第 36 卷第 2 期 兵 工 学 报 Vol. 36 No. 2
2015 年 2 月 ACTA ARMAMENTARII Feb. 2015

互耦效应下一种基于实值稀疏表示的波达方向估计算法

吴振[1], 戴继生[1,2], 朱湘临[1], 赵德安[1]

(1. 江苏大学 电气信息工程学院, 江苏 镇江 212013; 2. 东南大学 移动通信国家重点实验室, 江苏 南京 210096)

摘要: 针对未知互耦条件下的波达方向(DOA)估计问题,提出了一种未知互耦条件下基于实值稀疏表示的加权子空间 DOA 估计算法。新算法利用一个特定的酉变换矩阵,将一个复杂的复值优化问题转化为一个实值优化问题,从而有效地将原问题的计算复杂度减少 4 倍以上。此外,为了进一步提高稀疏表示的估计算法估计精度,在原有 l_1 范数优化模型基础上引入一个能使得 DOA 估计方差取得最小值的最优子空间加权矩阵。仿真实验表明,在低信噪比情况下,新算法能进一步提高稀疏表示的估计算法抗噪能力,获得更好的估计精度。

关键词: 信息处理技术; 波达方向估计; 稀疏表示; 互耦; 均匀线阵

中图分类号: TN911.7 **文献标志码**: A **文章编号**: 1000-1093(2015)02-0294-05

DOI: 10.3969/j.issn.1000-1093.2015.02.015

A Real-valued Sparse Representation Method for DOA Estimation with Unknown Mutual Coupling

WU Zhen[1], DAI Ji-sheng[1,2], ZHU Xiang-lin[1], ZHAO De-an[1]

(1. School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, Jiangsu, China;
2. National Mobile Communications Research Laboratory, Southeast University, Nanjing 210096, Jiangsu, China)

Abstract: The paper presents a real-valued sparse representation method for DOA estimation in the presence of unknown mutual coupling. Utilizing a certain unitary transformation and taking advantage of the special structure of mutual coupling matrix (MCM) for uniform linear arrays (ULAs), we are able to convert complex-valued manifold matrices of ULAs with unknown mutual coupling into real ones. Due to this transformation, the computational complexity can be decreased by a factor of at least four. Moreover, the proposed method is expected to have a better noise suppression, as it exploits an additional optimal weighting matrix. Thus, the proposed method outperforms the original one, especially when signal-to-noise ratio (SNR) is low. Simulation results verify the efficiency of the proposed method.

Key words: information processing technology; direction of arrival estimation; sparse representation; mutual coupling; uniform linear array

0 引言

波达方向(DOA)估计作为阵列信号处理的一个重要分支,已广泛应用于雷达、声纳、通信、地震勘探、射电天文以及生物医学工程等多个领域[1-3]。基于子空间的 DOA 估计算法(MUSIC、ESPRIT、root-MUSIC,WSF 等)在较高信噪比、较多快拍数的条件下具有较好的估计性能,但在非理想(比如低信噪

收稿日期: 2013-09-27

基金项目: 国家自然科学基金项目(61102054); 东南大学移动通信国家重点实验室开放研究基金项目(2013D08)

作者简介: 吴振(1990—), 男, 硕士研究生。E-mail: zhenwu.ujs@gmail.com;
戴继生(1982—), 男, 副教授, 硕士生导师。E-mail: jsdai@ujs.edu.cn

比、少量快拍数)情况下,此类算法性能将损失严重。稀疏表示作为一种新颖的数据处理方法,近年来得到了国内外学者的极大关注。基于稀疏表示的 DOA 估计算法与其他估计算法相比,具有所需快拍数小、在低信噪比下具有良好的抗噪性、适用相干信号等优点[4-5]。

稀疏表示估计算法也存在一些不足:与大多数子空间估计算法一样,其估计性能很大程度上取决于阵列流型是否精确已知。在实际的工程应用中,不可避免地要面临多种流型误差的影响(如阵元幅相误差、阵元位置误差、阵元间互耦效应等),这些误差将使得未经校准处理的 DOA 估计算法的性能严重恶化,甚至失效[6-10]。为对抗阵元间的互耦效应,Dai 等提出了一种未知互耦条件下的稀疏表示的 DOA 估计算法[6]。该算法能够消除未知互耦因素带来的不利影响,提高 DOA 估计的性能。然而该算法需要求解一个复数域上的关于 l_1 范数的优化问题,其计算复杂量较高。

注意到一次复数乘法运算需要 4 次实数乘法运算和两次实数加法运算,因此,复数实值化将带来计算复杂度上的巨大优势。受此启发,本文拟提出一种未知互耦条件下基于实值稀疏表示的加权子空间(WSF)DOA 估计算法。与文献[6]所提算法相对比,新算法的创新之处在于:1)采用了实值变换矩阵,有效地将计算复杂度减少 4 倍以上;2)在目标函数中引入了一个最优子空间加权矩阵,有助于进一步减小 DOA 估计的方差。因此,新算法是文献[6]所提算法的一个重要推广,其既有助于提高 DOA 估计性能,又能有效地降低算法计算复杂度。

1　信号模型

考虑 K 个波达方向为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_K$ 的窄带互不相关信号 $s_k(t)(k=1,2,\cdots,K)$ 从远场入射到由 M 个阵元组成的均匀线阵(ULA)上,其中信号波长为 λ. 若假设相邻阵元间距为 d,则未知互耦条件下阵列的输出信号 $\boldsymbol{r}(t)$ 为

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{CAs}(t)+\boldsymbol{n}(t),t\in\{t_1,t_2,\cdots,t_T\},\quad(1)$$

式中:$\boldsymbol{r}(t)=[r_1(t),r_2(t),\cdots,r_M(t)]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{s}(t)=[s_1(t),s_2(t),\cdots,s_K(t)]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{n}(t)=[n_1(t),n_2(t),\cdots,n_M(t)]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}(\theta_1),\boldsymbol{\alpha}(\theta_2),\cdots,\alpha(\theta_K)]$;$\boldsymbol{\alpha}(\theta_k)=[1,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\theta_k)},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(M-1)\phi(\theta_k)}]^{\mathrm{T}}$,$\phi(\theta_k)=(-2\pi d/\lambda)\cdot\sin(\theta_k)$. $\boldsymbol{n}(t)$是一个零均值方差为 $\boldsymbol{\sigma}_n^2\boldsymbol{I}$ 的广义高斯随机过程。矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为 ULA 所对应的互耦矩阵,其互耦系数与阵元间距呈反比:足够远的两阵元间互耦系数近似为 0,且间距相同的两阵元间互耦系数相同。因此,ULA 的互耦矩阵可以用一个带状的对称 Toepliz 矩阵来描述。若模型只考虑 m 个阵元之间的相互作用,则互耦矩阵 $\boldsymbol{C}$[7-12] 可表示为

$$\boldsymbol{C}=\mathrm{Toepliz}(\boldsymbol{c})=\begin{bmatrix}1 & c_1 & \cdots & c_m & \cdots & 0\\ c_1 & 1 & c_1 & \cdots & \ddots & 0\\ \vdots & c_1 & 1 & \ddots & \cdots & c_m\\ c_m & \cdots & \ddots & \ddots & c_1 & \vdots\\ 0 & \ddots & \cdots & c_1 & 1 & c_1\\ 0 & \cdots & c_m & \cdots & c_1 & \end{bmatrix}_{M\times M},\quad(2)$$

式中:Toepliz($\boldsymbol{c}$)表示由矢量 $\boldsymbol{c}$ 构成的对称 Toepliz 矩阵,$\boldsymbol{c}$ 为 $2M-1$ 维矢量,且有

$$\boldsymbol{c}=[c_0,c_1,c_2,\cdots,c_m,0,\cdots,0],$$
$$0<|c_1|,|c_2|,\cdots,|c_m|<c_0,c_0=1.\quad(3)$$

2　稀疏表示的 DOA 估计算法简介

为了便于分析,简要介绍一下无互耦效应下的稀疏表示的 DOA 估计算法(详见文献[4])。此时,(1)式为

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{As}(t)+\boldsymbol{n}(t),t\in\{t_1,t_2,\cdots,t_T\}.\quad(4)$$

若 $\widetilde{\boldsymbol{R}}\triangleq[\tilde{\boldsymbol{r}}(t_1),\cdots,\tilde{\boldsymbol{r}}(t_T)]$,$\boldsymbol{N}\triangleq[\boldsymbol{n}(t_1),\cdots,\boldsymbol{n}(t_T)]$和 $\boldsymbol{S}\triangleq[\boldsymbol{s}(t_1),\cdots,s(t_T)]$,则(4)式可写成矩阵形式,即

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{AS}+\boldsymbol{N},\quad(5)$$

对 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 进行奇异值分解,有

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}=\widetilde{\boldsymbol{U}}_s\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_s\widetilde{\boldsymbol{V}}_s^{\mathrm{H}}+\widetilde{\boldsymbol{U}}_c\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_c\widetilde{\boldsymbol{V}}_c^{\mathrm{H}},\quad(6)$$

式中:$\widetilde{\boldsymbol{U}}_s\in\mathbb{C}^{M\times K}$和 $\widetilde{\boldsymbol{V}}_s\in\mathbb{C}^{M\times K}$为由 K 个较大奇异值对应的奇异向量组成的信号子空间矩阵,而 $\widetilde{\boldsymbol{U}}_c\in\mathbb{C}^{T\times(M-K)}$和 $\widetilde{\boldsymbol{V}}_c\in\mathbb{C}^{T\times(M-K)}$为其余 $M-K$ 个较小奇异值对应的奇异向量组成的噪声子空间矩阵。利用(5)式和(6)式,(4)式可表示为

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{EV}}=\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{EV}}+\widetilde{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{EV}},\quad(7)$$

式中:$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{EV}}=\widetilde{\boldsymbol{R}}\widetilde{\boldsymbol{V}}_s$;$\widetilde{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{EV}}=\boldsymbol{S}\widetilde{\boldsymbol{V}}_s$;$\widetilde{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{EV}}=\boldsymbol{N}\widetilde{\boldsymbol{V}}_s$. 为了将 DOA 估计问题建模成一个稀疏表示问题,需建立一个 DOA 的过完备基。首先,将整个角度空间进行抽样(即离散化),分成均匀间隔的网格。设抽样网格数量为 $K_{\hat{\theta}}$,抽样角度分别为$\{\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_{K_{\hat{\theta}}}\}$,其中 $K_{\hat{\theta}}\gg M$. 只要 $K_{\hat{\theta}}$足够大,就可得到一个 $M\times K_{\hat{\theta}}$维的过完备导向矩阵 $\boldsymbol{A}_{\hat{\theta}}=[\boldsymbol{\alpha}(\hat{\theta}_1),\boldsymbol{\alpha}(\hat{\theta}_2),\cdots,\boldsymbol{\alpha}(\hat{\theta}_{K_{\hat{\theta}}})]$. 于

是,(7)式可表示为

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{EV}}=\boldsymbol{A}_{\hat{\theta}}\widetilde{\boldsymbol{S}}_{\hat{\theta}}+\widetilde{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{EV}}, \tag{8}$$

式中:$\widetilde{\boldsymbol{S}}_{\hat{\theta}}$是一个$K_{\hat{\theta}}\times K$维的矩阵,其第$i$行向量对应于波达方向为$\hat{\theta}_i$的信号。易见,$\widetilde{\boldsymbol{S}}_{\hat{\theta}}$是一个行稀疏矩阵,只有当信号从$\hat{\theta}_i$入射到ULA时,$\widetilde{\boldsymbol{S}}_{\hat{\theta}}$的第$i$行向量才为非零值。为了重构稀疏矩阵$\widetilde{\boldsymbol{S}}_{\hat{\theta}}$,可以求解一个$l_1$范数优化问题:

$$\min_{\widetilde{\boldsymbol{S}}_{\hat{\theta}}}\|\hat{\boldsymbol{s}}_{\hat{\theta}}^{(l_2)}\|_1,\ \text{s. t.}:\|\widetilde{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{EV}}-\boldsymbol{A}_{\hat{\theta}}\widetilde{\boldsymbol{S}}_{\hat{\theta}}\|_2\leqslant\widetilde{\varepsilon}, \tag{9}$$

式中:$[\hat{\boldsymbol{s}}_{\hat{\theta}}^{(l_2)}]_i\triangleq\|\widetilde{\boldsymbol{S}}_{\hat{\theta}}(i,:)\|_2$;$\widetilde{\varepsilon}$是一个常数,其取决于$\|\widetilde{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{EV}}\|_2$置信区间99%的上限值。

3 未知互耦条件下实值稀疏表示的DOA估计算法

由第2节叙述可知,文献[4]所提算法没有考虑互耦效应带来的不利影响。本节将提出一种未知互耦条件下基于实值稀疏表示的加权子空间DOA估计算法。与(5)式类似,未知互耦条件下,(1)式可表示为

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{CAS}+\boldsymbol{N}, \tag{10}$$

由于$\boldsymbol{C}$为未知矩阵,所以(10)式不能直接转换成稀疏表示的形式。为了去除互耦对阵列输出信号带来的不利影响,并将(10)式实值化,引入一个常数矩阵$\boldsymbol{F}\triangleq[\boldsymbol{0}_{(M-2m)\times m}\boldsymbol{I}_{M-2m}\boldsymbol{0}_{(M-2m)\times m}]$和一个酉变换矩阵$\boldsymbol{Q}_M$:当$M$为偶数时,

$$\boldsymbol{Q}_M=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{M/2} & \boldsymbol{J}_{M/2}\\ \mathrm{j}\boldsymbol{J}_{M/2} & -\mathrm{j}\boldsymbol{I}_{M/2}\end{bmatrix}; \tag{11}$$

当M为奇数时,

$$\boldsymbol{Q}_M=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{(M-1)/2} & \boldsymbol{0}_{((M-1)/2)\times 1} & \boldsymbol{J}_{(M-1)/2}\\ \boldsymbol{0}_{1\times(M-1)/2} & \sqrt{2} & \boldsymbol{0}_{1\times(M-1)/2}\\ \mathrm{j}\boldsymbol{J}_{(M-1)/2} & \boldsymbol{0}_{((M-1)/2)\times 1} & -\mathrm{j}\boldsymbol{I}_{(M-1)/2}\end{bmatrix}. \tag{12}$$

式中:$\boldsymbol{I}$为单位矩阵;$\boldsymbol{J}$为交换矩阵(反对角线元素全为1,其他元素为0的矩阵),下标表示矩阵维数。(10)式两边同时左乘$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{Q}_{M-2m}$,得[12]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}'\triangleq\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FR}=\\ \boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FCAS}+\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FN}=\\ \boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FAGS}+\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FN}=\\ \boldsymbol{F}\underline{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{S}}+\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FN},\end{aligned} \tag{13}$$

式中:$\bar{\boldsymbol{S}}\triangleq\boldsymbol{GS}$,$\boldsymbol{G}\triangleq\mathrm{diag}\{g_1,g_2,\cdots,g_K\}$,$g_k=\sum_{m'=-m}^{m}c_{|m'|}\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\phi(\theta_k)}$,$k=1,2,\cdots,K$;$\underline{\boldsymbol{A}}=[\underline{\boldsymbol{\alpha}}(\theta_1),\underline{\boldsymbol{\alpha}}(\theta_2),\cdots,\underline{\boldsymbol{\alpha}}(\theta_K)]$,

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}(\theta_k)=\begin{cases}\sqrt{2}\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{M-1}{2}\phi(\theta_k)\right),\cdots,\cos\left(\frac{1}{2}\phi(\theta_k)\right),\\ \sin\left(\frac{1}{2}\phi(\theta_k)\right),\cdots,\sin\left(\frac{M-1}{2}\phi(\theta_k)\right)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, & M\text{偶数};\\ \sqrt{2}\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{M-1}{2}\phi(\theta_k)\right),\cdots,\cos(\phi(\theta_k)),\\ 1,\sin(\phi(\theta_k)),\cdots,\sin\left(\frac{M-1}{2}\phi(\theta_k)\right)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, & M\text{为奇数}。\end{cases}$$

(13)式中$\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FR}$、$\bar{\boldsymbol{S}}$和$\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FN}$同为复矩阵。为了进一步对其实值化,将(13)式改写成实部和虚部之和的形式,即

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FR})+\mathrm{jIm}(\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FR})=\\ \boldsymbol{F}\underline{\boldsymbol{A}}(\mathrm{Re}(\bar{\boldsymbol{S}})+\mathrm{jIm}(\bar{\boldsymbol{S}}))+\\ \mathrm{Re}(\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FN})+\mathrm{jIm}(\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FN}).\end{aligned} \tag{14}$$

根据实部和虚部分别相等的必要条件,有

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FR})=\boldsymbol{F}\underline{\boldsymbol{A}}\mathrm{Re}(\bar{\boldsymbol{S}})+\mathrm{Re}(\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FN});\\ \mathrm{Im}(\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FR})=\boldsymbol{F}\underline{\boldsymbol{A}}\mathrm{Im}(\bar{\boldsymbol{S}})+\mathrm{Im}(\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FN}).\end{cases} \tag{15}$$

若将(15)式写成矩阵形式,得

$$\underline{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{F}\underline{\boldsymbol{A}}\,\underline{\boldsymbol{S}}+\underline{\boldsymbol{N}}, \tag{16}$$

式中:$\underline{\boldsymbol{R}}=[\mathrm{Re}(\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FR})\ \mathrm{Im}(\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FR})]$;$\underline{\boldsymbol{S}}=[\mathrm{Re}(\bar{\boldsymbol{S}})\mathrm{Im}(\bar{\boldsymbol{S}})]$,$\underline{\boldsymbol{N}}=[\mathrm{Re}(\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FN})\mathrm{Im}(\boldsymbol{Q}_{M-2m}\boldsymbol{FN})]$.易见,通过上述处理,(16)式中所有矩阵均为实值阵。设$\underline{\boldsymbol{R}}$的奇异值分解为

$$\underline{\boldsymbol{R}}=\underline{\boldsymbol{U}}_s\underline{\boldsymbol{\Sigma}}_s\underline{\boldsymbol{V}}_s^{\mathrm{H}}+\underline{\boldsymbol{U}}_c\underline{\boldsymbol{\Sigma}}_c\underline{\boldsymbol{V}}_c^{\mathrm{H}}. \tag{17}$$

根据(7)式,可类似地处理(16)式,但为了在低信噪比情况下,进一步提高稀疏表示的估计算法抗噪能力,获得更好的估计精度,不再简单地用$\underline{\boldsymbol{V}}_s$同时右乘(16)式的两边,而是根据加权子空间理论,采用一个子空间实值加权矩阵$\underline{\boldsymbol{W}}$:

$$\underline{\boldsymbol{W}}=\underline{\boldsymbol{V}}_s\underline{\boldsymbol{\Sigma}}_s^{-1}(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}_s-\sigma_{\mathrm{n}}^2\underline{\boldsymbol{\Sigma}}_s^{-1}), \tag{18}$$

由文献[13]的定理3可知:对于任意的加权矩阵$\boldsymbol{W}$,有

$$\min_{\underline{\boldsymbol{S}}}\|\underline{\boldsymbol{R}}\,\underline{\boldsymbol{W}}-\boldsymbol{F}\underline{\boldsymbol{A}}\,\underline{\boldsymbol{S}}\|_2\leqslant\min_{\underline{\boldsymbol{S}}}\|\underline{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{W}-\boldsymbol{F}\underline{\boldsymbol{A}}\,\underline{\boldsymbol{S}}\|_2, \tag{19}$$

即,(18)式中所定义的$\underline{\boldsymbol{W}}$能使得最优估计的方差取得最小值。由(16)式和(18)式,得

$$\underline{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{EV}}=\boldsymbol{F}\underline{\boldsymbol{A}}\,\underline{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{EV}}+\underline{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{EV}}, \tag{20}$$

式中:$\underline{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{EV}}=\underline{\boldsymbol{R}}\,\underline{\boldsymbol{W}}$;$\underline{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{EV}}=\underline{\boldsymbol{S}}\,\underline{\boldsymbol{W}}$;$\underline{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{EV}}=\underline{\boldsymbol{N}}\,\underline{\boldsymbol{W}}$. 相应地,可

构造出一个 $M \times K_{\tilde{\theta}}$ 维的过完备实值导向矩阵：

$$\underline{\boldsymbol{A}}_{\tilde{\theta}} = [\underline{\boldsymbol{\alpha}}(\hat{\theta}_1), \underline{\boldsymbol{\alpha}}(\hat{\theta}_2), \cdots, \underline{\boldsymbol{\alpha}}(\hat{\theta}_{K_{\tilde{\theta}}})], \tag{21}$$

式中：$\underline{\boldsymbol{\alpha}}(\hat{\theta}_i)$ 已由(13)式所定义。最终(20)式可表示为

$$\underline{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{EV}} = \boldsymbol{F}\underline{\boldsymbol{A}}_{\tilde{\theta}}\underline{\boldsymbol{S}}_{\tilde{\theta}} + \underline{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{EV}}, \tag{22}$$

式中：$\underline{\boldsymbol{S}}_{\tilde{\theta}}$ 是一个 $K_{\tilde{\theta}} \times K$ 维实值矩阵。当且仅当 $\underline{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{EV}}$ 的第 i 行为非零时，$\underline{\boldsymbol{S}}_{\tilde{\theta}}$ 的第 i 行为非零向量。因此，该矩阵仅有 K 行非零值，所以 $\underline{\boldsymbol{S}}_{\tilde{\theta}}$ 为稀疏矩阵。为了重构稀疏矩阵 $\underline{\boldsymbol{S}}_{\tilde{\theta}}$，通过以下实值优化问题找到其稀疏的最优解：

$$\min_{\underline{\boldsymbol{S}}_{\tilde{\theta}}} \| \underline{\boldsymbol{S}}_{\tilde{\theta}}^{(l_2)} \|_1, \text{s. t. } \| \underline{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{EV}} - \boldsymbol{F}\underline{\boldsymbol{A}}_{\tilde{\theta}}\underline{\boldsymbol{S}}_{\tilde{\theta}} \|_2 \leqslant \varepsilon, \tag{23}$$

式中：$[\underline{\boldsymbol{S}}_{\tilde{\theta}}^{(l_2)}]_i \triangleq \| \underline{\boldsymbol{S}}_{\tilde{\theta}}(i,:) \|_2$，获得 ε 值的 Matlab 的代码为 $\sigma_{\mathrm{n}} \sqrt{\mathrm{chi2inv}(0.99,(M-2m)T)}$，噪声方差 σ_{n}^2 可由 $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}_c$ 对角元素的均值所确定。由此，可推导出一种实值稀疏表示的 DOA 估计算法。

本文所提算法所涉及的 l_1 范数优化问题(23)式与文献[6]的优化问题具有相同的结构，主要区别在于：1)优化问题(23)式中所有已知变量和需优化的变量均为实值；2)引入了一个子空间实值加权矩阵，使得 DOA 估计的方差能取得最小值。由于一次复数乘法运算需要 4 次实数乘法运算和两次实数加法运算，因此，复变量实值化将带来计算复杂度上的巨大优势：直接求解优化问题(23)式所需的计算复杂度仅为求解文献[6]优化问题计算复杂度的 1/4. 详细的讨论可参见文献 [12, 14－15]，这里不在赘述。

4　仿真结果及实验分析

本节中将新算法与文献[6,8]所提的算法进行比较，从而验证新算法的有效性。在第 1 个仿真实验中，假设 $K=2$ 个不相关信号($\theta_1 = -19.7°, \theta_2 = 10.1°$)入射到阵元数为 $M=10$ 的 ULA 上，阵元间距为半波长，仅考虑相邻阵元间存在互耦效应，且互耦系数为 $0.3844 - 0.3476i$，噪声为零均值的高斯白噪声。每次实验均进行 200 次蒙特卡罗实验，采用均方根误差(RMSE)作为 DOA 估计算法性能的衡量指标，其定义为

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{200K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{200}(\hat{\theta}_{kj} - \theta_k)^2}, \tag{24}$$

式中：K 为信号源数；$\hat{\theta}_{kj}$ 为第 j 次蒙特卡罗实验对第 k 个信号的角度估计值；θ_k 为第 k 个信号的真实角度。图 1 描述了不同 DOA 估计算法的 RMSE 随着信噪比(SNR)变化的性能曲线，其中快拍数为 100. 从图 1 可以看出，本文所提出的算法具有较好的估计性能。在 SNR 较高时，本文算法与文献[6]算法的性能基本趋于一致，但当 SNR 较低时(＜－8 dB)，所提算法与其他算法相比，RMSE 降低明显。

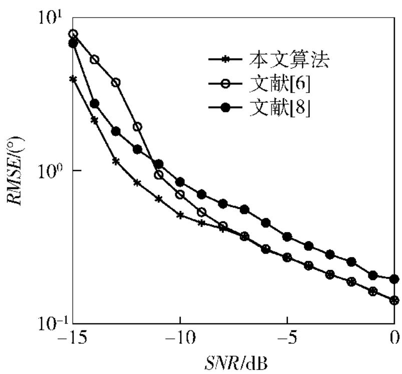

图 1　不同 DOA 估计算法的 RMSE 随着 SNR 变化的性能曲线

Fig. 1　RMSE of DOA estimate against SNR among different strategies

为了验证快拍数对算法性能产生的影响，在第 2 个仿真实验中，在低信噪比情况下进行了 RMSE 随快拍数变化的仿真实验。除了将 SNR 设置为一个固定值(－10 dB)，其他实验条件与仿真实验 1 相同。图 2 描述了不同 DOA 估计算法的 RMSE 随着快拍数变化的性能曲线。从图 2 可以看出，本文算法性能明显优于其他算法，而且随着快拍数的增加，所提算法的 DOA 估计 RMSE 逐渐减小，即估计精度逐渐增高。

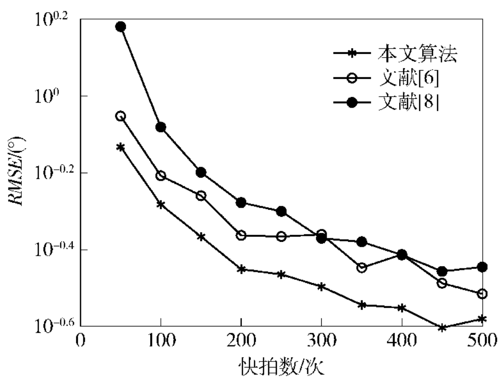

图 2　不同 DOA 估计算法的 RMSE 随着快拍数变化的性能曲线

Fig. 2　RMSE of DOA estimate against snapshots among different strategies

在第 3 个仿真实验中，将验证较少快拍数情况下算法的角度辨别性能。设 $\hat{\theta}_k$ 为第 k 个信号的角

度估计值,若$\max_{k=1,2}\{|\hat{\theta}_k-\theta_k|\}\leqslant\frac{|\theta_1-\theta_2|}{2}$,则称算法能分辨出相邻的DOA. 该仿真实验假设有两个相邻的不相关信号($\theta_1=-2.5°$,$\theta_2=3.5°$)入射到阵元数为$M=12$的均匀线阵上,阵元间距为半波长,快拍数为50,阵元间互耦系数设为$c=[1,0.4+0.3i,0.1-0.2i]$. 图3描述了不同DOA估计算法的分辨率随着SNR变化的性能曲线。由图3可以看出,本文所提算法具有较高的角度分辨率。

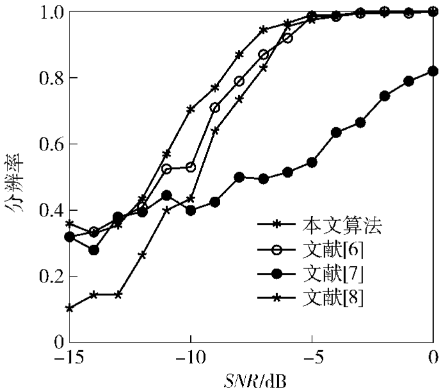

图3 不同DOA估计算法的分辨率随着SNR变化的性能曲线

Fig. 3 Resolution probability of DOA estimate against SNR among different strategies

5 结论

针对未知互耦条件下DOA估计算法运算复杂度较高的问题,本文提出一种未知互耦条件下基于实值稀疏表示的加权子空间DOA估计算法,该算法利用特定的酉变换矩阵,将一个复杂的复值优化问题转化成实值优化问题,从而有效地降低了计算复杂度。此外,根据加权子空间理论,引入了一个子空间实值加权矩阵,进一步提高了稀疏表示的估计算法估计精度。本文算法是文献[6]所提算法的一个重要推广。理论分析和仿真实验都验证了本文所提算法的有效性。

参考文献(References)

[1] Kim H, Viberg M. Two decades of array signal processing research[J]. IEEE Signal Magazine, 1996, 13(4): 67 –94.

[2] 叶中付, 李春辉, 贾红江, 等. 空间非平稳噪声下的信源数估计算法[J]. 兵工学报, 2009, 30(7): 873 –878.
YE Zhong-fu, LI Chun-hui, JIA Hong-jiang, et al. Estimation of the number of signal source in spatially nonstationary noise[J]. Acta Armamentarii, 2009, 30(7): 873 –878. (in Chinese)

[3] 邹吉武, 孙大军. 线阵双基地声纳波束零点形成MUSIC算法[J]. 兵工学报, 2010, 31 (3): 364 –368.
ZOU Ji-wu, SUN Da-jun. MUSIC algorithm of beam null forming on linear array of bi-static sonar [J]. Acta Armamentarii, 2010, 31 (3): 364 –368. (in Chinese)

[4] Malioutov D, Çetin M, Willsky A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(8): 3010 –3022.

[5] Stoica P, Babu P, Li J. SPICE: a sparse covariance-based estimation method for array processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(2): 629 –638.

[6] Dai J, Zhao D, Ji X. A sparse representation method for DOA estimation with unknown mutual coupling[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2012, 11: 1210 –1213.

[7] Sellone F, Serra A. A novel online mutual coupling compensation algorithm for uniform and linear arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(2): 560 –573.

[8] Ye Z, Dai J, Xu X, et al. DOA estimation for uniform linear array with mutual coupling[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2009, 45(1): 280 –288.

[9] Friedlander B, Weiss A J. Direction finding in the presence of mutual coupling[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1991, 39(3): 273 –284.

[10] Dai J, Bao X, Hu N, et al. A recursive RARE algorithm for DOA estimation with unknown mutual coupling[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2014, 13: 1593 –1596..

[11] Dai J, Ye Z. Spatial smoothing for direction of arrival estimation of coherent signals in the presence of unknown mutual coupling[J]. IET Signal Processing, 2011, 5(4): 418 –425.

[12] Dai J, Xu W, Zhao D. Real-valued DOA estimation for uniform linear array with unknown mutual coupling[J]. Signal Processing, 2012, 92(9): 2056 –2065.

[13] Viberg M, Ottersten B. Sensor array processing based on subspace fitting[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(5): 1110 –1121.

[14] Huarng K C, Yeh C C. A unitary transformation method for angle-of-arrival estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(4): 975 –977.

[15] Dai J, Xu X, Zhao D. Direction-of-arrival estimation via real-valued sparse representation[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2013, 12: 376 –379.