdots,)$可测，则下列集合也可测

$$A^c,\ A\bigcup B,\ A\bigcap B,\ A-B,\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

即可测集类关于差，余，有限交和可数交，有限并和可数并，以及极限运算封闭；

(2) A, B可测，则$A\cap B=\Phi$时，$\forall T\subset R^n$

有$m^*(T\cap(A\cup B))=m^*(T\cap A)+m^*(T\cap B)$

注:上式由前面可测集的等价刻画立刻可得

(3) (可数可加性)

若$\{A_i\}$是一列互不相交的可测集，则

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

(4) 若 A,B可测，$A \subset B, mA < +\infty,$

则有可减性 $m(B-A)=mB-mA$

证明：由可测集的定义：$\forall T \subset R^n$

有$m^*T = m^*(T \cap A) + m^*(T \cap A^c)$

易知A^c可测

若$A \cup B$ 可测已证明，则易知

$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$

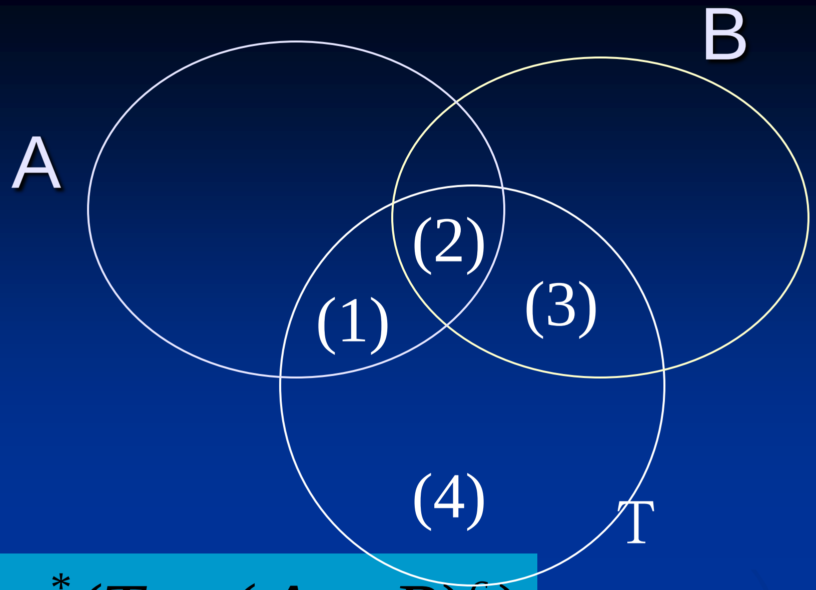
$A - B = A \cap B^c$

也可测。

若当A_i为两两不交时，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$可测已证明，则通过令$B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$可把一般情形转化为两两不交情形；通过取余即可证明$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$可测

下面证明若A,B 可测，

则 $\boxed{A\cup B}$ 可测



证明：$\forall T\subset R^n$

$$
\begin{aligned}
\text{有} m^*T &\le m^*(T\cap(A\cup B))+m^*(T\cap(A\cup B)^c)\\
&\le (m^*(1)+m^*(2))+(m^*(3)+m^*(4))\\
&= m^*((1)\cup(2))+m^*((3)\cup(4)) \quad (B\text{可测})\\
&= m^*((1)\cup(2)\cup(3)\cup(4)) \quad (A\text{可测})\\
&= m^*(T)
\end{aligned}
$$

从而 $m^*T = m^*(T\cap(A\cup B))+m^*(T\cap(A\cup B)^c)$

下面证明若A_i两两不交，则 $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} mA_i$

证明：$\forall T \subset R^n$，有

$$m^*T = m^*(T \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) + m^*(T \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c)$$

$$\geq m^*(T \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) + m^*(T \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m^*(T \cap A_i) + m^*(T \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c)$$

从而$m^*T \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap A_i) + m^*(T \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c) \quad (*)$

$$\geq m^*(T \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)) + m^*(T \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c)$$

另外显然有$m^*T \leq m^*(T \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)) + m^*(T \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c)$

从而$m^*T = m^*(T \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)) + m^*(T \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c)$

从而$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$可测，

并用$T = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$代

入（*）式，

即得结论

三. 单调可测集列的性质

(a) 若A_n是递增的可测集列，则 $m(\lim\limits_{n\to\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} mA_n$

(b) 若A_n 是递减的可测集列且 $mA_1 < +\infty$

则$m(\lim\limits_{n\to\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} mA_n$

注：左边的极限是集列极限，

而右边的极限是数列极限，

(b)中的条件 $mA_1 < +\infty$ 不可少

如$A_n = (n, +\infty)$

注：若 A_n是递减集列，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

若 A_n是递增集列，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$